ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΣΜΟΙΩΣΗΣ 1, 23/03/2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστο διάστημα $[a,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a,β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α2. i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \;,$$

οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

ii. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν** ισχύει.

Αντι-παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$ (Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α3.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

Αντιπαραδείγματα στις Λάθος προτάσεις:

β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ενώ επειδή:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

η f δεν είναι αραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

δ) Έχουμε:

$$\int_0^{2\pi}\eta\mu x dx=-[\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi}=-\sigma\upsilon\nu 2\pi-+\sigma\upsilon\nu 0=1+1=0$$

Αλλά δεν είναι $\eta\mu x=0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Θα εξετάσουμε το είδος μονοτονίας της g (για το σκοπό αυτό θα εξετάσουμε το πρόσημο της διαφοράς):

$$\begin{aligned}g(x_1)-g(x_2)&=\frac{f(x_1)}{f^2(x_1)+1}-\frac{f(x_2)}{f^2(x_2)+1}=\frac{f(x_1)\left(f^2(x_2)+1\right)-f(x_2)\left(f^2(x_1)+1\right)}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)}=\\&=\frac{f(x_1)f(x_2)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)-\left(f(x_2)-f(x_1)\right)}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)}=\frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\left(f(x_1)f(x_2)-1\right)}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)}\end{aligned}\quad(1)$$

Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}0<f(x_1)<1\\0<f(x_2)<1\end{array}\right\}\Rightarrow 0<f(x_1)f(x_2)<1\Rightarrow f(x_1)f(x_2)-1<0$$

και $\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)>0$

Άρα:

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε:

  $$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0\Rightarrow g(x_1)-g(x_2)<0\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

  , δηλαδή η g είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε:

  $$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)<0\Rightarrow g(x_1)-g(x_2)>0\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

  , δηλαδή η g είναι επίσης γνησίως φθίνουσα.

Β2. Έστω ότι η f και g είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$ (αφού, σύμφωνα με το ερώτημα Β1 έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας).

- f και g γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$

  Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1) < f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1) < (fog)(x_2)$$

δηλαδή η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- f και g γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1) < f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1) < (fog)(x_2)$$

δηλαδή η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Άρα σε κάθε πρίπτωση η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως είναι συνάρτηση «1-1».

B3. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$(fog)(x^3+1) = (fog)(4x^2+2x) \Leftrightarrow x^3+1 = 4x^2+2x \Leftrightarrow x^3+1-4x^2-2x = 0$$

Θέτουμε:

$$h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$$

και έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty, h(0) = 1, h(1) = -4 < 0$$

Αφού $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, υπάρχει $\alpha < 0$ τέτοιο, ώστε $h(a) < 0$ και αφού $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο, ώστε $h(\beta) > 0$.

Από το θεώρημα του Bolzano στα διαδοχικά διαστήματα $[\alpha,0]$, $[0,1]$, $[1,\beta]$ (στα οποία πληρούνται οι προϋποθέσεις αφού η $h(x)$ ελιναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$, άρα και στα διαστήματα αυτά) υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,0), \xi_2 \in (0,1), \xi_3 \in (1,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$$h(\xi_1) = h(\xi_2) = h(\xi_3) = 0 \text{ με } \xi_1, \xi_2 > 0 \text{ και } \xi_3 < 0 .$$

Τέλος επειδή η $h(x)$ είναι πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 3 ρίζες και επομένες οι παραπάνω ρίζες είναι μοναδικές.

2^{ο}ς τρόπος για τις ρίζες της h(x):

Βρίσκουμε μέσω της h(x) τις εικόνες των διαστημάτων $(-\infty,0)$, $[0,1]$, $[1,+\infty)$ οι οποίες είναι (αφού πρώτα μελετήσουμε την μονοτονία της h) στις οποίες ανήκει το 0. Επομένως υπάρχουν 3 ρίζες και δεν υπάρχουν περισσότερες διότι ο βαθμός που πολυωνύμου είναι 3.

B4. Αφού η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$(\mathrm{fog})(\mathrm{x}^3+4) > (\mathrm{fog})(3\mathrm{x}^2) \Leftrightarrow x^3+4 > 3x^2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη .

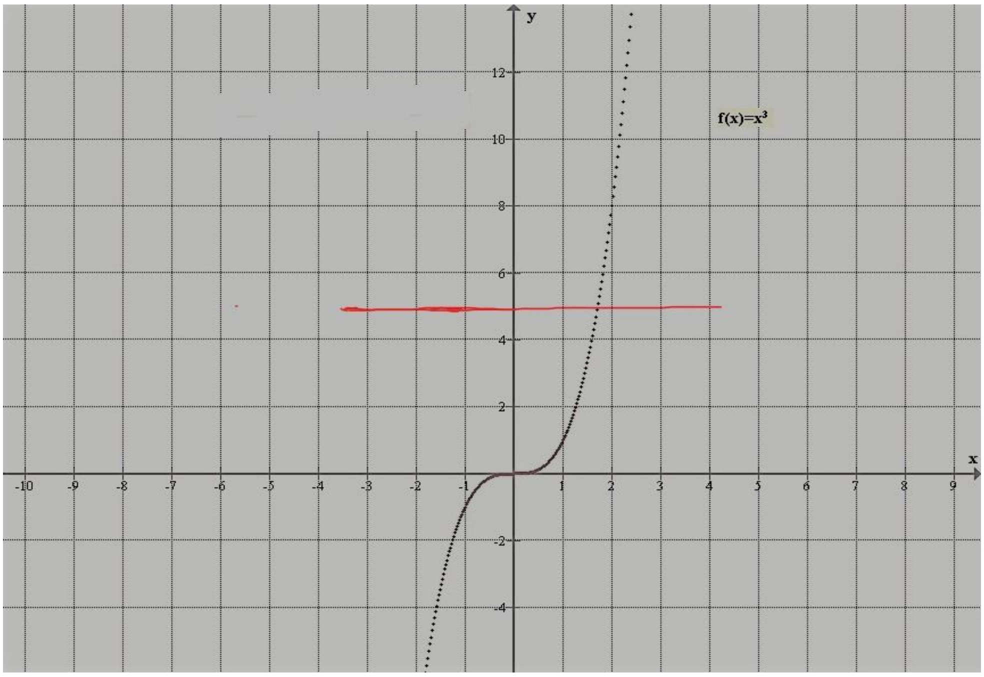
Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y}, \ \alpha\nu \ y \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-y}, \ \alpha\nu \ y < 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \ \alpha\nu \ \text{x} \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, \ \alpha\nu \ \text{x} < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



Αφού η f είναι «1-1» οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα x΄x τέμει την γραφική παράσταση C_f της f το πολύ σε ένα σημείο (ή ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετεγμένη).

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $x \in (0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3,\ x \geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$) με:

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}x^2,\ x \geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$) με:

$g''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$ (αφού $\eta\mu x < x \Leftrightarrow -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $\eta\mu x = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$). ¨Αρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα έχουμε:

$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M\left(x(t_0),\ y(t_0)\right)$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x'(t_0) = y'(t_0)$. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $y(t) = x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$y'(t) = \left[x^3(t)\right]' \Leftrightarrow y'(t) = 3x^2(t)\cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0)\cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0)\cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Επομένως το ζητούμενο σημε'ιο της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0) = y'(t_0)$ είναι $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Μια φυσική ερμηνεία του προβλήματος είναι η επόμενη:

Όταν το κινητό (σημείο) κινείται πάνω στην καμπύλη $y(t) = x^3(t)$ την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το κινητό διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ η συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα x΄x (οριζόντια συνιστώσα) είναι ίση με την συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα y΄y (κατακόρυφη συνιστώσα). ($x'(t)>0$ σημαίνει ότι το κινητό κινείται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα x'x).

Γ4. Για το ολοκλήρωμα Ι έχουμε:

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx$$

αφού η g είναι άρτια $g(x)=g(-x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$ θέτουμε:

$$\begin{aligned}&-x=u \Leftrightarrow x=-u\\&dx=-du\\&x=-1 \Leftrightarrow u=1\\&x=1 \Leftrightarrow u=-1\end{aligned}$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx=\int_{-1}^{1} x^3 g(-x)dx=-\int_{1}^{-1}(-u)^3 g(u)du=\\&=\int_{-1}^{1}(-u)^3 g(u)du=-\int_{-1}^{1}u^3 g(u)du=-I\end{aligned}$$

Επομένως:

$$I=-I \Leftrightarrow 2I=0 \Leftrightarrow I=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}&f(x)=x\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - f(x)=\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow (\eta\mu x - f(x))'=(x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c,\ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)=0+c \Leftrightarrow 0=c \Leftrightarrow c=0$$

άρα:

$$f(x)=\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\,,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

ii. Η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$f'(x) = x\eta\mu x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow 0 < \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$$

Δ2. Έχουμε:

$$g(x) = \left|x\varepsilon\varphi x - x^2\right| = |x| \cdot |\varepsilon\varphi x - x|, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Από το ερώτημα (Δ1 ii) ισχύει:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x > x \text{ , } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

‘Εχουμε:

- Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(-x) > -x \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x > -x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x < x$$

- για $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Άρα:

$$g(x) = x\varepsilon\varphi x - x^2, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$g'(x) = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + x\left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - x = \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + x \cdot \varepsilon\varphi^2 x$$

- Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x > 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x > 0$ άρα $g'(x) > 0$
- Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x < 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x < 0$ άρα $g'(x) < 0$
- Αν $x = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η g παρουσιάζει για $x=0$ ολικό ελάχιστο το $g(0)=0$ (Η g είναι συνεχής στο $x=0$).

2ος τρόπος:

$$g'(x) = \; = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x + x - 2x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\right) + x\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

και $g'(0)=0$

- Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma\upsilon\nu x>0,\ \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x,\ x\eta\mu^2 x>0$, τότε $g'(x)>0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

- Έστω $x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ με $x_1<x_2$, τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g(-x_1) > g(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$

Η g παρουσιάζει για $x=0$ ολικό ελάχιστο το $g(0)=0$

Δ3. α) $g\left(x\right)=a$, όπου $a>0$

- $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[0,+\infty\right)$ και $a\in\left[0,+\infty\right)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_o\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$) τέτοιο, ώστε $g\left(x_o\right)=a$

- $-x_o\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και $g\left(-x_o\right)= \left(-x_o\right)\varepsilon\varphi\left(-x_o\right)-\left(-x_o\right)^2 = g\left(x_o\right)=a$

Το $-x_0$ είναι μοναδικό (γιατί η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$)

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g\left(x\right)=a$, όταν $a>0$ είναι $-x_o+x_o=0$.

β). Επειδή x_1 , x_2 , x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων:

$$g\left(x\right)=1\ ,\ g\left(x\right)=2\ ,\ g\left(x\right)=3$$

αντίστοιχα, έχουμε:

$$g\left(x_1\right)=1\ ,\ g\left(x_2\right)=2\ ,\ g\left(x_3\right)=3$$

και είναι:

$$1 < 2 < 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) \Leftrightarrow x_1 < x_2 < x_3$$

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού για την g στα $\left[x_1, x_2\right]$, $\left[x_2, x_3\right]$ (αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως και στα, $\left[x_1, x_2\right]\left[x_2, x_3\right]$, άρα είναι και συνεχής σε αυτά) έχουμε ότι υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(x_1, x_2\right)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(x_2, x_3\right)$:

$$\left(x_2 - x_1\right) \cdot g'\left(\xi_1\right) = g\left(x_2\right) - g\left(x_1\right) = 2 - 1 = 1 \,, \xi_1 \in \left(x_1, x_2\right)$$

$$\left(x_3 - x_2\right) \cdot g'\left(\xi_2\right) = g\left(x_3\right) - g\left(x_2\right) = 3 - 2 = 1$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$\left(x_2 - x_1\right) \cdot g'\left(\xi_1\right) + \left(x_3 - x_2\right) \cdot g'\left(\xi_2\right) = 2$$

Δ4. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left[\eta\mu x - f\left(x\right)\right] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right) + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} \overset{D.L.P}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\varepsilon\varphi x + 2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x + 1} \overset{D.L.P}{=} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2}{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0} + 2}{2\sigma\upsilon\nu^2 0 - 2\eta\mu^2 0 + 2\eta\mu 0 + 0\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{2}$$

<u>2ος τρόπος:</u>

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left[\eta\mu x - f\left(x\right)\right] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right) + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)}{x^2} + 1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = l$$

- ♦ $\lim_{x \to 0^+} \frac{-\varepsilon\varphi x}{2x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)}{x^2} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{1}{2}$
- ♦ $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$
- ♦ $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\eta\mu x}{1} = 0$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0}=\frac{1}{2}$$

ii. Για $0 < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$ (I) (από το ερώτημα Δ1 ii) και $x\eta\mu x > 0$ (II) για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x > 0 \text{ (III), για κάθε } x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο (0,0) (αφού $f(0) = f'(0) = 0$).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$

είναι (λόγω της σχέσης (III) έχουμε:

$$\left|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\right| = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \text{):}$$

$$E(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x) - f'(x)\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\right|dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx = I_1 - I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu x)'dx =$$

$$= \left[x\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} + \left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sigma\upsilon\nu x)'dx = -\left[x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx = \left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Άρα:

$$E(\Omega) = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 1 = 3 - \frac{\pi}{2} \ \ \tau.\mu.$$

<u>Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής των $f, -f'$ έχουμε:</u>

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο (0,0) αφού:

$$f(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x = 0 \ (1)$$

Προφανώς για $x = 0$ η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι $f, -f'$ τέμνονται στο $\mathrm{O}(0,0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\mathrm{K}(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x,\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$\mathrm{K}'(x) = x\eta\mu x + \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

και επειδή η K είναι συνεχής στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και «1-1» και επομένως η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $\mathrm{O}(0,0)$.

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών