ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$. Αν η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

<u>Λύση</u>

α) Έστω ότι $f(\alpha)<f(\beta)$ και $f(\alpha)<n<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-n$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ παρατηρούμε ότι:

Η g είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$ οπότε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Άσκηση 2

i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

<u>Λύση</u>

i. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού A. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Άσκηση 3

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

β) Τι ονομάζουμε σύνθεση gof δύο συναρτήσεων f,g με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της gof;

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Λύση

α) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο $gof : A_1 \to \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού A_1 της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \,|\, f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Άσκηση 4

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

iii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

<u>Λύση</u>

i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ii. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

iii. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση "1-1", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άσκηση 5

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

ii. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ii. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Άσκηση 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

<u>Λύση</u>

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Άσκηση 7

i. Τι ονομάζεται ακολουθία;

ii. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

Λύση

i. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : N^* \to \mathbb{R}$

ii. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

Άσκηση 8

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $|\eta\mu x|$ και $|x|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

<u>Λύση</u>

i. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Bolzano είναι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $|\eta\mu x|\le|x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.

Άσκηση 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

Λύση

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu {x_0}^\nu+\alpha_{\nu-1}{x_0}^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=P(x_0)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Άσκηση 10

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

<u>Λύση</u>

Είναι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow$

$e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1} \Rightarrow -3e^{2x_1+1} > -3e^{2x_2+1}$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow -5x_1 + 3 > -5x_2 + 3$

άρα $-3e^{2x_1+1} - 5x_1 + 3 > -3e^{2x_2+1} - 5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3e^{2x+1} - 5x + 3\right) =$

  $-3\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} - 5\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3 = -\infty - \infty + 3 = -\infty$

  (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} = e\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x)^2 = e(+\infty) = +\infty$).

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-3e^{2x+1} - 5x + 3) =$

  $-3\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} - 5\lim_{x\to-\infty} x + 3 = 0 + \infty + 3 = +\infty$

  (αφού $\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} = e\lim_{x\to-\infty}(e^2)^x = e\cdot 0 = 0$).

Επομένως είναι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

γ) Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0, θα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2x^{2011}+5x-7,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^{2011}<x_2^{2011}\Rightarrow 2x_1^{2011}<2x_2^{2011}$$

και $x_1<x_2\Rightarrow 5x_1<5x_2\Rightarrow 5x_1-7<5x_2-7$ άρα

$$2x_1^{2011}+5x_1-7<2x_2^{2011}+5x_2-7\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Εξάλλου $f(1)=2+5-7=0$ και επομένως: $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$

iii. Είναι: $f(1)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για κάθε $x<1$, έχουμε: $f(x)<f(1)\Rightarrow f(x)<0$
- Για κάθε $x>1$, έχουμε: $f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>0$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει: $e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$

Άρα $D_f=\left[\ln 2,+\infty\right)$.

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in[\ln 2,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}-2<e^{x_2}-2 \Rightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}<\sqrt{e^{x_2}-2} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{e^{x_1}-2}<4\sqrt{e^{x_2}-2} \Rightarrow 4\sqrt{e^{x_1}-2}+3<4\sqrt{e^{x_2}-2}+3 \Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$. Οπότε αφού η f είναι και συνεχής (πράξεις συνεχών) το σύνολο τιμών της είναι:

$$f\left(\left[\ln 2,+\infty\right)\right)=\left[f\left(\ln 2\right),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Έχουμε:

$$f(\ln 2)=4\sqrt{e^{\ln 2}-2}+3=4\cdot 0+3=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(4\sqrt{e^x-2}+3)=+\infty$$

Άρα $f\left(\left[\ln 2,+\infty\right)\right)=\left[3,+\infty\right)$

iii. Η f είναι 1-1 ως γνήσια αύξουσα (ii) και επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in\left[\ln 2,+\infty\right)$ έχουμε: $f(x)=y \Leftrightarrow$

$$4\sqrt{e^x-2}+3=y \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{e^x-2}=\dfrac{y-3}{4} \\ \dfrac{y-3}{4}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x-2=\left(\dfrac{y-3}{4}\right)^2 \\ y\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\left[\dfrac{(y-3)^2}{4}+2\right] \\ y\geq 3 \end{cases}.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{(x-3)^2}{4}+2\right)$ με $D_{f^{-1}}=\left[3,+\infty\right)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x)=2$.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει:

$$\left\{\begin{array}{c} x-1\geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-1}+1>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ άρα } D_f=[1,+\infty)$$

ii. Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln(\sqrt{x_1-1}+1)+3=2\ln(\sqrt{x_2-1}+1)+3\Rightarrow$$

$$2\ln\sqrt{x_1-1}=2\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow$$

$$\ln\sqrt{x_1-1}=\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι "1-1".

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3\Leftrightarrow \frac{y-3}{2}=\ln(\sqrt{x-1}+1)\Leftrightarrow$$

$e^{\frac{y-3}{2}}=\sqrt{x-1}+1\Leftrightarrow\left(e^{\frac{y-3}{2}}-1\right)^2=x-1$, πρέπει $e^{\frac{y-3}{2}}-1\geq 0$, επομένως

$$x=(e^{\frac{y-3}{2}}-1)^2+1,\ y\geq 3.$$

Άρα $f^{-1}(x)=(e^{\frac{x-3}{2}}-1)^2+1,\ x\in[3,+\infty)$

iv. $f^{-1}(1+x)=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x+1-3}{2}}-1)^2+1=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x-2}{2}}-1)^2=1 \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}-1=1$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}-1=-1) \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}=2$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}=0$ αδύνατον$) \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=\ln 2 \Leftrightarrow x=2\ln 2+2$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2$.

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x\in\mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x+2^x<1$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε x_1,x_2 με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

και $x_1<x_2\Rightarrow -3x_1>-3x_2\Rightarrow -3x_1+2>-3x_2+2$

άρα $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-3x_1+2>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-3x_2+2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2\right]=$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\lim\limits_{x\to-\infty}x+2=+\infty-(-\infty)-2=+\infty$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2\right]=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\lim\limits_{x\to+\infty}x+2=0-\infty+2=-\infty$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

Επειδή $2011 \in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Η ανίσωση γίνεται:

$$3x2^x + 2^x < 1 \Leftrightarrow 3x + 1 < \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 > 3 \Leftrightarrow f(x) > 3 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$$

(αφού $f(0) = 3$) και f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x^{2011}+2x-5,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x=1$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^{2011}<x_2^{2011} \Rightarrow 3x_1^{2011}<3x_2^{2011}$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-5<2x_2-5$.

Άρα $3x_1^{2011}+2x_1-5<3x_2^{2011}+2x_2-5 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε: $f(1)=0$ άρα $x=1$ ρίζα της $f(x)=0$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

iii. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και $x=1$ η μοναδική της ρίζα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)<f(1)=0$, ενώ για κάθε $x>1$ ισχύει $f(x)>f(1)=0$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{f(x)}=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{4x+3}=-\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(3x+4)\right]=+\infty$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε $\dfrac{2x-1}{f(x)}=g(x)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$ είναι $g(x)\neq 0$ για τιμές κοντά στο 1.

Επίσης: $\dfrac{2x-1}{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x-1}{g(x)}$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\left[(2x-1)\dfrac{1}{g(x)}\right]=0$

ii. Θέτουμε: $\dfrac{f(x)}{4x+3}=h(x)$, οπότε $f(x)=(4x+3)h(x)$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=-\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(4x+3)h(x)\right]=7\cdot(-\infty)=-\infty$

iii. Θέτουμε:

$f(x)(3x+4)=\kappa(x)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\kappa(x)=+\infty$

Επίσης $3x+4\neq 0$ για τιμές κοντά στο 1, οπότε $f(x)=\dfrac{k(x)}{3x+4}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{3x+4}k(x)\right]=\dfrac{1}{7}(+\infty)=+\infty$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[1,5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$$

Λύση

i. Είναι: $f(1)=8$ και $f(5)=12$ και αφού γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ($1<5$ και $f(1)<f(5)$).

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,5]$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f([1,5]) = [f(1), f(5)] = [8,12]$$

$$\frac{29}{3} \in f([1,5])$$

iii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$.
Έτσι έχουμε:

$$1<2<5 \Leftrightarrow f(1)<f(2)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(2)<12 \Leftrightarrow 16<2f(2)<24$$

$$1<3<5 \Leftrightarrow f(1)<f(3)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(3)<12 \Leftrightarrow 24<3f(3)<36$$

$$1<4<5 \Leftrightarrow f(1)<f(4)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(4)<12 \Leftrightarrow 32<4f(4)<48$$

οπότε:

$$72 < 2f(2)+3f(3)+4f(4) < 108 \Leftrightarrow$$

$$8 < \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9} < 12$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο ώστε:
$f(x_0) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$ και αφού f γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδικό.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(3e^x+1)-2$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2$.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $3e^x+1>0$ που αληθεύει για κάθε $x\in R$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι: $D_f=\mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1}<3e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1}+1<3e^{x_2}+1 \Rightarrow$$

$$\ell n(3e^{x_1}+1)<\ell n(3e^{x_2}+1) \Rightarrow \ell n(3e^{x_1}+1)-2<\ell n(3e^{x_2}+1)-2 \Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow y+2=\ell n(3e^x+1) \Leftrightarrow e^{y+2}=3e^x+1 \Leftrightarrow$$

$$e^x=\frac{e^{y+2}-1}{3}, \frac{e^{y+2}-1}{3}>0 \text{ οπότε } x=\ell n\frac{1}{3}(e^{y+2}-1), y>-2.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\frac{1}{3}(e^{x+2}-1), x\in(-2,+\infty)$

iv. Έχουμε:

$$f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2 \Leftrightarrow \ln\left(3e^x+1\right)-2<\ln\frac{1}{3}\left(e^{\ln 5}-1\right)-2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(3e^x+1\right)<\ln\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3e^x+1<\frac{4}{3} \Leftrightarrow 9e^x+3<4 \Leftrightarrow$$

$$e^x<\frac{1}{9} \Leftrightarrow x<\ln\frac{1}{9} \Leftrightarrow x<-\ln 9$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$

iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -2{x_1}^3 > -2{x_2}^3$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 - 1 > -3x_2 - 1$$

άρα

$$-2{x_1}^3 - 3x_1 - 1 > -2{x_2}^3 - 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. $f^{-1}(x) = 2 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = f(2) \Leftrightarrow x = -23$

iv. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x + 1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) \geq f\left(x+1\right) \Leftrightarrow$$

$$x \geq -2\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) - 3\left(x+1\right) - 1 \Leftrightarrow$$

$2x^3 + 6x^2 + 10x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow$ (Σχήμα Horner)

$\left(x+1\right)\cdot\left(2x^2 + 4x + 6\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (αφού $2x^2 + 4x + 6 > 0$ διότι $\Delta = 16 - 48 = -32 < 0$)

Άσκηση 11

Δίνεται η $1-1$ συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(f(x))+f(x)=3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=3$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=3$

iv. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f\left(x\right)\right)+f(x)-2}$

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(1)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$f\left(f\left(f^{-1}(1)\right)\right)+f\left(f^{-1}(1)\right)=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow$$

$$f(1)+1=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow 4-2=3f^{-1}(1)\Leftrightarrow f^{-1}(1)=\frac{2}{3}$$

ii. Για $x=1$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f\left(f(1)\right)+f(1)=3\cdot1+2\Leftrightarrow f(3)+3=5\Leftrightarrow f(3)=2$$

iii. Είναι:

$f^{-1}(x)=3\Leftrightarrow x=f(3)\Leftrightarrow x=2$ (από ii)

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f(x)\right)+f(x)-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{3x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

αφού είναι: $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{|x|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. Όμοια και για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}\Leftrightarrow f(x)=(x^2-1)g(x)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1).$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[g(x)(x^2-1)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1)\right]=1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

Άρα η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left[3f(x)-2\right]=1>0$, οπότε $3f(x)-2>0$, κοντά στο x_0

Άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)g(x)+3\sqrt{x}-3\eta\mu(x-1)-3}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[3g(x)\right]+\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)(x+1)}-3\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=6+\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{3}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=$$

$$=6+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=\frac{21}{4}$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln\dfrac{x+1}{1-x}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει:

$$\frac{x+1}{1-x}>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=(-1,1)$

ii. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f_2 και f_1 με $f_1(x)=2\ln x+3$ και $f_2(x)=\dfrac{x+1}{1-x}$, αφού για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει:

$$(f_1 o f_2)(x)=f_1(f_2(x))=2\ln f_2(x)+3=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in(-1,1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3=2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3\Rightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2}\Rightarrow$$

$$x_1-x_1x_2+1-x_2=x_2+1-x_1x_2-x_1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

- Είναι:

$$f(x)=y\Rightarrow y=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\Rightarrow \frac{x+1}{1-x}=e^{\frac{y-3}{2}}\Rightarrow$$

$$x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-x\cdot e^{\frac{y-3}{2}} \Rightarrow (1+e^{\frac{y-3}{2}})\cdot x=e^{\frac{y-3}{2}}-1 \Rightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}$$

Επειδή:

$$-1<x<1 \Rightarrow -1<\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1 \Rightarrow \frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1$$

και $\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}>-1$

ή $-1<1$ και $2e^{\frac{y-3}{2}}>0$ που αληθεύουν για κάθε $y\in\mathbb{R}$, παίρνουμε:

$$f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{e^{\frac{x-3}{2}}+1}, x\in\mathbb{R}$$

- Η f^{-1} είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=e^{\frac{x-3}{2}}-1$ και $f_2(x)=e^{\frac{x-3}{2}}+1$. Η f_1 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $g_1(x)=e^x-1$ και $g_2(x)=\frac{x-3}{2}$

  Πράγματι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει:

  $$\left(g_1 o g_2\right)(x)=g_1\left(g_2\left(x\right)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}-1=f_1(x)$$

  Η f_2 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $h_1(x)=e^x+1$ και $h_2(x)=\frac{x-3}{2}$.

  Πράγματι για κάθε $x\in R$, ισχύει:

  $$\left(h_1 o h_2\right)(x)=h_1\left(h_2(x)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}+1=f_2(x)$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3)$$

Αν θέσουμε $u=\frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x\to 1^- \Leftrightarrow u\to +\infty$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to +\infty} (2\ln u + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3 \right)$$

Αν θέσουμε $u = \frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x \to -1^+ \Leftrightarrow u \to 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to 0} \left(2\ln u + 3 \right) = -\infty$$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\ln\dfrac{x+2}{2-x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

ii. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(hog)(x)=x$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η g , πρέπει: $\dfrac{x+2}{2-x}>0\Leftrightarrow x\in(-2,2)$. Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το:

$D_g=(-2,2)$.

Επίσης έχουμε: $D_f=\mathbb{R}^*$ οπότε το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\ell n\frac{x+2}{2-x}\neq 0\right\}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\frac{x+2}{2-x}\neq 1\right\}=$$

$$\{x\in(-2,2)\,/\,x\neq 0\}=(-2,0)\cup(0,2).$$

ii. Ισχύει $(hog)(x)=x\Leftrightarrow h(g(x))=x\Leftrightarrow h\left(\ln\dfrac{x+2}{2-x}\right)=x$ (1)

Θέτουμε $u=\ln\dfrac{x+2}{2-x}$, οπότε έχουμε:

$u=\ln\dfrac{x+2}{2-x}\Leftrightarrow\dfrac{x+2}{2-x}=e^u\Rightarrow 2e^u-xe^u=x+2\Rightarrow x=\dfrac{2e^u-2}{e^u+1}$ αφού $e^u+1\neq 0$, για κάθε $u\in\mathbb{R}$.

Άρα η (1) γίνεται: $h(u)=\dfrac{2e^u-2}{e^u+1}$ ή $h(x)=\dfrac{2e^x-2}{e^x+1}$.

iii.

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $h(-x)=\dfrac{2e^{-x}-2}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{2}{e^x}-2}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{2-2e^x}{1+e^x}=-\dfrac{2e^x-2}{1+e^x}=-h(x).$

  Άρα η h περιττή.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

Τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-1,5)$ και $g(x) \neq 0$ στο $(-1,5)$ αφού -1 και 5 είναι διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,5)$. Επίσης $g(2) = -1 < 0$. Οπότε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) Είναι: $f(2) = -1 < 0$. Άρα από α) είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(3) < 0$. Επίσης από β) $g(2) < 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(3)}{g(2)} \cdot x \right) = -\infty$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x)=2x^4+3\ln x+1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^4<{x_2}^4\Rightarrow 2{x_1}^4<2{x_2}^4$ και

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1<3\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1+1<3\ln x_2+1$

άρα $2{x_1}^4+3\ln x_1+1<2{x_2}^4+3\ln x_2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x^4+3\ln x+1)=0-\infty+1=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(2x^4+3\ln x+1)=(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty$

Επομένως είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

iv. Έχουμε:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^4+1=3(\ln 1-\ln\lambda)\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4+1=-3\ln\lambda\Leftrightarrow 2\lambda^4+3\ln\lambda+1=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda)=0$. Αυτό ισχύει αφού $0\in f((0,+\infty))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x)-3=2x-3f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. $2f^3(x)-3=2x-3f(x)\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ είναι $2f^3(x_0)+3f(x_0)=2x_0+3$.

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2\left[f^3(x)-f^3(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$2\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{2(x-x_0)}{2\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3}$$

Αφού $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3\neq 0,$ διότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα:

$$\Delta=4f^2(x_0)-4\cdot 2(2f^2(x_0)+3)=4f^2(x_0)-16f^2(x_0)-24=$$

$$-12f^2(x_0)-24=-12\left[f^2(x_o)+2\right]<0$$

Άρα: $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{2\left|x-x_0\right|}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}\leq 2\left|x-x_0\right|$.

Οπότε $-2\left|x-x_0\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq 2\left|x-x_0\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-2\left|x-x_0\right|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[2\left|x-x_0\right|\right]=0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,.$$

ii. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha=f(x)$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha=f(x)\Leftrightarrow f(x)-\alpha=0\Leftrightarrow \left(f(x)-\alpha\right)\underbrace{\left(2\left(\overbrace{f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2}^{*}\right)+3\right)}_{>0}=0\,, \quad \textbf{(1)}$$

(*) την παράσταση $f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f(x)$ έτσι έχουμε $\Delta=-3\alpha^2\le 0\Rightarrow f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2\ge 0\Rightarrow f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2+3\ge 3>0$

$$(1)\Leftrightarrow 2\left(f^3(x)-\alpha^3\right)+3\left(f(x)-\alpha\right)=0\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow$$

$2x+3=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha-3}{2}$, δηλαδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$.

Επίσης $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2\,.$$

Άρα η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f που είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι: $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

Οπότε: $2f^3(x)+3f(x)=2x+3\Leftrightarrow 2y^3+3y=2f^{-1}(y)+3$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+3x-3}{2},\ x\in\mathbb{R}$

iii. $f(x)=0\Leftrightarrow x=f^{-1}(0)=\dfrac{2\cdot 0^3+3\cdot 0-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

iv. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και η f, οπότε τα κοινά τους σημεία είναι στην $y=x$.

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow \frac{2x^3+3x-3}{2}=x$$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x - 3 = 2x \Leftrightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

<u>Παρατήρηση</u>: Τις προτάσεις

Α) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, (αν υπάρχουν), βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.

<u>Πρέπει να τις αποδεικνύουμε για να τις χρησιμοποιήσουμε σε μία άσκηση.</u>

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x)-\eta\mu f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι $|2f(x)-x|\le|f(x)|$.

2.Να αποδείξετε ότι $|f(x)|\le|x|$.

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

4.Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{f(x)}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

<u>Λύση</u>

1. Από την υπόθεση έχουμε:

$2f(x)-\eta\mu f(x)=x\Rightarrow 2f(x)-x=\eta\mu f(x)\Rightarrow|2f(x)-x|=|\eta\mu f(x)|\le|f(x)|$ **(1)**

2. Ισχύει

$$||2f(x)|-|x||\le|2f(x)-x|\overset{(1)}{\le}|f(x)|\Rightarrow||2f(x)|-|x||\le|f(x)|\Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow -|f(x)|\le\underline{|2f(x)|-|x|\le|f(x)|}\Rightarrow|2f(x)|-|f(x)|\le|x|\Rightarrow|f(x)|\le|x|$$

3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $|f(x)|\le|x|\Rightarrow-|x|\le f(x)\le|x|$, **(2)** όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, οπότε η **(2)** από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

4. Θέτουμε $f(x)=u$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, τότε $u\to 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{f(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

$$2f(x)-\eta\mu f(x)=x\Rightarrow 2\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=1.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=2-1=1\neq 0$, οπότε για x κοντά στο 0 θα ισχύει:

$$\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}=1.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x+1)=3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x+5)\le 0$.

<u>Λύση</u>

i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και με $-1<2$ είναι $f(-1)=0<f(2)=3$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι: $f(-1)=0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) η τιμή που μηδενίζει την f είναι μοναδική. Επομένως για:

$$x<-1\Rightarrow f(x)<f(-1)\Rightarrow f(x)<0$$

$$x>-1\Rightarrow f(x)>f(-1)\Rightarrow f(x)>0.$$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

iii. Αφού η f είναι 1-1 έχουμε:

$$f(2e^x+1)=3\Leftrightarrow f(2e^x+1)=f(2)\Leftrightarrow 2e^x+1=2\Leftrightarrow$$

$$2e^x=1\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

iv. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(3x+5)\le 0\Leftrightarrow f(3x+5)\le f(-1)\Leftrightarrow 3x+5\le -1\Leftrightarrow 3x\le -6\Leftrightarrow x\le -2.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x+1}{x-1}=2017.$
- $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1.
- $f(x)=f(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τον αριθμό $f(1)$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.
4. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2g(x)=3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

<u>Λύση</u>

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-2x+1}{x-1}=h(x)\overset{x\neq 1}{\Rightarrow}f(x)=(x-1)h(x)+2x-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=2017$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)h(x)+2x-1]=0\cdot 2017+2-1=1$. Άρα $f(1)=1$.

2. Αφού η σχέση $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτοντας $x=1$ παίρνουμε:
$|g(1)-2|\le|f(1)-1|=0\Rightarrow g(1)-2=0\Rightarrow g(1)=2$.

Επίσης έχουμε:
$|g(x)-2|\le|f(x)-1|\Leftrightarrow -|f(x)-1|\le g(x)-2\le|f(x)-1|\Leftrightarrow 2-|f(x)-1|\le g(x)\le 2+|f(x)-1|$ **(1)**.
Όμως χρησιμοποιώντας ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=1$, έχουμε:
$\lim\limits_{x\to 1}(2-|f(x)-1|)=\lim\limits_{x\to 1}(2+|f(x)-1|)=2$, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής η **(1)** μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2=g(1)$. Άρα η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.

3. Αφού η σχέση $f(x)=f(x+1)$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτοντας $x=1$ παίρνουμε:
$f(2)=f(1)=1$.

Έχουμε: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(x+1)\overset{\text{Θέτω: } x+1=u,\text{ όταν } x\to 1 \text{ τότε } u\to 2}{=}\lim\limits_{u\to 2}f(u)$, οπότε
$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1=f(2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=x^2g(x)-3$ που είναι συνεχής στο $[1,2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
Επίσης για x=2 η σχέση $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$ μας δίνει: $|g(2)-2|\le|f(2)-1|=0\Rightarrow g(2)=2$.
Έχουμε: $t(1)=1^2g(1)-3=2-3=-1<0$ και $t(2)=2^2g(2)-3=4\cdot2-3=5>0$, οπότε $t(1)t(2)<0$. Άρα ισχύει το Θ.Bolzano οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $t(\xi)=0\Rightarrow\xi^2g(\xi)=3$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
3. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
   a. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
   b. Ισχύει: $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

1. Αφού η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, θέτουμε $x=y=0$ έτσι έχουμε: $f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

2. Έστω $x\in\mathbb{R}$, τότε και $-x\in\mathbb{R}$.Θέτουμε στη σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ όπου $y=-x$ και παίρνουμε:

$f(x-x)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$,
άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

3.
a. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. **(1)**
Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $x=x_1$ και $y=-x_2$ γίνεται

$f(x_1-x_2)=f(x_1)+f(-x_2)\Leftrightarrow f(x_1-x_2)=f(x_1)-f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1-x_2)=0$.
Αφού όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, θα είναι υποχρεωτικά $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

b. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x=f^{-1}(\alpha)$, $f(y)=\beta\Leftrightarrow y=f^{-1}(\beta)$, έτσι έχουμε
$\alpha+\beta=f(x)+f(y)=f(x+y)\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\beta)=x+y\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\beta)=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)$
Άρα $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Αν ρ ρίζα της $f(x)=0$, τότε έχουμε:
$3\rho^2+4f^2(\rho)=27\Leftrightarrow \rho^2=9\Leftrightarrow \rho=3$ ή $\rho=-3$.

ii. Επειδή η συνάρτηση f, ως συνεχής στο $[-3,3]$, είναι συνεχής στο $(-3,3)$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

iii.

- Αν $f(x)<0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=-\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

- Αν $f(x)>0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

iv. $f(1)=\sqrt{6}>0$ άρα από το ερώτημα (Γ3) έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},x\in[-3,3].$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27-3x^2}-3\sqrt{3}}{2x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{27-3x^2-27}{2x(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=0$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8 ημ\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε:

i. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}x^7 ημ\frac{2}{x}$.

iii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x+9-9}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(x+2\right)}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=\frac{1}{6}$

ii. Επειδή $\left|ημ\frac{2}{x}\right|\le 1$ για κάθε $x\ne 0$, έχουμε:

$\left|x^7 ημ\frac{2}{x}\right|=\left|x^7\right|\cdot\left|ημ\frac{2}{x}\right|\le\left|x^7\right|\Leftrightarrow-\left|x^7\right|\le x^7 ημ\frac{2}{x}\le\left|x^7\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^7\right|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left|x^7\right|=0$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^7 ημ\frac{2}{x}\right)=0$

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8 ημ\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} \le f(x) \le \frac{x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}}{x}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}=\frac{1}{3}$ (από i ερώτημα).

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right)=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ (από ii ερώτημα)

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{3}$

iv. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι συνεχής και στο $x=0$. Άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=5$.

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2$.

Λύση

i. Η σχέση $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε για $x=2$ έχουμε:

$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1\Leftrightarrow f(5)+10=5\Leftrightarrow f(5)=-5$

ii. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$

άρα $f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

iii. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$f(f(f^{-1}(2)))+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$

$5+4-1=2f^{-1}(2)\Rightarrow f^{-1}(2)=4$.

iv. Έχουμε:

$f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2\Leftrightarrow f^{-1}(2x^2+7x)-1=f^{-1}(2)\Leftrightarrow$

$f^{-1}(2x^2+7x)=5\Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5)\Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0\Leftrightarrow$

$x_1=-1$ ή $x_2=-\dfrac{5}{2}$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$ με $0<\alpha<\beta$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\alpha+\beta$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$, έχει ακριβώς μια λύση στο (α,β).

<u>Λύση</u>

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και $0<\alpha<\beta\Leftrightarrow 2\alpha<2\beta \overset{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow} f(\beta)<f(\alpha)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\alpha-\beta$, η οποία είναι συνεχής (f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ γιατί αν,

$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-\alpha-\beta>f(x_2)-\alpha-\beta\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$.

Οπότε το σύνολο τιμών της g είναι

$g([\alpha,\beta])=[g(\beta),g(\alpha)]=[f(\beta)-\alpha-\beta,f(\alpha)-\alpha-\beta]=[\alpha-\beta,\beta-\alpha]$ και επειδή το

$0\in\left[\underset{-}{\alpha-\beta},\underset{+}{\beta-\alpha}\right]$, τότε υπάρχει ακριβώς ($g$ γνησίως φθίνουσα) ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε

$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha+\beta$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής (αφού f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ γιατί αν,

$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)>f(x_2)$ **(1)** και $x_1<x_2\Leftrightarrow -2x_1>-2x_2$ **(2)**.

Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** έχουμε: $f(x_1)-2x_1>f(x_2)-2x_2\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$

Οπότε το σύνολο τιμών της h είναι

$h([\alpha,\beta])=[h(\beta),h(\alpha)]=[f(\beta)-2\beta,f(\alpha)-2\alpha]=[2(\alpha-\beta),2(\beta-\alpha)]$ και επειδή το

$0\in\left[\underbrace{2(\alpha-\beta)}_{-},\underbrace{2(\beta-\alpha)}_{+}\right]$, τότε υπάρχει ακριβώς ($h$ γνησίως φθίνουσα) ένα $x_1\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $h(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=2x_1$.

Άσκηση 12

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)g(x)=-e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Αν $f(2017)>0$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και g.

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2017)x^4+3x^3+1}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3+\left(\theta-1\right)x-1}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

3. Αν $f(1)<e$ και $g(-2)>-2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in\left(-2,1\right)$.

<u>Λύση</u>

1. Είναι $f(x)g(x)=-e^x<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως οι συναρτήσεις f,g δεν έχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι και συνεχείς θα διατηρούν σταθερό πρόσημο, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και μάλιστα ετερόσημες.

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή $f(2017)>0$, θα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η $g(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2. Αφού $g(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $g(2017)<0$.

- Αν $\theta=0$ τότε $|\eta\mu\vartheta|=|\vartheta|\Leftrightarrow|\vartheta|-|\eta\mu\vartheta|=0$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(2017)x^4+3x^3+1}{-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(2017)x^4}{-x}=-g(2017)\lim_{x\to+\infty}x^3=-g(2017)(+\infty)\overset{g(2017)<0}{=}+\infty$$

- Αν $\theta\neq0$ τότε $|\eta\mu\vartheta|<|\vartheta|\Leftrightarrow|\vartheta|-|\eta\mu\vartheta|>0$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(2017\right)x^4+3x^3+1}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3+\left(\theta-1\right)x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(2017\right)x^4}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3}=\frac{g\left(2017\right)}{|\theta|-|\eta\mu\theta|}\lim_{x\to+\infty}x=$$
$$=\frac{g\left(2017\right)}{|\theta|-|\eta\mu\theta|}(+\infty)\underset{|\theta|-|\eta\mu\theta|>0}{\overset{g(2017)<0}{=}}-\infty.$$

3. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\left(-2,1\right)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=g(x)-x$, η οποία είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) στο $\left[-2,1\right]$.

Είναι $h(1)=g(1)-1<-1-1=-2<0,$ γιατί: $f(1)g(1)=-e\Leftrightarrow g(1)=\dfrac{-e}{f(1)}<-1$ αφού

$f(1)<e\Leftrightarrow\dfrac{e}{f(1)}>1\Leftrightarrow-\dfrac{e}{f(1)}<-1$.

Επίσης $h(-2)=g(-2)+2>-2+2=0\Leftrightarrow h(-2)>0$.

Άρα η h είναι συνεχής στο $\left[-2,1\right]$ και $h(-2)h(1)<0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(-2,1\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=x_0$.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R},\ \alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha<2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha>3$

Λύση

i. Είναι $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1=\left(\alpha^x+1\right)^2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή $f(0)=-2$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)=-\left(\alpha^x+1\right)=-\alpha^x-1$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-1\right]}{3^x\cdot\left[3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+4\right]}=\dfrac{-1}{4}$, αφού $0<\dfrac{\alpha}{3}<1, 0<\dfrac{1}{3}<1$ και $0<\dfrac{2}{3}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\cdot\left[-2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x-2\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{2^x\left[3+4\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}=-\infty$, αφού $\dfrac{\alpha}{2}>1,\dfrac{3}{2}>1$ και $0<\dfrac{1}{2}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

Λύση

i. Η σχέση $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$, έχουμε:

$$1\le 4f(0)\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$$

Για $x=1$, έχουμε:

$$2\le 4f(1)\le 3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$$

ii.Για $x\ne 0$, θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4+1\le 4f\left(\frac{1}{x}\right)\le\left(\frac{1}{x}\right)^4+2\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\le x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{4}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4\right)=\frac{1}{4}$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\frac{\eta\mu 3x}{x}}{2x+3\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{\frac{1}{4}+4\cdot 3}{0+3}=\frac{49}{12}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$ (από ii), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$

iv. Έστω $g(x)=f(x)-x$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης ισχύει:

$g(0)\cdot g(1)=f(0)\cdot[f(1)-1]<0$ αφού $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)>0$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}\Rightarrow f(1)<1$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε
$g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0$

Άσκηση 15

i.Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-4}{x}=2,$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2x+x^2g(x)}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $h(x)=\dfrac{2f(x)-4}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{xh(x)+4}{2}$

Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xh(x)+4}{2}=2$$

ii. Είναι:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε: $xg(x)\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2$

- Αν $x>0$, τότε: $g(x)\le\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\le\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και

  επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 0.$

- Αν $x<0$, τότε: $g(x)\ge\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\ge\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και επομένως

  $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\epsilon\phi^2x+x^2g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left[f^2(x)+\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}\right]}{x^2\left[\left(\dfrac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2+g(x)\right]}=\frac{4+4}{1+0}=8.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}4\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{(2x)^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu(2x)}{(2x)}\right)^2=4\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^2=4$ και

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$$

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(2e^{x-1}\right)=f\left(3-x\right)$.

Λύση

i. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha=f\left(x\right)$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha=f\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-\alpha=0\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)-\alpha\right)\left(\underbrace{2\left(\overbrace{f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2}^{*}\right)+3}_{>0}\right)=0,\ \textbf{(1)}$$

(*) την παράσταση $f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f\left(x\right)$ έτσι έχουμε $\Delta=-3\alpha^2\le0\Rightarrow f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2\ge0\Rightarrow f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2+3\ge3>0$

$\left(1\right)\Leftrightarrow 2f^3\left(x\right)-2\alpha^3+3f\left(x\right)-3\alpha=0\Leftrightarrow 2f^3\left(x\right)+3f\left(x\right)=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow$

$4x+1=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha-1}{4}$, δηλαδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$

και $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$

άρα $2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 4x_1+1=4x_2+1$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$3f\left(f^{-1}(x)\right)+2\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$

$3x+2x^3=4f^{-1}(x)+1 \Rightarrow$

$$f^{-1}(x)=\frac{2x^3+3x-1}{4}.$$

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3<2x_2^3$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2 \Rightarrow 3x_1-1<3x_2-1$

άρα

$$2x_1^3+3x_1-1<2x_2^3+3x_2-1 \Rightarrow \frac{2x_1^3+3x_1-1}{4}<\frac{2x_2^3+3x_2-1}{4} \Rightarrow$$
$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$,

οπότε f^{-1} γνησίως αύξουσα.

iii. Έχουμε:

$f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow$

$$\frac{2x^3+3x-1}{4}=x \Leftrightarrow 2x^3-x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

iv. Η f είναι $1-1$, οπότε έχουμε:

$f(2e^{x-1})=f(3-x) \Leftrightarrow 2e^{x-1}=3-x \Leftrightarrow 2e^{x-1}+x-3=0$ (1)

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x=1$.

Έστω $g(x)=2e^{x-1}+x-3$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1-1<x_2-1 \Rightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1} \Rightarrow 2e^{x_1-1}<2e^{x_2-1}$

και $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-3<x_2-3$

άρα $2e^{x_1-1}+x_1-3<2e^{x_2-1}+x_2-3 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Οπότε g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει
$f^2(x)+4\eta\mu^2 x = x^2-3x+4f(x)\eta\mu x+10$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(0)=\sqrt{10}$.
iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1-\sqrt{10}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$f^2(x)+4\eta\mu^2 x = x^2-3x+4f(x)\eta\mu x+10 \Leftrightarrow$
$\left[f(x)-2\eta\mu x\right]^2 = x^2-3x+10>0,$ (1) γιατί $\Delta=9-40=-31<0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο $x^2-3x+10$ είναι ομόσημο του $1>0$. Οπότε $f(x)-2\eta\mu x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού η $g(x)=f(x)-2\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

ii. Είναι: $f(0)=\sqrt{10}$, οπότε $g(0)=f(0)-2\eta\mu 0=f(0)=\sqrt{10}>0$ και από (i) έχουμε:
$g(x)>0\Leftrightarrow f(x)-2\eta\mu x>0$. Άρα $f(x)-2\eta\mu x=\sqrt{x^2-3x+10}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2-3x+10}+2\eta\mu x$.

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{10}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+10}+2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{10}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}+2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)\overset{(*)}{=}-\frac{3\sqrt{10}}{20}+2+0=-\frac{3\sqrt{10}}{20}+2\,.$$

$$(*)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}}\right)=\frac{-3}{2\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$(*)\lim_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}\right)=2\cdot 1=2\,,\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=0$$

Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

ii. Να ορισθεί η συνάρτηση fog.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης fofog.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=[-1,+\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το: $D_g=\mathbb{R}$ (πολυωνυμική)

ii. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}/2-x\geq -1\}=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 3\}=(-\infty,3]\neq\varnothing$$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,3]$ έχουμε:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{3-x}-1$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1=\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}-1\Leftrightarrow y+1=\sqrt{x+1}$, (πρέπει $y\geq -1$) $\Leftrightarrow x=(y+1)^2-1$ οπότε $f^{-1}(x)=(x+1)^2-1$ με $x\geq -1$

iv. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$D_{fofog} = D_{fo(fog)} = \left\{ x \in (-\infty, 3] / \sqrt{3 - x} - 1 \geq -1 \right\} = (-\infty, 3] \neq \varnothing$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με

$x_1 < x_2 \overset{\text{g γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} g(x_1) > g(x_2) \overset{\text{f γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$

$f\left(f\left(g\left(x_1\right)\right)\right) > f\left(f\left(g\left(x_2\right)\right)\right)$.

Άρα η συνάρτηση fofog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0\\[2ex] \lambda, & x=0\\[2ex] \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0\end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$

f : συνεχής στο $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+\kappa\cdot\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\frac{2+\kappa\cdot 1}{1}=2+\kappa$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=4$$

$f(0)=\lambda$

Άρα: $\lambda=4$ και $2+\kappa=4 \Leftrightarrow \kappa=2$

ii. Για $\kappa=2$ και $\lambda=4$ έχουμε: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0\\[2ex] 4, & x=0\\[2ex] \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0\end{cases}$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x+16-9x^2}{\sqrt{8x^2+x+16}+3x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}+3\right)}=\left(+\infty\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{8}+3}\right)=-\infty$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2\etaμx}{x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+2\frac{\etaμx}{x}}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\left(2+2\frac{\etaμx}{x}\right)\right]=0,$$

αφού: $\left|\frac{\etaμx}{x}\right|=\frac{|\etaμx|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow\frac{-1}{|x|}\le\frac{\etaμx}{x}\le\frac{1}{|x|}$

και $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\etaμx}{x}=0$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2\ln(8x+1),\ x\in\left[0,1\right]$

Η g είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών)

Επίσης:

$g(0)=f(0)=4>0$

$g(1)=f(1)-2\ln 9=2-2\ln 9=2\ln\frac{e}{9}<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\\ \\ \dfrac{\kappa x+1}{2(x^2-4)}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$ και η $g:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$

για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot g(x)+2x}{3x}=5$ και $g(x+3)=g(x)+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε:

i. Το κ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

iv. Το όριο $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)}=-\dfrac{1}{16}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\kappa x+1}{2(x-2)(x+2)}$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+1)=2\kappa+1$

και $\lim\limits_{x\to 2^+}2(x-2)(x+2)=0$

Αν $2\kappa+1\neq 0\Leftrightarrow \kappa\neq-\dfrac{1}{2}$ τότε το $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$.

Αν $2\kappa+1=0\Leftrightarrow \kappa=-\dfrac{1}{2}$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\frac{1}{2}x+1}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}.$$

Δηλαδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αν και μόνο αν $\kappa = -\frac{1}{2}$

ii. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-5x+6}{4\left(x^3-2x^2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{4x^2\left(x-2\right)} = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$h(x) = \dfrac{\eta\mu x g(x)+2x}{3x} \Leftrightarrow \eta\mu x g(x) = 3xh(x)-2x$ και για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3xh(x)-2x}{\eta\mu x} = 3\cdot 5\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} - 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 15-2=13$$

iv. Είναι: $\lim\limits_{x\to 3} g(x) \overset{x=u+3}{=} \lim\limits_{u\to 0} g(u+3) = \lim\limits_{u\to 0}\left[g(u)+f(u)\right] = 13+(-\infty) = -\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=-2x^5-2kx^3+2k^5$, $x\in\mathbb{R}$ και $k>0$.
α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,k)$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-f(x)+2k^5}{\eta\mu^3x}=\lambda^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(k,\lambda)$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^5<x_2^5\Rightarrow -2x_1^5>-2x_2^5$ **(1)** και

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\overset{-2k<0}{\Rightarrow}-2kx_1^3>-2kx_2^3\Rightarrow -2kx_1^3+2k^5>-2kx_2^3+2k^5$. **(2)**

Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** έχουμε: $-2x_1^5-2kx_1^3+2k^5>-2x_2^5-2kx_2^3+2k^5\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.
Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^5-2kx^3+2k^5)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^5)=-2(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^5-2kx^3+2k^5)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^5)=-2(-\infty)=+\infty$$

Επομένως είναι: $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$

γ) Για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0,k]$, ισχύουν:

- $f(0)=2k^5>0$
- $f(k)=-2k^5-2k^4+2k^5=-2k^4<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,k)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα είναι μοναδική.

δ)

$$\lim_{x\to0}\frac{-f(x)+2k^5}{\eta\mu^3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^5+2kx^3-2k^5+2k^5}{\eta\mu^3x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3(2x^2+2k)}{\eta\mu^3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2k}{\frac{\eta\mu^3 x}{x^3}}=2k=\lambda^2$$, αφού $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

Δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων $M(k,\lambda)$, ικανοποιούν την εξίσωση: $y^2=2x$.

Άρα ανήκουν σε μία παραβολή με εξίσωση $y^2=2x$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln 2x+e^{3x}+4x-2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu$$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow \ln 2x_1<\ln 2x_2 \Rightarrow 3\ln 2x_1<3\ln 2x_2$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2 \Rightarrow e^{3x_1}<e^{3x_2}$

και

$x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1-2<4x_2-2.$

Άρα $3\ln 2x_1+e^{3x_1}+4x_1-2<3\ln 2x_2+e^{3x_2}+4x_2-2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii.Είναι:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=-\infty+1+0-2=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\ln 2x=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$, και $\lim\limits_{x\to 0} e^{3x}=\lim\limits_{u\to 0} e^{u}=1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln 2x=\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{3x}=\lim\limits_{u\to +\infty} e^{u}=+\infty$

iii. $f(x)=e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, (αφού η f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1) και η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Είναι:

$$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu \Leftrightarrow$$

$$3\ln 4\mu+e^{6\mu}+8\mu=3\ln 2(\mu^2+1)+e^{3(\mu^2+1)}+4(\mu^2+1) \Leftrightarrow$$

$$3\ln 2\cdot(2\mu)+e^{3(2\mu)}+4\cdot(2\mu)-2=3\ln 2(\mu^2+1)+e^{3(\mu^2+1)}+4(\mu^2+1)-2 \Leftrightarrow$$

$f(2\mu)=f(\mu^2+1) \Leftrightarrow \mu^2+1=2\mu \Leftrightarrow \mu=1$ (Διπλή ρίζα).

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \le \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$

- Για $x>0$, έχουμε: $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2\le 3\eta\mu x-2xf(x)\le\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow$

  $-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$

  αλλά: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

- Για $x<0$, έχουμε: $\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{3}{2}$

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{3}{2}$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}$.

ii. Η σχέση $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$ ισχύει για κάθε $x\in R$ άρα και για $x=0$ οπότε έχουμε: $4f(0)+3f(1)=-2013$. Αλλά f συνεχής οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}.$$

Άρα $4\cdot\frac{3}{2}+3f(1)=-2013 \Leftrightarrow f(1)=-673$.

iii. Αρκεί να υπάρχει $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0$
Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,1]$. Είναι:

$$h(0)=f(0)-g(0)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=-673<0$$

Οπότε: $h(0)h(1)=-\dfrac{673}{2}<0$

Επειδή η h είναι συνεχής στο [0,1], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4$, για κάθε $x\in(0,2)$.
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+1}{x}=5$.

1. Να βρείτε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(2)$.
2. Αν $g(x)=4-e^x-f(x)$, $x\in(0,2)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $t(x)=\ln(-f(x)+4)$, $x\in(0,2)$ τέμνει την $y=x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$.

Λύση

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ θα είναι συνεχής και στα άκρα 0 και 2, οπότε θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$.

- $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4\overset{x<2\Leftrightarrow x-2<0}{\Rightarrow}x+2\le f(x)\le4\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$ **(1)**

  Όμως $\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ και $\lim\limits_{x\to2}4\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\overset{x-2=u,\ x\to2\Rightarrow u\to0}{=}4\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=4$, οπότε η **(1)** από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=4$. Άρα $f(2)=4$.

- Θέτουμε $\dfrac{f(x)+1}{x}=s(x)\Rightarrow f(x)=xs(x)-1$ και $\lim\limits_{x\to0}s(x)=5$.

  Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(xs(x)-1)=0\cdot5-1=-1$. Άρα $f(0)=-1$.

2. Έστω $x_1,x_2\in(0,2)$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $x_1<x_2\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow-f(x_1)>-f(x_2)$ **(2)** και

$x_1<x_2\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow}e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow4-e^{x_1}>4-e^{x_2}$ (3).

Προσθέτοντας τις **(2)** και **(3)** έχουμε: $4-e^{x_1}-f(x_1)>4-e^{x_2}-f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,2)$.

Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής (άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,2)$, το σύνολο τιμών της θα είναι: $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to2^-}g(x),\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right)=(-e^2,4)$ γιατί

$\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(4-e^x-f(x))=4-e^2-4=-e^2$ και $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(4-e^x-f(x))=4-e^0+1=4$.

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,2)$ έτσι ώστε να ισχύει: $t(x_0)=x_0$.

Είναι:

$t(x_0)=x_0\Leftrightarrow\ln(-f(x_0)+4)=x_0\Leftrightarrow e^{x_0}=-f(x_0)+4\Leftrightarrow4-f(x_0)-e^{x_0}=0\Leftrightarrow g(x_0)=0$

Επειδή το $0 \in g(A) = \left(-e^2, 4\right)$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = \left(0, 2\right)$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, 2\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Άρα και $t(x_0) = x_0$.

Άσκηση 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x)=x^2+x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x}=-\frac{1}{2}$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)$.
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=x-f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\infty,0\right)$.

<u>Λύση</u>

1. Είναι $x^2+x+1>0$ γιατί $\Delta=-3<0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του 1>0. Άρα $f^2(x)=x^2+x+1>0\Rightarrow f^2(x)\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε: $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

2. Αφού $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\frac{1+f(x)}{x}\cdot x-1)=-\frac{1}{2}\cdot 0-1=-1<0$, θα υπάρχει x_1 (κοντά στο 0) με $f(x_1)<0$ και λαμβάνοντας υπόψη το **(1)** ερώτημα θα έχουμε $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Οπότε: $f^2(x)=x^2+x+1\Rightarrow f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. $$\lim_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

4. Αφού , $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)=-\frac{1}{2}<0$, υπάρχει ρ_1 κοντά στο $\left(-\infty\right)$ έτσι ώστε $g(\rho_1)<0$.
Αφού $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left(x-f(x)\right)=0+1=1>0$, υπάρχει ρ_2 κοντά στο 0 έτσι ώστε $g(\rho_2)>0$.
Έχουμε $g(\rho_1)g(\rho_2)<0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[\rho_1,\rho_2\right]\subseteq\left(-\infty,0\right)$, οπότε ισχύει το Θ. Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\left(\rho_1,\rho_2\right):g(x_0)=0$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1. Αν $1<f(x)<e$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2. Αν $f(0)>1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x+x\eta\mu\frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. Αν $f(k)+f(2k)=4k$, $k>0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{f(x)-k}{x-2k}=\dfrac{f(x)-2k}{x-k}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(k,2k)$.

4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g:[1,3]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-x$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[1,3]$ έτσι ώστε $g(\xi)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}-1$.

<u>Λύση</u>

1. Έστω $h(x)=f(x)-e^x$, $x\in[0,1]$.
   - Αφού η σχέση $1<f(x)<e$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θέτοντας $x=0$ και $x=1$ παίρνουμε: $1<f(0)<e$ και $1<f(1)<e$, αντίστοιχα.
   - Είναι $h(0)=f(0)-e^0>1-1=0\Rightarrow h(0)>0$ και $h(1)=f(1)-e^1<e-e=0\Rightarrow h(1)<0$, οπότε ισχύει: $h(0)h(1)<0$.
   - Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Από τα παραπάνω ισχύει το Θ.Bolzano για την h, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=e^{x_0}$.

2. Έστω $\varphi(x)=f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x}$, $x>0$ η οποία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$.

   - Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}(x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u,u\to+\infty}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$, αφού:

     $\left|\dfrac{\eta\mu u}{u}\right|\le\dfrac{1}{|u|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|u|}\le\dfrac{\eta\mu u}{u}\le\dfrac{1}{|u|}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}(-\frac{1}{|u|})=\lim\limits_{u\to+\infty}(\frac{1}{|u|})=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x})=f(0)-1-0=f(0)-1>0$. Τότε θα υπάρχει x_1 κοντά στο 0 ώστε $\varphi(x_1)>0$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u,u\to 0}{=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x})=0-(+\infty)-1=-\infty$. Τότε θα υπάρχει x_2 κοντά στο $+\infty$ ώστε $\varphi(x_2)<0$.
- Είναι $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$ και η συνάρτηση φ συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq(0,+\infty)$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subseteq(0,+\infty)$, με $x_0>0$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$.

3. Έστω $t(x)=(f(x)-k)(x-k)-(f(x)-2k)(x-2k)$, $x\in[k,2k]$, $k>0$.
- Είναι $t(k)=-(f(k)-2k)(k-2k)=k(f(k)-2k)<0$, γιατί

  $k<2k\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(k)<f(2k)=4k-f(k)\Leftrightarrow 2f(k)<4k\Leftrightarrow f(k)-2k<0$ και $k>0$.

- $t(2k)=(f(2k)-k)(2k-k)=k(f(2k)-k)>0$, γιατί:

  $k<2k\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(k)<f(2k)\Leftrightarrow f(2k)>f(k)=4k-f(2k)\Leftrightarrow 2f(2k)>4k\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(2k)>2k>k\Leftrightarrow f(2k)-k>0$ και $k>0$.
- Είναι $t(k)t(2k)<0$ και η συνάρτηση t συνεχής στο $[k,2k]$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(k,2k)$, τέτοιο ώστε $t(\xi)=0$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$. Τότε θα υπάρχει μια ελάχιστη τιμή m και μία μέγιστη τιμή M δηλαδή υπάρχουν
$x_1,x_2: m=g(x_1)\le g(x)\le g(x_2)=M$, **(1),** για κάθε $x\in[1,3]$.
Θέτουμε στην **(1)**, όπου $x=1,2,3$, έτσι έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} g(x_1)\le g(1)\le g(x_2)\\ g(x_1)\le g(2)\le g(x_2)\\ g(x_1)\le g(3)\le g(x_2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} g(x_1)\le g(1)\le g(x_2)\\ 2g(x_1)\le 2g(2)\le 2g(x_2)\\ 3g(x_1)\le 3g(3)\le 3g(x_2)\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}6g(x_1)\le g(1)+2g(2)+3g(3)\le 6g(x_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1)\le\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\le g(x_2)$$

1η Περίπτωση: Αν $g(x_1)=\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\Rightarrow\xi=x_1$

2η Περίπτωση: Αν $g(x_2)=\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\Rightarrow\xi=x_2$

3η Περίπτωση: Αν $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow g=$σταθερή, οπότε ξ είναι κάθε σημείο του διαστήματος $[1,3]$.

4η Περίπτωση: Αν $g\left(x_1\right) < \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} < g\left(x_2\right)$.

Δηλαδή το $\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} \in \left(g\left(x_1\right), g\left(x_2\right)\right)$, οπότε από Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} = \frac{f(1)-1+2f(2)-2+3f(3)-3}{6} = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - 1.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [1,3]$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - 1.$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f\left(e^{f(x)}\right)=\ln x+2$, για κάθε $x>0$ και
- $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln(\ln x+1)^2$ για κάθε $x>\frac{1}{e}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\ln(x-1)$, $x>1$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ f)(x)=f\left(e^{-x}+2\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(1+e,1+e^{3/2}\right)$.

<u>Λύση</u>

1. Έστω

$x_1,x_2>0$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\Rightarrow f(e^{f(x_1)})=f(e^{f(x_2)})\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x_1+2=\ln x_2+2\Rightarrow \ln x_1=\ln x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

2. $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln(\ln x+1)^2\Leftrightarrow f((f(e^{f(x)}))=2\ln(\ln x+1)\Leftrightarrow f(\ln x+2)=2\ln(\ln x+1)$ **(1)**

Θέτουμε: $\ln x+2=y\Leftrightarrow \ln x+1=y-1>0\Rightarrow y>1$ και η **(1)** γίνεται:

$f(\ln x+2)=2\ln(\ln x+1)\Rightarrow f(y)=2\ln(y-1)$, $y>1$. Άρα $f(x)=2\ln(x-1)$, $x>1$.

3.* Το πεδίο ορισμού της $f\circ f$ είναι:

$\{x\in A_f \text{ και } f(x)\in A_f\}=\{x>1 \text{ και } 2\ln(x-1)>1\}=\left\{x>1 \text{ και } x>1+\sqrt{e}\right\}=\left(1+\sqrt{e},+\infty\right)$

$(f\circ f)(x)=f\left(e^{-x}\right)\Leftrightarrow f(f(x))=f\left(e^{-x}+2\right)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=e^{-x}+2\Leftrightarrow 2\ln(x-1)=e^{-x}+2$

$\Leftrightarrow 2\ln(x-1)-e^{-x}-2=0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2\ln(x-1)-e^{-x}-2$ και εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στο διάστημα $\left[1+e,1+e^{3/2}\right]$

- Η g είναι συνεχής στο $\left[1+e,1+e^{3/2}\right]\subseteq\left(1+\sqrt{e},+\infty\right)$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(e+1)=2\ln(e+1-1)-e^{-(e+1)}-2=2\cdot 1-\frac{1}{e^{e+1}}-2=-\frac{1}{e^{e+1}}<0$

- $g(1+e^{3/2}) = 2\ln(1+e^{3/2}-1) - e^{-1-e^{3/2}} - 2 = 3 - e^{-1-e^{3/2}} - 2 = 1 - \frac{1}{e^{1+e^{3/2}}} > 0$, δηλαδή $g(1+e^{3/2})g(e+1) < 0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(1+e, 1+e^{3/2}\right)$ έτσι ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \left(f \circ f\right)\left(x_0\right) = f\left(e^{-x_0} + 2\right)$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=1$ να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

<u>Λύση</u>

i. $A\in C_f$, άρα $f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \lambda=1$

Η σχέση (1) για $\lambda=1$ γίνεται: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-1$ και για $x\neq 0$ έχουμε:

$f(x)=\frac{\kappa\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$ οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\kappa\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]+\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\left(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}\right)}=\kappa-\frac{1}{2}$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \kappa-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \kappa=1$$

ii. Η σχέση (1) για $\kappa=\lambda=1$ γίνεται: $\eta\mu^2 x = x^2 f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-1$.

Για $x\neq 0$ η τελευταία γίνεται: $f(x)=\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$.

Επίσης έχουμε: $f(0)=\frac{1}{2}$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$1+\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\sigma\upsilon\nu x(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x})}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $2^x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f(x)=\frac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}=x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow x_1^{\ 3}<x_2^{\ 3}\Rightarrow x_1^{\ 3}+3<x_2^{\ 3}+3$

και $x_1<x_2\Rightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_1}<-4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_2}$,

αφού η συνάρτηση $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$x_1^{\ 3}+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<x_2^{\ 3}+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=(-\infty)+3-4(+\infty)=-\infty\ ,$$

αφού $0<\dfrac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

iii. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = (+\infty)+3-4\cdot 0 = +\infty$,

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$

iv. Η f είναι συνεχής (πράξεις συνεχών), είναι και γνησίως αύξουσα άρα
$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$.

Το $\kappa\in\mathbb{R}$ περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 16/10/2017

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Λύση

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

  $$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(1)}$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της **(1)**, είναι

  $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Άσκηση 3

i. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

ii. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

<u>Λύση</u>

i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,

οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

ii. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0.$$

Άσκηση 4

i. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$$f(x)=g(x)+c$$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,f(\beta))$ και $B(\beta,f(\beta))$.

Άσκηση 5

i. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

   Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Λύση

i. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

   Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **(1)**

   Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

   Επομένως,

   - αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$,

     οπότε θα έχουμε $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ **(2)**

   - αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$,

     οπότε θα έχουμε $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$ **(3)**

   Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $f'(x_0)=0$.

   Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ii. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Άσκηση 7

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu \in \mathbf{N}-\{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ;

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0{}^{\nu}}{x-x_0}=$$

$$\frac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0{}^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0{}^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0{}^{\nu-1}\right)=x_0{}^{\nu-1}+x_0{}^{\nu-1}+\ldots+x_0{}^{\nu-1}=\nu x_0{}^{\nu-1},$$

δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$.

<u>Λύση</u>

Αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

<u>Λύση</u>

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0] \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in[x_0,\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως λόγω των **(1)** και **(2)**, ισχύει

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Άσκηση 10

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ με $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

ii. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την f.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

ii. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x, \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$f'(x)=\alpha^x \cdot \ln\alpha$.

Λύση

Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u \cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\cdot\ln\alpha .$$

Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

<u>Λύση</u>

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0,\text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=$$

$$\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Άσκηση 15

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in \mathbf{R}_1=\{x\in\mathbf{R}/\,\sigma\upsilon\nu x\neq 0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Λύση

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x-2}+x-3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της f.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

   $f'\left(x\right)=e^{x-2}+1>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

   οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$.

ii. Μία προφανής ρίζα της συνάρτησης είναι το $x=2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Για το σύνολο τιμών υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=-\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3\right)=-\infty$ και

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=+\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3\right)=+\infty$.

   Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$, το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3+2(\lambda-1)x-\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(0,1)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=x^4+(\lambda-1)x^2-\lambda x,$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον ισχύει $F(0)=F(1)=0$,

επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f , αφού η f :

- είναι συνεχής στο $[0,1]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

και $F(0)=F(1)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi)=0$. Όμως $f(\xi)=F'(\xi)=0$, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2\right)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει $x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbf{R}^*$. Είναι

$$f(x)=\ln\left(x^2\right)=\ln\left(|x|^2\right)=2\ln|x|$$

οπότε

$$f'(x)=\left(2\ln|x|\right)'=2\frac{1}{x}.$$

ii. Έστω $A\left(x_0,2\ln|x_0|\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}\left(x-x_0\right) \qquad \textbf{(1)}$$

και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ να επαληθεύουν την **(1)**, οπότε η **(1)** γίνεται:

$$-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}\left(-x_0\right)\Leftrightarrow \ln|x_0|=1=\ln e\Leftrightarrow x_0=\pm e \text{ , και } f(x_0)=2\ln e=2$$

άρα τα σημεία της C_f είναι τα $A(e,2)$ και $B(-e,2)$

iii. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbf{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής.

Επειδή $f'(x)=2\frac{1}{x}$, έχουμε ότι:

$f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και

$f'(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι για $x\in(-\infty,0)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$ και για $x\in(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Επίσης η f δεν έχει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα σε δυο ανοιχτά διαστήματα.

iv. Από τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, έπεται ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$, δηλαδή τον άξονα y'y.

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0,$$

όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}2\ln x=+\infty.$$

Ομοίως και στο $-\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}, x\neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0\neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν Α και Β τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Λύση

i. Ισχύει: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι: $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{x_0^{\,2}}(x-x_0)$ **(1)**

ii. Θα βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες:

για $x=0$ η **(1)** γίνεται $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{x_0^{\,2}}(-x_0)\Leftrightarrow y=\frac{8}{x_0}$

και για $y=0$ η **(1)** γίνεται $-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{x_0^{\,2}}(x-x_0)\Leftrightarrow x=2x_0$.

Άρα η **(1)** τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0,\frac{8}{x_0}\right)$ και $B(2x_0,0)$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ισούται με

$(OAB)=\frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{8}{x_0}\right||2x_0|=8$ τ.μ,

άρα είναι σταθερό.

iii. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$\left(\frac{2x_0+0}{2},\frac{\frac{8}{x_0}+0}{2}\right)$ δηλαδή $\left(x_0,\frac{4}{x_0}\right)$, άρα είναι το σημείο Μ.

Άσκηση 5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x, \ x\geq 0 \\ 5\cdot\eta\mu x, \ x<0 \end{cases}.$$

<u>Λύση</u>

Η πρώτη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3+5, x>0 \\ 5\cdot\sigma\upsilon\nu x, x<0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^3+5\right)=5$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\eta\mu x-0}{x}=5.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=5$.

Η δεύτερη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x>0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Στο $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+5-5}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sigma\upsilon\nu x-5}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0.$$

Άρα $f''(0)=0$, οπότε έχουμε:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x\geq 0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x’x.

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα x’x.

iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

<u>Λύση</u>

Ισχύει $f'(x)=\left(x^2-3x+1\right)'=2x-3$.

i. Η ευθεία $y=x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα πρέπει $f'(x)=1 \Leftrightarrow 2x-3=1 \Leftrightarrow x=2$ και $f(2)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $A(2,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. Επειδή $\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$, πρέπει $f'(x)=-1 \Leftrightarrow 2x-3=-1 \Leftrightarrow x=1$. Επίσης $f(1)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $B(1,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x’x.

iii. Πρέπει $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Gamma\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iv. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{1}{2}$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να είναι -2 , οπότε $f'(x)=-2 \Leftrightarrow 2x-3=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Delta\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Άσκηση 7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x}$, $x>0$

ii. $2^{x\cdot\ln x}$, $x>0$

iii. $\sqrt{5x^8+1}$

<u>Λύση</u>

i. $x^{\eta\mu x}=\left(e^{\ln x}\right)^{\eta\mu x}=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}$, οπότε θέτοντας

$u=\ln x\cdot\eta\mu x$ έχουμε

$\left(x^{\eta\mu x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\right)'=\left(e^{u}\right)'=$

$e^{u}\cdot u'=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\cdot\left(\ln x\cdot\eta\mu x\right)'=x^{\eta\mu x}\cdot\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)$.

ii. Έστω $u=x\cdot\ln x$, οπότε

$\left(2^{x\cdot\ln x}\right)'=\left(2^{u}\right)'=2^{u}\cdot\ln 2\cdot u'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(x\cdot\ln x\right)'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(\ln x+1\right)$.

iii. Έστω $u=5x^8+1$, οπότε $\left(\sqrt{5x^8+1}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'=\dfrac{\left(5x^8+1\right)'}{2\sqrt{5x^8+1}}=\dfrac{20x^7}{\sqrt{5x^8+1}}$

Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1\le f(x)\le x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x=0$ η **(1)** γίνεται $1\le f(0)\le 1$, άρα $f(0)=1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to 0}(-2x+1)=\lim\limits_{x\to 0}(x^4-2x+1)=1$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

ii. Η σχέση **(1)** γίνεται:

$-2x+1-1\le f(x)-f(0)\le x^4-2x+1-1 \Leftrightarrow -2x\le f(x)-f(0)\le x^4-2x$, οπότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- αν $x>0$, τότε
  $\dfrac{-2x}{x}\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\dfrac{x^4-2x}{x}\Leftrightarrow -2\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le x^3-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3-2)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι
  $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.
- αν $x<0$, τότε
  $\dfrac{-2x}{x}\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge\dfrac{x^4-2x}{x}\Leftrightarrow -2\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge x^3-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3-2)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι
  $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.

Από τα δυο προηγούμενα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=-2$.

Άσκηση 9

Έστω $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^{\,2}}$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Οπότε

i. $$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^{\,2}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-\left(\sqrt{f(x_0)}\right)^2}{(x-x_0)(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=\frac{f'(x_0)}{4\cdot x_0\cdot\sqrt{f(x_0)}}.$$

(Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_0)}$.)

ii. $$\lim_{x\to x_0}\frac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}\left[\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)\right]=$$

$$6\cdot f'(x_0)\cdot f^2(x_0)\cdot\sqrt{x_0}.$$

(Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=f^2(x_0)$)

Άσκηση 10

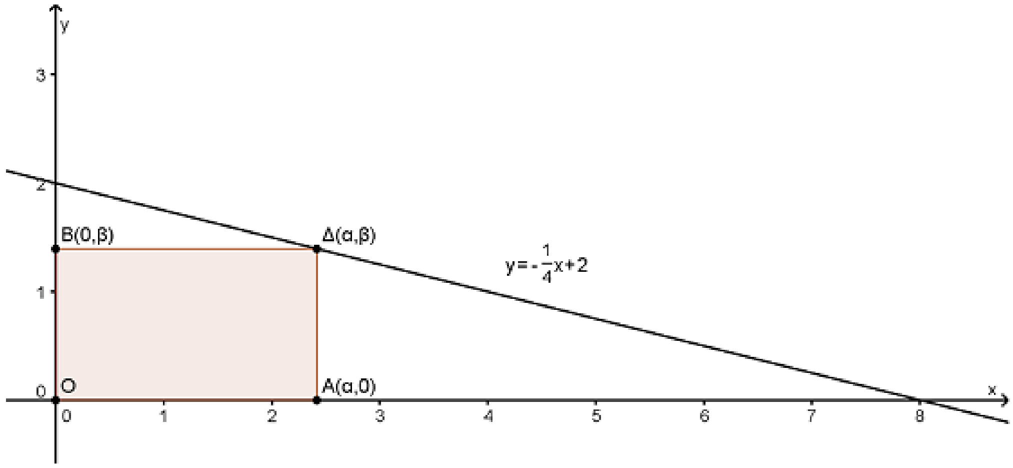
Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

<u>Λύση</u>

Το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με $E=\alpha\cdot\beta$, όπου α,β θετικοί πραγματικοί. Η τέταρτη κορυφή (βλέπε σχήμα) είναι η $\Delta(\alpha,\beta)$,

η οποία ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{4}x+2$, οπότε ισχύει $\beta=-\frac{1}{4}\alpha+2$.



Έτσι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται

$E(\alpha)=\alpha\cdot\left(-\frac{1}{4}\alpha+2\right)=-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha$ με $\alpha\in(0,8)$, αφού από την ανισότητα $\beta>0$ έχουμε

$-\frac{1}{4}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<8$.

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του εμβαδού παίρνουμε:

$E'(\alpha)=\left(-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha\right)'=-\frac{1}{2}\alpha+2$, οπότε $E'(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=4$ και

$E'(\alpha)>0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<4$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

α	0		4		8
$E'(\alpha)$		+		-	
$E(\alpha)$		$\nearrow$	$E(4)$	$\searrow$	

Άρα η συνάρτηση του Εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,4]$, γνησίως φθίνουσα στο $[4,8)$ και είναι συνεχής στο 4, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\alpha = 4$. Οπότε $\beta = -\frac{1}{4}4 + 2 = 1$.

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

<u>Λύση</u>

Αρχικά θα δείξουμε ότι $f(0)=5$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-5}{x}$, με $x\neq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$.

Λύνουμε επίσης ως προς $f(x)$ και έχουμε:

$f(x)=x\cdot g(x)+5$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)+5\right]=0\cdot 2+5=5$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ που σημαίνει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=5$.

Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^{x}\cdot\eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$$

<u>Λύση</u>

Έχουμε

$$f'(x)=\left(e^{x}\cdot\eta\mu x\right)'=e^{x}\cdot\eta\mu x+e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\ ,$$

$$f''(x)=\left(e^{x}\cdot\eta\mu x+e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x \text{ και}$$

$$f^{(3)}(x)=\left(2e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x-2e^{x}\cdot\eta\mu x\ .$$

Οπότε

$$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x-2e^{x}\cdot\eta\mu x+2\left(e^{x}\cdot\eta\mu x+e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$4e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x=2f''(x).$$

Άρα

$$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x).$$

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι:

$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

<u>Λύση</u>

Επειδή

$$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln(x-1)-x+3-\ln 4 \le 0$$

αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x-1)-x+3-\ln 4$ με $x>1$, έχει ολικό μέγιστο το 0.

Πράγματι

$$f'(x)=\frac{2}{x-1}-1=\frac{3-x}{x-1},$$

επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<3$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(3)=0$	$\searrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x=3$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό μέγιστο το $f(3)=0$, άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x>1$.

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

<u>Λύση</u>

Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμικές.

Έχουμε $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(1)=3$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=3x-2.$$

Για να εφάπτεται η ε και στη C_g, θα πρέπει να υπάρχει ένα x_0 τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=3 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{και } g(x_0)=3x_0-2. \quad \textbf{(2)}$$

Η **(1)** μας δίνει:

$g'(x_0)=3 \Leftrightarrow 4x_0+7=3 \Leftrightarrow x_0=-1$

και $g(-1)=2\cdot(-1)^2+7(-1)=-5$, οπότε η **(2)** γίνεται

$-5=3(-1)-2$ το οποίο ισχύει.

Άρα η ευθεία $\varepsilon: y=3x-2$ εφάπτεται στη C_f στο $A(1,1)$ και στη C_g στο $B(-1,-5)$.

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+24x^2+4x-40, x\in\mathbf{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbf{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και επίσης

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=0$.

Όμως $f'(x)=4x^3+48x+4$, η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\gamma)=0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$f''(x)=12x^2+48>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f, οπότε και η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

Λύση

Έχουμε $f'(x)=2x-4$.

i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{2}$, οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα ισχύει $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda=2$.

Αν $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε

$$f'(x_0)=2\Leftrightarrow 2x_0-4=2\Leftrightarrow x_0=3 \text{ και } f(3)=0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$ είναι η παρακάτω:

$$y-0=2(x-3) \text{ ή}$$

$$y=2x-6.$$

ii. Έστω $\Gamma(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, θα ισχύει:

$$-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(-x_0)\Leftrightarrow -x_0^{\,2}+4x_0-3=-2x_0^{\,2}+4x_0\Leftrightarrow$$

$$x_0^{\,2}=3\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$$

και $f\left(\sqrt{3}\right)=6-4\sqrt{3},\ f\left(-\sqrt{3}\right)=6+4\sqrt{3}$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $\Gamma\left(\sqrt{3},6-4\sqrt{3}\right)$ και $\Delta\left(-\sqrt{3},6+4\sqrt{3}\right)$.

iii. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από σημείο $A(2,0)$ και $E\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με αυτήν, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(x-x_1\right).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, θα ισχύει:

$$-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(2-x_1\right)\Leftrightarrow -x_1^2+4x_1-3=-2x_1^2+8x_1-8\Leftrightarrow$$

$$x_1^2-4x_1+5=0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει αρνητική διακρίνουσα ($\Delta=-4<0$), άρα είναι αδύνατη, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από σημείο $A(2,0)$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+k\cdot x-1$, όπου $k\in\mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k=2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε $f'(x)=e^x+k$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=3x+5$, είναι $\lambda=3$.

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, θα πρέπει

$$f'(0)=\lambda=3\Leftrightarrow e^0+k=3\Leftrightarrow k=2.$$

ii. Για $k=2$ έχουμε $f(x)=e^x+2x-1$.

Για να είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=0.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x+2x-1-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άσκηση 18

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\alpha x^3+24x^2+5x-7$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

ii. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε

$$f'(x)=4x^3+6\alpha x^2+48x+5,$$

$$f''(x)=12x^2+12\alpha x+48=12\left(x^2+\alpha x+4\right).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\alpha^2-16$.

Όταν $\Delta<0$ τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Όταν $\Delta=0$ τότε $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, όπου η ισότητα ισχύει για ένα μεμονωμένο σημείο, άρα η f είναι πάλι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Άρα πρέπει

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow\alpha^2-16\leq 0\Leftrightarrow\alpha^2\leq 16\Leftrightarrow|\alpha|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq\alpha\leq 4.$$

2. Πρέπει

$f''(1)=0\Leftrightarrow 12+12\alpha+48=0\Leftrightarrow\alpha=-5$.

Επίσης θα πρέπει να ελέγξουμε αν αλλάζει η κυρτότητα δεξιά και αριστερά του $x=1$.

Για $\alpha=-5$, $f''(x)=12\left(x^2-5x+4\right)$ και

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow(x=1 \text{ ή } x=4)$. Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμου:

X	-∞		1		4		+∞
f''(x)		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty,1\right]$ και κοίλη στο $\left[1,4\right]$. Επίσης επειδή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει εφαπτομένη στο σημείο $A\left(1, f\left(1\right)\right)$, συνεπώς το $A\left(1, f\left(1\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άρα για $\alpha=-5$ το $A\left(1, f\left(1\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 19

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

    i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

    ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \dfrac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έχουμε

    $e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0$.

    Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x$, $x \in \mathbf{R}$.

    Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

    Ισχύει

    $f'(x) = e^{x-1} - 1$,

    οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

    και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$,

    οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$

Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και συνεχής στο $x=1$, άρα στο σημείο αυτό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

Οπότε ισχύει

$$f\left(x\right)\geq f\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)\geq 0\Leftrightarrow e^{x-1}\geq x \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{x^2}\geq 1-x\Leftrightarrow e^{x^2}-1+x\geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-1+x$, $x\in\left[0,+\infty\right)$.

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left[0,+\infty\right)$.

Ισχύει

$$f'(x)=\left(e^{x^2}-1+x\right)'=2x\cdot e^{x^2}+1,$$

οπότε $f'(x)>0$, για κάθε $x>0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.

Έτσι

$$f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0, \text{ για κάθε } x\in\left[0,+\infty\right),$$

που σημαίνει:

$$e^{x^2}\geq 1-x, \text{ για κάθε } x\geq 0.$$

2. Έχουμε

$$e^x+x\geq\frac{x^2}{2}+1\Leftrightarrow e^x+x-\frac{x^2}{2}-1\geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x+x-\dfrac{x^2}{2}-1$, $x\in\left[0,+\infty\right)$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left[0,+\infty\right)$.

Ισχύει:

$$f'(x)=\left(e^x+x-\frac{x^2}{2}-1\right)'=e^x+1-x$$

και

$$f''(x)=\left(e^x+1-x\right)'=e^x-1.$$

Επίσης

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ και

$x>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow f''(x)>0$,

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Οπότε για $x>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(0)=2>0$, άρα και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$.

Ισχύει λοιπόν:

$$f(x)\geq f(0)=0, \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty), \text{ άρα}$$

$$e^x+x\geq \frac{x^2}{2}+1, \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{2x}+5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5$.

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'\left(x\right)=2e^{2x}+5>0,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5 \Leftrightarrow e^{2x^2}+5x^2=e^{2(2x-1)}+5\left(2x-1\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2\right)=f\left(2x-1\right)$$

και επειδή η f είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2=2x-1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x=y=0$ η σχέση

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \qquad \textbf{(1)}$$

γίνεται:

$f(0) = f(0) \cdot 1 + f(0) \cdot 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

ii. Από τη σχέση **(1)** παίρνουμε $f(x_0 + h) = f(x_0) \cdot e^h + f(h) \cdot e^{x_0}$ οπότε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[f(x_0) \cdot \frac{e^h - 1}{h} + \frac{f(h)}{h} \cdot e^{x_0} \right] =$$

$$f(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} \cdot e^{x_0} = f(x_0) \cdot e^0 + 1 \cdot e^{x_0} = f(x_0) + e^{x_0},$$

αφού το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - e^0}{h - 0} = g'(0) = e^0$ με $g(x) = e^x$.

Άρα $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

Λύση

Έχουμε $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \geq 0$ και θέτοντας

$f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3$ παίρνουμε: $f(x) \geq 0 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του $\mathbf{R}$) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln\alpha + \beta^x \cdot \ln\beta - 5e^x$, οπότε

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha + \beta^0 \ln\beta - 5e^0 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha \cdot \beta) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = e^5.$$

Άσκηση 4

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$f(0)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x)=f^2(x)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Λύση

i. Οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Ομοίως οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   Επίσης $h(0)=h(1)=0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Είναι $h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)\cdot e^{g(x)}+f^2(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)$ και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)\cdot f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f^2(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\left[2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)\right]=0\Leftrightarrow 2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Άσκηση 5

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1$$

<u>Λύση</u>

Αφού η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-3x\right]=-1$. Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left[\left(f(x)-3x\right)-\lambda^2+\frac{2}{x}\right]}{x\cdot\left[\frac{f(x)}{x}+\lambda+\frac{1}{x}\right]}=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1-\lambda^2}{3+\lambda}=-1\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow\left(\lambda=2\text{ ή }\lambda=-1\right).$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0, f(1)>2$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\xi)=2\xi$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει $g(0)g(1)=\underset{-}{f(0)}\left[\underbrace{f(1)-2}_{+}\right]<0$,

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\xi\in(0,1)$ ώστε $g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=2\xi$.

Επιπλέον ισχύει ότι $g'(x)=f'(x)-2\neq 0$ στο $(0,1)$.

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $(0,1)$ με $0<\rho_1<\rho_2<1$. Τότε για τη g θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2).

$g(\rho_1)=g(\rho_2)$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε, $g'(x_0)=0$ το οποίο είναι άτοπο.

Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ομοίως και η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \text{ και } \lim_{x \to 0}\left(e^x \cdot \eta\mu x - x\right) = 0,$$

οπότε για να βρούμε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$ εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{\left(e^x \cdot \eta\mu x - x\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0 \text{ και } \lim_{x \to 0}\left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1\right) = 0,$$

άρα το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$ είναι πάλι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L' Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η $f''(x)$ για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της $f''(0)$.

Είναι $f''(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{x} = 2011$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=\frac{2011}{1+1}=\frac{2011}{2},$$

αφού $\lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=e^0\cdot 1=1$ και

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-e^x\cdot\eta\mu x}{1}=1$. (κανόνας De L' Hospital)

Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}=\frac{2011}{2}$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

<u>Λύση</u>

Έστω $B\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη C_f.

Η παράγωγος της f ισούται με $f'(x)=2x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-x_0^{\,2}=2x_0(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

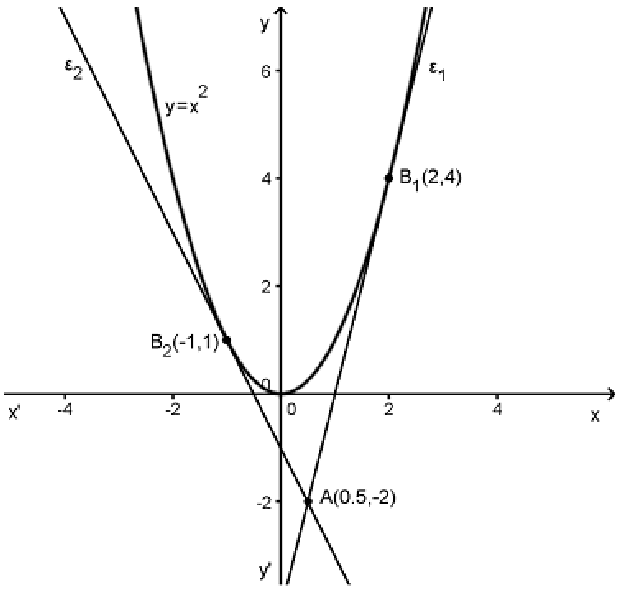
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την **(1)** οπότε:

$$-2-x_0^{\,2}=2x_0\left(\frac{1}{2}-x_0\right) \Leftrightarrow x_0^{\,2}-x_0-2=0 \Leftrightarrow \left(x_0=2 \text{ ή } x_0=-1\right),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην **(1)** παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$\varepsilon_1: y=4x-4$ και σημείο επαφής το $B_1(2,4)$ και

$\varepsilon_2: y=-2x-1$ και σημείο επαφής το $B_2(-1,1)$.



Σχήμα 1

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

Λύση

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,3]$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$.

Επίσης

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3)\Leftrightarrow\frac{f(1)-f(0)}{1-0}>\frac{f(3)-f(2)}{3-2}, \qquad \textbf{(1)}$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η **(1)** γίνεται $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, το οποίο ισχύει, αφού f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$ και $\xi_1<\xi_2$.

Άσκηση 10

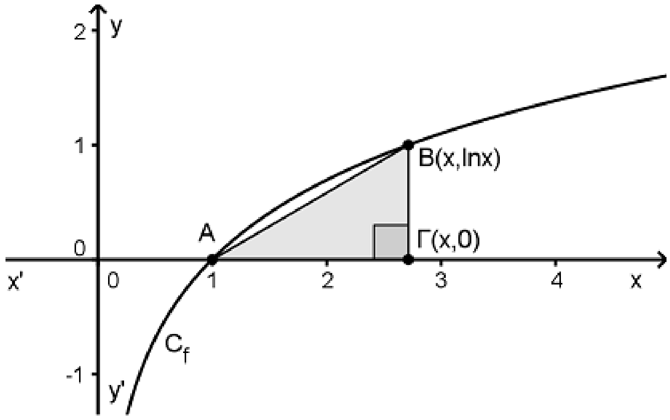
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και

$\Gamma(x,0)$, $x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5cm/\sec$.

<u>Λύση</u>

Έστω $f(x)=\ln x$.



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και $\Gamma(x,0)$, $x>1$, ισούται με $E=\frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(B\Gamma)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot\ln x$ (βλέπε Σχήμα 1) και επειδή η τετμημένη x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου t με $E(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-1\right]\cdot\ln x(t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\cdot\ln x(t_0)+\frac{1}{2}\left[x(t_0)-1\right]\cdot\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

(όπου $\left(\ln x(t)\right)'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{x'(t)}{x(t)}$, με $u=x(t)$)

και αντικαθιστώντας το $x(t_0)=2cm$ και $x'(t_0)=0,5cm/\sec$ βρίσκουμε

$$E'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}[2-1]\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)cm^2/\sec$$

Άσκηση 11

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, οπότε $P(\rho)=(\rho-\rho)^2\cdot\Pi(\rho)=0$.
Επίσης $P'(x)=2(x-\rho)\cdot\Pi(x)+(x-\rho)^2\cdot\Pi'(x)$, οπότε

$$P'(\rho)=2(\rho-\rho)\cdot\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\cdot\Pi'(\rho)=0.$$

Αντιστρόφως έστω $P(\rho)=P'(\rho)=0$. Αφού $P(\rho)=0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $P'(x)=Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)$, οπότε

$P'(\rho)=Q(\rho)+(\rho-\rho)\cdot Q'(\rho)=0$ άρα $Q(\rho)=0$, άρα υπάρχει πολυώνυμο

$\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $Q(x)=(x-\rho)\cdot\Pi(x)$. Αντικαθιστώντας το $Q(x)$ στην **(1)** παίρνουμε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, άρα το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $P(1)=P'(1)=0$.

Είναι $P(1)=\alpha+\beta-3-1=0$, άρα $\alpha+\beta=4$. Επίσης $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$, οπότε $P'(1)=3\alpha+2\beta-3=0$. Λύνουμε το σύστημα
$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\3\alpha+2\beta=3\end{cases}$ και βρίσκουμε $\begin{cases}\alpha=-5\\\beta=9\end{cases}$

Άσκηση 12

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2\,.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x-1}-\ln x-x^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x)\geq 0=g(1) \text{ για κάθε } x>0\,.$$

Άρα η g έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $g'(1)=0$. Όμως $g'(x)=f'(x)-e^{x-1}-\frac{1}{x}-2x$, άρα

$g'(1)=f'(1)-e^0-\frac{1}{1}-2=0\Leftrightarrow f'(1)=4$.

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$ θα είναι

$$y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$$

Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

<u>Λύση</u>

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση **(1)**, η οποία γίνεται

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)+4f'(x)+2x=0 \Rightarrow$$

$$2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f''(x)+4f''(x)+2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω ότι το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$, θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και αντικαθιστώντας στην **(2)** παίρνουμε

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2f(x_0)\cdot f''(x_0)+4f''(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2=0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι η $y = 2x + 2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

Λύση

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ και παίρνουμε

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x\right)' = \left(2 \cdot e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) = 2 \cdot e^x \qquad \textbf{(4)}$$

Για $x = 0$ η σχέση **(4)** μας δίνει $f'(0) = 2$.

2. Για $x = 0$ η σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ μας δίνει $f(0) = 2$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και $x'(t) = 2cm/\sec$, οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t) = 2x(t) + 2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t) = 2x'(t) = 4cm/\sec.$$

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

    i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

    ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

2. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x\,.$$

    i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

    ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε ισχύει:

$f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=f'(x)$ **(1)**

Θέτοντας $y=f(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=f(u)$. Επομένως,

$$y'=\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x),$$

άρα η **(1)** γίνεται $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι περιττή.

ii. Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

$f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=-f'(x)$ **(2)**

Θέτοντας $y = f(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = f(u)$. Επομένως,

$$y' = \left(f(u)\right)' = f'(u)\cdot u' = f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x),$$

άρα η **(2)** γίνεται $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι $x^5 + \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x + x$ είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   ii. Έχουμε:

$$g'(x) = \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)' \cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)\cdot\left(e^{f(x)}\right)' + \left(\eta\mu x + x\right)' =$$

$$\left(5x^4 - \eta\mu x\right)\cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x + 1.$$

   Οπότε $g'(0) = e^{f(0)}\cdot f'(0) + \sigma\upsilon\nu 0 + 1 = 2$.

   Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε $f'(0) = 0$.

   Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f' είναι περιττή, οπότε για $x = 0$ έχουμε $f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Επίσης $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq x^2 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

ii. Η συνάρτηση $\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $f\left(\frac{1}{2\pi}\right)=\frac{1}{8\pi^3}\cdot\eta\mu(2\pi)=0$ και $f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi^3}\cdot\eta\mu(\pi)=0$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Από το **ii)** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Έτσι

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}+\xi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$3\xi\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=3\xi$$

Άρα η εξίσωση $\sigma\varphi\frac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$.

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \overset{u=x\cdot\ln x}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-x\right) = 0.$$

ii. $$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \overset{u=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^{*}\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(1)=2$ και

$x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x)$ για κάθε $x\neq 0$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^{3}\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$g'(x)=\left(x^{3}\cdot f(x)\right)'=3x^{2}\cdot f(x)+x^{3}\cdot f'(x)=3x^{2}\cdot f(x)+x^{2}\cdot\left(-3f(x)\right)=0$$

άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases} c_1, & x>0 \\ c_2, & x<0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια έχουμε $f(1)=2\Leftrightarrow f(-1)=2$ οπότε $g(1)=1^{3}\cdot 2=2=c_1$ και $g(-1)=(-1)^{3}\cdot 2=-2=c_2$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ -2, & x<0 \end{cases}$$

ii. Για $x>0$, $g(x)=2\Leftrightarrow x^{3}\cdot f(x)=2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x^{3}}$.

Για $x<0$, $g(x)=-2\Leftrightarrow x^{3}\cdot f(x)=-2\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^{3}}$.

$$\text{Άρα } f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & x>0 \\ \\ -\dfrac{2}{x^3}, & x<0 \end{cases}$$

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επίσης ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f\left(x\right)=2x^3-15x^2+24x$ είναι το $\mathbf{R}$.

i. $f'\left(x\right)=6x^2-30x+24$ και

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24=0\Leftrightarrow (x=1$ ή $x=4)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	11	↘	-16	↗	

Η f είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,1\right]$ και $\left[4,+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,4\right]$. Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση $x=1$ τοπικό μέγιστο το $f\left(1\right)=11$ και στη θέση $x=4$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(4\right)=-16$.

ii. Ισχύει

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$, και επειδή η f είναι συνεχής στο R τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$f\left(\left(-\infty,1\right]\right)=\left(-\infty,11\right]$,

$f\left([1,4]\right)=[-16,11]$ και

$f\left([4,+\infty)\right)=[-16,+\infty)$ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι

- Αν $\lambda<-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.
- Αν $\lambda=-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.
- Αν $-16<\lambda<11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda=11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda>11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

iv. $f''(x)=12x-30$ και $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{2}$. Οπότε έχουμε

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_0=\dfrac{5}{2}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(\dfrac{5}{2},f\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2 .$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

<u>Λύση</u>

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου P.

Έστω ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν, τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $\nu - 1$ και του $\left[P'(x)\right]^2$ είναι $2(\nu-1)$. Λόγω της ισότητας $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$, πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu - 1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2 .$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0 ,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta ,$$

οπότε

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & \mathbf{(1)} \\ 4\alpha\beta = \beta & \mathbf{(2)} \\ \beta^2 = \gamma & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

Η **(1)** μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση $P'(1) = 2$ παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2} .$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $\beta = \frac{3}{2}$ στη σχέση **(3)** και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση **(2)** ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς α και β.

Έτσι $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

<u>Λύση</u>

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όμως $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα

$$f'(\xi_1)>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Όμως $f(\beta)>f(\gamma)$ άρα

$$f'(\xi_2)<0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και από τις **(1)** και **(2)** έχουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu x}{x} \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

γιατί

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{u} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{u\to +\infty} \frac{\left(e^u\right)'}{\left(u\right)'} = \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty .$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$,

αφού

$$\lim_{x\to 0^-} x = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to -\infty} e^u = 0 .$$

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

   $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

<u>Λύση</u>

i. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ και επίσης $f(1)=f(6)$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

   υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

   Επομένως στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,6]$.

<u>Σχόλιο</u>: Η επιλογή των διαστημάτων $[1,2]$ και $[2,6]$ έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$, δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1). \qquad \textbf{(1)}$$

  ομοίως η f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$,

  άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{f(6)-f(2)}{4}\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=f(2)-f(1)+4\cdot\frac{f(6)-f(2)}{4}=f(6)-f(1)=0\,.$$

Άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x) = 2x - \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''(x) = 2 + \eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 2-1 \leq 2+\eta\mu x \leq 2+1 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq 2+\eta\mu x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq f''(x) \leq 3,$$

άρα $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Έχουμε

$f'(0) = -\sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0$,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = \pi > 0$

και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, οπότε:

για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και

για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε $f(x)\le 2x+1 \Leftrightarrow f(x)-2x-1\le 0$, οπότε αν θέσουμε

$g(x)=f(x)-2x-1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ως άθροισα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και επειδή $g(2)=f(2)-4-1=0$ και $g(1)=f(1)-2-1=0$, έπεται ότι η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία $x=1$ και $x=2$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$g'(1)=f'(1)-2=0\Leftrightarrow f'(1)=2$ και

$g'(2)=f'(2)-2=0\Leftrightarrow f'(2)=2$.

Τέλος επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f'(1)=f'(2)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο $[1,2]$ και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

<u>Λύση</u>

1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbf{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της g'. Ισχύει

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3\left[f'(x) - x^2\right] < 0$$

   άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

2. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε

$$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,2]$, αφού

   i. η f είναι συνεχής στο $[1,2]$

   ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$,

   οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1) < 3.$$

Άσκηση 2

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=x-\ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$. Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g'

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι το $g(1)=1$, άρα $g(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}1-\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

<u>Σχόλιο</u>: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} e^{y}=+\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x}=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^{y}=1$,

όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'(x)=\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x\right)'=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln x+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(x-\ln x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot g(x)$$

και από το ερώτημα **i)** έπεται ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Στο **ii)** βρήκαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0.$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,\ x>0$. Έχουμε $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
h′(x)		-	0	+	

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x=1$, δηλαδή ισχύει:

$h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\geq 0$ άρα αποδείχτηκε ότι

$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$ για κάθε $x>0$.

2. Η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+2e-e^2=-1+2e-e^2=-(1-e)^2<0$,

- $g(1)=1>0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$. Επίσης $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, αφού $x>0$ και $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'(x)=\left(e^x\cdot\ln x\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι $f'(x)>0$, συνεπώς η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοιχτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f''(x)=\left(e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\cdot\frac{1}{x^2}=$$
$$e^x\cdot\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\cdot g(x)$$

5. Από το ερώτημα 2 η g έχει μια ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

για $x<x_0\Rightarrow g(x)<g(x_0)=0$ και για $x>x_0\Rightarrow g(x)>g(x_0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Από τα προηγούμενα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$ και το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f , αφού αφ’ ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ’ ετέρου στο σημείο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f .

Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

Λύση

Ισχύει

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f(x)\cdot\eta\mu x=f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'=f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$,

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

$$f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=c\cdot e^{x}.$$

Επίσης $f(0)=2$, οπότε έχουμε: $f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0=c\cdot e^{0}\Leftrightarrow c=2$.

Άρα $f(x)=\frac{2\cdot e^{x}}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

<u>Λύση</u>

i. Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$f'(x)=\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}\right)'=\dfrac{e^{\lambda x}(\lambda x+\lambda-1)}{(x+1)^2}$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}>-1$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-1		$\frac{1-\lambda}{\lambda}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1-\lambda}{\lambda},+\infty\right)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, το οποίο είναι το $f\left(\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$.

ii. Έστω $g(\lambda)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$ με $\lambda>0$. Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda)=\left(\lambda\cdot e^{1-\lambda}\right)'=e^{1-\lambda}-\lambda\cdot e^{1-\lambda}=e^{1-\lambda}\cdot(1-\lambda)$ η οποία έχει ρίζα το $\lambda=1$ και για το πρόσημό της ισχύει

λ	0		1		$+\infty$
g'(λ)		+	0	-	

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\lambda=1$.

Άσκηση 6

Α. Να αποδείξετε ότι: $e^x \le 1+xe^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $e^x = 1+xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $h(x)=2\left|1+xe^x\right|$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε $f(x)=1+xe^x-e^x$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\left(1+xe^x-e^x\right)'=xe^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, δηλαδή $f(x)\ge f(0)=0 \Leftrightarrow 1+xe^x-e^x\ge 0$.

ii. Η εξίσωση $f(x)=0$ ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για $x=0$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση, $g(x)=1+xe^x$ η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της: $g'(x)=xe^x+e^x=e^x(x+1)$ και έχουμε

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x=-1$, δηλαδή $g(x)\ge g(-1)=\dfrac{e-1}{e}>0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+xe^x\right)=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=1$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^{x}\right)=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $[\dfrac{e-1}{e},+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι το $[2\dfrac{e-1}{e},+\infty)$.

Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

   iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

   και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε $3^x + 2^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0$ **(1)**.

Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $x = 1$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{2}{5} < 0,$$

αφού $\frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{5} < \ln 1 = 0$ και $\frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{5} < \ln 1 = 0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της f, άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**.

i. Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε

$g'(x) = \left(e^{2x} \cdot f(x)\right)' = 2e^{2x} \cdot f(x) + e^{2x} \cdot f'(x) = 2e^{2x} \cdot f(x) - 2e^{2x} \cdot f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα

$e^{2x} \cdot f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^{-2x}$.

Για $x = 0$ παίρνουμε:

$f(0) = c \cdot e^{0} \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $f(x) = e^{-2x}$.

iii. Ισχύει:

$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \Leftrightarrow \left(h(x) - \varphi(x)\right)' = -2\left(h(x) - \varphi(x)\right)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

οπότε από το **i)** ερώτημα έπεται ότι:

$h(x) - \varphi(x) = c \cdot e^{-2x}$, και για $x = 0$ παίρνουμε

$$h(0) - \varphi(0) = c \cdot e^{0} \overset{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow} c = 0.$$

Άρα $h = \varphi$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f\left(0\right)\right)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

Λύση

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

i. Παραγωγίζουμε την f,

$$f'\left(x\right)=\left(2x+4\right)\cdot e^x+\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x .$$

Έχουμε $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{2}$, επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+3}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2x+4\right)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty ,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		$-3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε στο $-3-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $-3+\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$f\left(\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]\right)=\left(0,f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right]$,

$f\left(\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right]$ και

$f\left(\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$.

Το $f\left(-3+\sqrt{2}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο γιατί $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Πράγματι το τριώνυμο $g(x)=x^2+4x+3$ έχει ρίζες τους αριθμούς

-3 και -1 και $-3<-3+\sqrt{2}<-1$, άρα $g\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$ γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$ είναι φανερό ότι η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii. $f''(x)=(2x+6)\cdot e^x+\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x$ και

$f''(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=-4\pm\sqrt{3}$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{3}$		$-4+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty,-4-\sqrt{3}\right]$ και $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left[-4-\sqrt{3},-4+\sqrt{3}\right]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A\left(-4-\sqrt{3}, f\left(-4-\sqrt{3}\right)\right)$ και $B\left(-4+\sqrt{3}, f\left(-4+\sqrt{3}\right)\right)$.

iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\right)'}{(x)'}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=+\infty$, άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. $f'(x)=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x \Rightarrow f'(0)=7$ και $f(0)=3$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι:

$$y-3=7\cdot(x-0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=7x+3.$$

v. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και $0\in\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$, οπότε στο διάστημα αυτό η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο $A\left(0, f(0)\right)$, άρα

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq-4+\sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln(2\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln(\alpha+2\beta-1)\leq 2$$

να υπολογίσετε τους α,β.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,+\infty)$.

i. Έχουμε

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$ και

$f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f'(0)=0$, άρα

για $-1<x<0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0)=0$ και

για $x>0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0$.

Επιπλέον $f(0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

ii. Έχουμε

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[e^x-\ln(x+1)-1\right]=+\infty \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\ln(x+1)\overset{u=x+1}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln(u)=-\infty \text{ και } \lim_{x\to -1^+}\left[e^x-1\right]=\frac{1}{e}-1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

iii. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού

για $x<0 \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta i.}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$ και

για $x>0 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$.

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln(2\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln(\alpha+2\beta-1)\le 2\Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln((2\alpha+\beta-1)+1)-1+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln((\alpha+2\beta-2)+1)-1\le 0\Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1)+f(\alpha+2\beta-2)\le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f(2\alpha+\beta-1)=f(\alpha+2\beta-2)=0, \qquad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1)\neq 0$ τότε, επειδή $f(x)\ge 0$ για κάθε $x>-1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1)>0$ και η **(1)** μας δίνει $f(\alpha+2\beta-2)\le -f(2\alpha+\beta-1)<0$ δηλαδή $f(\alpha+2\beta-2)<0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f\left(2\alpha+\beta-1\right)=0$ οπότε από την **(1)** και $f\left(\alpha+2\beta-2\right)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0 \\ \alpha+2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

<u>Λύση</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$.

i. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της f.

Αν $y=x^{\frac{1}{2x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{\ln x}{2x}}$ και θέσουμε $u=\dfrac{\ln x}{2x}$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\frac{\ln x}{2x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'=x^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1-\ln x}{2x^{2}}.$$

Έχουμε $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$,

και $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow\ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0		e		$+\infty$
f′(x)		+	0	-	
f(x)		↗	f(e)	↘	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,e\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[e,+\infty\right)$ και επειδή είναι συνεχής στο e,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το $f\left(e\right)$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[e,+\infty\right)$, οπότε ισχύει:

$$e<3<5<6\Leftrightarrow f\left(3\right)>f\left(5\right)>f\left(6\right)\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}}>5^{\frac{1}{10}}>6^{\frac{1}{12}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(x^2+1\right)\cdot \ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\cdot\ln x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε $2x\cdot\ln x + \frac{1}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2\cdot\ln x + 1 > 0$,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right) = 2x^2\cdot\ln x + 1$, $x>0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και
$g'\left(x\right) = 4x\cdot\ln x + 2x = 2x\cdot\left(2\ln x + 1\right)$

και έχουμε

$$g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$ και

$$g'\left(x\right)>0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$g'\left(x\right)<0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{e-1}{e}>0.$$

Επομένως $g(x)\geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>0$ για κάθε $x>0$, άρα αποδείξαμε ότι

$$2x\cdot\ln x+\frac{1}{x}>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

ii. Έχουμε $f'(x)=\left[\left(x^2+1\right)\cdot\ln x\right]'=2x\ln x+x+\frac{1}{x}=x+\left(2x\ln x+\frac{1}{x}\right)>0$, αφού $x>0$ και $2x\cdot\ln x+\frac{1}{x}>0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=0$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε $f''(x)=\left(2x\ln x+x+\frac{1}{x}\right)'=2\ln x+2+1-\frac{1}{x^2}=2\ln x+3-\frac{1}{x^2}$ και

$$f^{(3)}(x)=\left(2\ln x+3-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Αφού $f^{(3)}(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e}\right)=1-e^2<0$ και $f''(1)=2>0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$$0<x<x_0 \overset{f''\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(x_0)=0 \text{ και}$$

$$x>x_0 \overset{f''\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(x_0)=0.$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty\ ,$$

αφού $\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1$ και $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2+1)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2+1)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο -1, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Ισχύει

$$x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2+1) \Leftrightarrow x + \ln(x^2+1) = 4 + \ln(4^2+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(4)$$

και η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x = 4.$$

iii. Έχουμε:

$$x^3 - x^2 > \ln\frac{x^4+1}{x^6+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 > \ln(x^4+1) - \ln(x^6+1) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \ln\left(\left(x^3\right)^2+1\right) > x^2 + \ln\left(\left(x^2\right)^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$f(x^3) > f(x^2) \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} x^3 > x^2 \Leftrightarrow x^2\cdot(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \text{ για κάθε } x>0.$$

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$,

$f''(x)=2e^x+2x\cdot e^x+2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(x^2+4x+2\right)e^x$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

X	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στα $\left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και κοίλη στο $\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$.

ii. Επειδή $-2+\sqrt{2}<0$, έπεται ότι για $x>0$ ισχύει $[x,x+1]\subseteq\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και αφού $f''(x)>0$ στο $\left(-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$, άρα και στο $[x,x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x,x+1]$ οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x).$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x)\Leftrightarrow f'(x+1)>f'(\xi)\overset{f'\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow}x+1>\xi,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A\big(\xi, f(\xi)\big)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B\big(\gamma, f(\gamma)\big)$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{3-\frac{1}{2}}=\frac{12-2}{\frac{5}{2}}=4.$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A\big(\xi, f(\xi)\big)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(\xi)=4$, άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B\big(\gamma, f(\gamma)\big)$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(x-\gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, πρέπει

$$-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(-\gamma)\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma). \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ και

$g(3)=\frac{12}{3}=4$,

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(3)$, που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g

στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\gamma)\cdot\gamma-f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η **(1)**, συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\gamma,f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x+1},\ x>-1$.

   i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

   ii. Αν $\alpha>\dfrac{1}{e},\beta>\dfrac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

<u>Λύση</u>

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

   - Αν $\alpha=\beta$, τότε η σχέση

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

   γίνεται

$$2\cdot f(\alpha)\geq 2\cdot f(\alpha)$$

   το οποίο ισχύει.

   - Έστω τώρα ότι $\alpha<\beta$. Τότε έχουμε

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) \qquad \textbf{(1)}$$

   Επίσης $\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}>0$, οπότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$, οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \text{ και}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η **(2)** γίνεται $f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$, το οποίο ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\xi_2 \geq \xi_1$.

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για $\alpha > \beta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1}$, $x>-1$.

Ισχύει

$$f'(x)=\frac{\left(2-x^2\right)'(x+1)-\left(2-x^2\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x-2}{(x+1)^2} \text{ και}$$

$$f''(x)=\frac{\left(-x^2-2x-2\right)'(x+1)^2-\left(-x^2-2x-2\right)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, συνεπώς f κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

i. Έχουμε $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$, άρα $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$. Επίσης

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2-(\ln\alpha)^2}{\ln\alpha+1}+\frac{2-(\ln\beta)^2}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}+1}\Leftrightarrow$$

$$f(\ln\alpha)+f(\ln\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$ και για τους $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/11/2016

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

i. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$

ii. Αν $c>0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$;

Λύση

i. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

ii. Αν $c>0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση β-α και ύψος c.

Άσκηση 2

i. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g, και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε
$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. $E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx$

Άσκηση 3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Ποια σχέση δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$;

<u>Λύση</u>

Η σχέση είναι: $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$.

Άσκηση 4

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Λύση

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ii. $E=\int_{a}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$.

Άσκηση 5

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω.

- αν $f(x)\geq 0$
- αν $f(x)\leq 0$
- αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

- Αν $f(x)\geq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.
- Αν $f(x)\leq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (-f(x))dx$.
- Αν η f δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left[\alpha,\beta\right]$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta \left|f(x)\right|dx$.

Άσκηση 6

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

<u>Λύση</u>

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την **(1)**, για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Θεωρούμε μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\ln\left(x^2-8\right)$ και F μία παράγουσα της f στο $\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$, με $f(3)=F(3)=0$.

i. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση F είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>2\sqrt{2}$

iii. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Λύση</u>

i. Οι συναρτήσεις f, F είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $(2\sqrt{2},+\infty)$ με $F'(x)=f(x)$ και $F''(x)=f'(x)=\ell n(x^2-8)$ για κάθε $x>2\sqrt{2}$.

Είναι:

- $F''(x)=0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)=0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)=\ell n1 \Leftrightarrow x^2-8=1 \Leftrightarrow x=3$, αφού $x>2\sqrt{2}$. (Η συνάρτηση ln ειναι1-1)

  $F''(x)<0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)<0 \Leftrightarrow x^2-8<1 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<x<3$.

  Αφού $x>2\sqrt{2}$ (η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα).

  Άρα η F είναι κοίλη για κάθε $x\in(2\sqrt{2},3)$.

- Όμοια:

  $F''(x)>0 \Leftrightarrow x>3$

Άρα η F είναι κυρτή για κάθε $x>3$. Επομένως, το σημείο $M(3,F(3))=(3,0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_F.

ii. Είναι:
$F''(x)=f'(x)$ για κάθε $x\in(2\sqrt{2},+\infty)$. Άρα, οι ρίζες και το πρόσημο της f' ταυτίζονται με τις ρίζες και το πρόσημο της F'' δηλαδή: $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<x<3$ από i) και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>3$ από i). Επομένως η f παρουσιάζει στο $x=3$ ολικό ελάχιστο, οπότε: $f(x)\geq f(3) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(2\sqrt{2},+\infty)$.

iii. Είναι:

$F'(x) = f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$ (από ii.) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 3$.
Επομένως, η F είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με: $f(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν $x\to-\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}\right)'=\frac{(6x^2+3)(x^2+1)-(2x^3+3x)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^4+3x^2+\cancel{6x^2}+3-4x^4-\cancel{6x^2}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^4+3x^2+3}{(x^2+1)^2}>0$$

Αφού $2x^4+3x^2+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

ii. Έπειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της θα είναι

$$\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=2\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty\ .$$

Άρα $f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση αν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι:

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^3+3x}{x^2+1}}{x}=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$$

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}-2x\right)=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x-2x^3-2x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=$$

  $$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Άρα η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

iv. Έχουμε: $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\frac{2t^3+3t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\frac{2t^3+2t+t}{t^2+1}dt=$

$$=\int_0^x\left(\frac{2t(t^2+1)+t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\left(2t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x 2tdt+\int_0^x\frac{t}{t^2+1}dt=$$

$$=\left[t^2\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^x=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)-\ln1\right]=x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{x^2}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right]=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x^2+1))'}{(x^2)'}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'}{2x}=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=1+\frac{1}{2}\cdot0=1\,.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=1$ και ισχύει $f'(x)=\ln 2\cdot f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)}{2^x}$ είναι σταθερή και να βρείτε την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $\xi^3\int_0^1 f(t)dt=1-\xi$.

<u>Λύση</u>

i. Θα δείξουμε ότι $g'(x)=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{2^x}\right)'=\frac{f'(x)\cdot 2^x-f(x)(2^x)'}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)\cdot 2^x-f(x)\cdot 2^x\cdot\ln 2}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)\ln 2}{2^x}\overset{(3)}{=}0$$ οπότε

$g(x)=c$ άρα $\dfrac{f(x)}{2^x}=c$.

$$\frac{f(x)}{2^x}=c\Leftrightarrow f(x)=c\,2^x$$

αλλά $f(0)=1$, άρα $c=1$ οπότε $f(x)=2^x$.

ii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=0$, αφού $0<\dfrac{2}{5}<1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=+\infty$.

iii. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x^3\int_0^1 f(t)dt-1+x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $g(0)=-1<0$ και $g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 2^t dt=\dfrac{1}{\ln 2}\left[2^t\right]_0^1=\dfrac{1}{\ln 2}(2-1)=\dfrac{1}{\ln 2}>0$, οπότε

$g(0)g(1)<0$. Άρα ισχύει το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $g(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi^3\int_0^1 f(t)dt = 1-\xi$.

Είναι $g'(x)=3x^2\int_0^1 f(t)dt+1>0,$ γιατί $f(t)=2^t>0 \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt>0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε η ρίζα της ξ είναι μοναδική.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)=f(x)+2e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=2xe^x$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

iv. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1)=0$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 F(x)\,dx$.

Λύση

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(x)=f(x)+2e^x \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2e^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2 \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'=(2x)'.$$

Άρα $e^{-x}f(x)=2x+c$, $c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ βρίσκουμε $c=0$, οπότε $e^{-x}f(x)=2x \Leftrightarrow f(x)=2xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x\cdot e^x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=0,$$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=+\infty$.

iii. Από ii) έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\cdot e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2e^x)=+\infty.$$

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Και τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

iv. Αφού F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$I=\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 (x)'F(x)dx=\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx=1F(1)-0-\int_0^1 xf(x)dx=-2\int_0^1 x^2e^x dx=$$

$$=-2\int_0^1 x^2(e^x)'dx=-\left[2x^2e^x\right]_0^1+4\int_0^1 xe^x dx=-\left(2e-0\right)+4\int_0^1 x(e^x)'dx=-2e+4\left[xe^x\right]_0^1-4\int_0^1 e^x dx=$$

$$=-2e+4\left(e-0\right)-4\left[e^x\right]_0^1=-2e+4e-4\left(e-1\right)=-2e+4e-4e+4=4-2e.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln\left(16-x^2\right)$, $x\in(-4,4)$ και Φ μια παράγουσα της φ στο $(-4,4)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\Phi(x-2)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

iii. Αν $f(4)=0$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(4,f(4)\right)$.

iv. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε ότι η συνάρτηση Φ είναι μια παράγουσα της φ στο $(-4,4)$, δηλαδή ισχύει $\Phi'(x)=\varphi(x)$, $x\in(-4,4)$.

Επίσης για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\Phi(x-2)$ πρέπει: $A'\neq\varnothing$ όπου

$A'=D_f=\{x\in R: x-2\in D_\Phi\}=\{x\in R: -4<x-2<4\}=(-2,6)\neq\varnothing$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f=(-2,6)$.

ii. Οι συναρτήσεις Φ και $x-2$ είναι παραγωγίσιμες άρα και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,6)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\Phi'(x-2)(x-2)'=\ln\left(16-(x-2)^2\right)=\ln\left(-x^2+4x+12\right)$$

iii. Έχουμε: $f(4)=0$ και $f'(4)=\ln(-16+16+12)=\ln 12$ οπότε η εξίσωση της C_f στο $A\left(4,f(4)\right)$ είναι:

$\varepsilon: y-f(4)=f'(4)(x-4)$ ή

$\varepsilon: y-0=\ln 12(x-4)$ ή

$\varepsilon: y=\ln(12)x-4\ln 12$

iv. Για κάθε $x\in(-2,6)$ έχουμε:

$$f''(x)=(\ln(-x^2+4x+12))'=\frac{(-x^2+4x+12)'}{-x^2+4x+12}=$$

$$= \frac{-2x+4}{-x^2+4x+12} = \frac{2(x-4)}{x^2-4x-12}.$$

Είναι:

$f''(x) \le 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-4)}{x^2-4x-12} \le 0 \Leftrightarrow 2(x-4) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$ αφού $x^2-4x-12<0$ στο $(-2,6)$.

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[4,6)$.

Όμοια $f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 4$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-2,4]$.

Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 4 και επίσης ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(4,f(4))$, οπότε το $A(4,f(4))=(4,0)$ είναι σημείο καμπής.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xf(x)=F(x)-8x^5$, **(1)** με την F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ και $F(2)=0$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f'.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x\neq 0$ έχουμε: $f(x)=\frac{1}{x}F(x)-8x^4,(2)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη διότι: οι συναρτήσεις $F(x),\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμες οπότε και το γινόμενο τους είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης η $-8x^4$ είναι παραγωγίσιμη οπότε $f(x)=\frac{1}{x}F(x)-8x^4$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

ii. Επειδή η συνάρτηση $F(x)$ είναι μια παράγουσα της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$, θα έχουμε $F'(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$. Από τη σχέση **(1)** για $x\neq 0$ παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f(x)+xf'(x)=F'(x)-40x^4 \Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=f(x)-40x^4 \Leftrightarrow xf'(x)=-40x^4 \Leftrightarrow f'(x)=-40x^3$$

iii. Από ii) έχουμε: $f'(x)=-40x^3$ για κάθε $x\neq 0$.

- Αν $x>0$, τότε: $f(x)=-10x^4+C_1$ **(3)**

  Για $x=2$ η **(1)** δίνει: $6f(2)=-768\Leftrightarrow f(2)=-128$

  Για $x=2$ η **(3)** δίνει: $f(2)=-160+C_1$ οπότε: $-160+C_1=-128\Leftrightarrow C_1=32$.

  Άρα $f(x)=-10x^4+32$ για κάθε $x>0$.

- Αν $x<0$, τότε: $f(x)=-10x^4+C_2$ **(4)**

  Για $x=-2$ έχουμε: $f(-2)=-160+C_2$ και επειδή f άρτια
  $f(-2)=f(2)\Leftrightarrow -160+C_2=-128\Leftrightarrow C_2=32$

Άρα $f(x) = -10x^4 + 32$ για κάθε $x < 0$

- Αν $x = 0$, τότε επειδή f συνεχής έχουμε: $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(-10x^4 + 32) = 32$

  Άρα $f(x) = -10x^4 + 32$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Είναι: $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2} (-10x^4 + 32)dx =$

$= [-2x^5 + 32x]_{-2}^{2} =$

$= -2\cdot 2^5 + 32\cdot 2 - [-2\cdot(-2)^5 + 32\cdot(-2)] =$

$= -64 + 64 - (64 - 64) = 0$.

Άσκηση 7

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν
$-4f(x)f'(x)+x^3+2=f^6(x)-3xf^4(x)+3x^2f^2(x),(1)$ και $f^2(x)\neq x$ με $f(0)=1$.

i. Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_{f^2} στο σημείο $M\left(0,f^2(0)\right)$.

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{e-1}\left(f^4(x)-2xf^2(x)\right)dx+\int_0^{e-1}x^2dx$.

Λύση

i. Η σχέση **(1)** γίνεται $-4f(x)f'(x)+2=f^6(x)-3xf^4(x)+3x^2f^2(x)-x^3\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2\left(f^2(x)-x\right)'=\left(f^2(x)-x\right)^3\overset{f^2(x)-x\neq0}{\Leftrightarrow}-2\frac{\left(f^2(x)-x\right)'}{\left(f^2(x)-x\right)^3}=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\left(f^2(x)-x\right)^2}\right)'=1$$

Οπότε $\dfrac{1}{\left(f^2(x)-x\right)^2}=x+c,\ c\in\mathbb{R}.$

Για $x=0\Rightarrow\dfrac{1}{\left(f^2(0)-0\right)^2}=0+c\Rightarrow\dfrac{1}{(1-0)^2}=c\Rightarrow c=1$. Άρα $\dfrac{1}{\left(f^2(x)-x\right)^2}=x+1,(2)$.

Η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-x$ είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $g(0)=f^2(0)=1>0\Rightarrow g(x)>0$

Από **(2)** έχουμε $\dfrac{1}{f^2(x)-x}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow f^2(x)-x=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow f^2(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_{f^2} στο $M\left(0,f^2(0)\right)$ είναι
$y-f^2(0)=2f(0)f'(0)(x-0),(3)$

Στη σχέση **(1)** θέτουμε $x=0\Rightarrow-4f(0)f'(0)+0^3+2=f^6(0)-3\cdot0\cdot f^4(0)+3\cdot0^2\cdot f^2(0)\Rightarrow$

$-4f'(0)+2=1\Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{4}$, οπότε η **(3)** γίνεται $y-1=2\cdot1\cdot\dfrac{1}{4}x\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$

$$I=\int_0^{e-1}\left(f^4(x)-2xf^2(x)\right)dx+\int_0^{e-1}x^2dx=\int_0^{e-1}\left(f^4(x)-2xf^2(x)+x^2\right)dx=$$

$$\int_0^{e-1}\left(f^2(x)-x\right)^2dx=\int_0^{e-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2dx=\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx=\left[\ln(x+1)\right]_0^{e-1}=\ln(e-1+1)-\ln 1=1$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(1)=f(1)=1$, $f(x)>0$ και $x^3f''(x)-xf'(x)+2f(x)=0$ για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{\frac{x-1}{x}}$, $x>0$.

ii. Μελετήστε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Αποδείξτε ότι $2\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_{f(1)}^{f(2)}\left(f^{-1}\right)^2(x)\,dx=4\sqrt{e}-1$.

<u>Λύση</u>

i. $x^3f''(x)-xf'(x)+2f(x)=0\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}x^4f''(x)-x^2f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^4f''(x)=x^2f'(x)-2xf(x)\Leftrightarrow f''(x)=\frac{x^2f'(x)-(x^2)'f(x)}{x^4}\Leftrightarrow f''(x)=\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'$$

Τότε υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}+c_1$ και για $x=1$ έχουμε

$f'(1)=f(1)+c_1\Rightarrow c_1=0$, οπότε ισχύει

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\ln(f(x))\right)'=\left(-\frac{1}{x}\right)' .$$

Τότε υπάρχει $c_2\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\ln\left(f(x)\right)=-\frac{1}{x}+c_2$ και για $x=1$ έχουμε

$\ln\left(f(1)\right)=-1+c_2\Rightarrow c_2=1$, οπότε ισχύει

$$\ln\left(f(x)\right)=-\frac{1}{x}+1\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)=\frac{x-1}{x}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x-1}{x}}\ ,\ x>0.$$

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(e^{\frac{x-1}{x}}\right)'=e^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)'=e^{\frac{x-1}{x}}\frac{x-(x-1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}e^{\frac{x-1}{x}}>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f=(0,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f θα είναι $f(A_f)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,e)$ γιατί:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{x-1}{x}}=\lim_{u\to-\infty}e^u=0 \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to0^+}u=\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-(+\infty)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x-1}{x}}=\lim_{y\to1}e^y=e \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)=1.$$

iii. Θέτουμε $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y)\,dy$. Για $x = f(1)$ έχουμε $y = 1$ και για $x = f(2)$ έχουμε $y = 2$.

Έχουμε λοιπόν

$$2\int_1^2 xf(x)\,dx + \int_{f(1)}^{f(2)} \left(f^{-1}\right)^2(x)\,dx = 2\int_1^2 xf(x)\,dx + \int_1^2 y^2 f'(y)\,dy =$$

$$2\int_1^2 xf(x)\,dx + \left[y^2 f(y)\right]_1^2 - 2\int_1^2 yf(y)\,dy + \left[y^2 f(y)\right]_1^2 = 4f(2) - f(1) = 4e^{\frac{1}{2}} - 1 = 4\sqrt{e} - 1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και ισχύει $xf'(x)=2x+1$, για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=2x+\ln x$, $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι:

$$2x+\ln x\le 3x-1$$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2-\int_1^2 f(x)\,dx}{x-2}-\dfrac{\int_1^2 f(x)\,dx-3}{x-1}=0$ έχει, ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1,2)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι $xf'(x)=2x+1\Leftrightarrow f'(x)=2+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'$

Άρα $f(x)=2x+\ln x+c$, $c\in\mathbb{R}$ και για $x=1$ δίνει: $f(1)=2+c$.

Επομένως: $2+c=2\Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=2x+\ln x, x>0$.

ii. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'=2+\dfrac{1}{x}>0$ και $f''(x)=\left(2+\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}<0$, για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

iii. Είναι:

- $f(1)=2$
- $f'(1)=2+1=3$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι: $y-2=3(x-1)$ ή $y=3x-1$ και επειδή η $f(x)=2x+\ln x$ κοίλη (από iii.) έχουμε: $2x+\ln x\le 3x-1$. Η ισότητα ισχύει για $x=1$.

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-1)\left(2-\int_1^2 f(x)\,dx\right)-(x-2)\left(\int_1^2 f(x)\,dx-3\right)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $g(1)=\int_1^2 f(x)\,dx-3>0$ και $g(2)=2-\int_1^2 f(x)\,dx<0$ γιατί: Αφού $x>1 \Leftrightarrow \ln x>0$, οπότε

$$f(x)=2x+\ln x>2x \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx>2\int_1^2 x dx=2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=3 \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx-3>0$$ και

$$\int_1^2 f(x)\,dx-3>0 \Rightarrow -\int_1^2 f(x)\,dx<-3 \Rightarrow 2-\int_1^2 f(x)\,dx<2-3=-1<0 \ .$$

Δηλαδή έχουμε $g(1)g(2)<0$. Άρα ισχύει το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ έτσι ώστε $g(x_0)=0$.

Επειδή $g'(x)=\left(2-\int_1^2 f(x)\,dx\right)-\left(\int_1^2 f(x)\,dx-3\right)=\underset{(-)}{g(2)}-\underset{(+)}{g(1)}<0$, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2)$, οπότε η ρίζα της x_0 είναι μοναδική.

Άσκηση 3

Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x>0$.

iii. Αν ισχύει $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x>0$ και $\lambda>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(\dfrac{2e}{x}+2\ln x\right)'=\dfrac{-2e}{x^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-e)}{x^2}$

Είναι:

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<e$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>e$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f για $x=e$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Δηλαδή $f(x)\geq f(e)$ με τιμή $f(e)=2+2=4$.

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$. Ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln e^{x-e} \Leftrightarrow$$

$$x\ln\frac{x}{e} \geq x-e \Leftrightarrow x(\ln x-\ln e)\geq x-e \Leftrightarrow x\ln x - x \geq x-e \Leftrightarrow$$

$$x\ln x-2x+e\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x-2+\frac{e}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$2\ln x+\dfrac{2e}{x}\geq 4 \Leftrightarrow f(x)\geq 4$ που ισχύει από i). (Η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα)

iii. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x} \geq \lambda^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{x} \geq \ln\lambda^{x-e} \Leftrightarrow x(\ln x-\ln e) \geq (x-e)\ln\lambda \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda \geq 0$ **(1)**

Έστω η συνάρτηση $g(x)=x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda, x>0$ και $\lambda>0$, τότε:

$$g'(x)=\ln x+1-1-\ln\lambda=\ln x-\ln\lambda$$

Από **(1)** έχουμε: $g(x)\geq 0$, για κάθε $x>0$. Αλλά $g(e)=0$. Άρα $g(x)\geq g(e)$ για κάθε $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x=e$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο οπότε από το θεώρημα Fermat έχουμε:

$$g'(e)=0 \Leftrightarrow \ln e-\ln\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=e.$$

iv. Είναι: $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x, x>0$

Παρατηρούμε ότι:

$1\leq x\leq e^2 \Leftrightarrow \ln x\geq 0$ και $\dfrac{2e}{x}>0$, οπότε: $f(x)>0$ στο $[0,e^2]$, άρα

$$E=\int_1^{e^2}\left(\frac{2e}{x}+2\ln x\right)dx=2e\left[\ln x\right]_1^{e^2}+2\int_1^{e^2}\ln x dx=$$

$$=2\cdot e\ln e^2+2\int_1^{e^2}(x)'\ln x dx=4e+2\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=4e+2e^2\ln e^2-(e^2-1)=4e+4e^2-e^2+1=3e^2+4e+1.$$

Άσκηση 4

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν
$f''(x)f(x)+(f'(x))^2=f'(x)f(x),(1)$, $f(0)=1$ και $f'(0)=\frac{1}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x/2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-2}^{2}x^{2018}\ln f(x)dx=0$.

γ) Αν η συνεχής συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x-2017\int_0^x\frac{g(t)}{2017+f^2(t)}dt=1$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,1]$.

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε $f''(x)f(x)+(f'(x))^2=f'(x)f(x)\Leftrightarrow(f'(x)f(x))'=f'(x)f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(f'(x)f(x))'e^{-x}-f'(x)f(x)e^{-x}=0\Leftrightarrow(f'(x)f(x)e^{-x})'=0.$ Οπότε
$f'(x)f(x)e^{-x}=c,\ c\in\mathbb{R}$. **(2)**

Για $x=0\Rightarrow f'(0)f(0)=c\Rightarrow 1\cdot\frac{1}{2}=c\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

Η **(2)** γίνεται $f'(x)f(x)e^{-x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=e^x\Leftrightarrow(f^2(x))'=(e^x)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^x+c_1$

Για $x=0\Rightarrow f^2(0)=1+c_1\Rightarrow 1=1+c_1\Rightarrow c_1=0$, οπότε $f^2(x)=e^x$

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}:f(x_0)=0\Rightarrow f^2(x_0)=e^{x_0}\Rightarrow 0=e^{x_0}$ άτοπο, οπότε $f(x)\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο .

Έχουμε $f(0)=1>0\Rightarrow f(x)>0$, άρα $f^2(x)=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x}{2}},\ x\in\mathbb{R}$.

β) $\int_{-2}^{2}x^{2018}\ln f(x)dx=\int_{-2}^{2}x^{2018}\ln e^{\frac{x}{2}}dx=\int_{-2}^{2}x^{2018}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^{2019}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{2020}}{2020}\right]_{-2}^{2}=$

$=\frac{1}{4040}\left[2^{2020}-(-2)^{2020}\right]=\frac{1}{4040}\left(2^{2020}-2^{2020}\right)=0$.

γ) Εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στη συνάρτηση $h(x)=2x-1-\int_0^x \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής σαν έκφραση συνεχών συναρτήσεων
- $h(0)=2\cdot 0-1-\int_0^0 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt=-1<0$ και

$h(1)=2\cdot 1-1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt=1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt \overset{(*)}{\geq} 0$

$(*)$ Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)$ είναι το $[0,1]$, οπότε

$0\leq g(t)\leq 1 \Rightarrow \int_0^1 0dt \leq \int_0^1 g(t)dt \leq \int_0^1 1dt \Rightarrow 0\leq \int_0^1 g(t)dt \leq 1$, επίσης έχουμε

$\frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)} \leq \frac{2017g(t)}{2017}=g(t) \Rightarrow \int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt \leq \int_0^1 g(t)dt \leq 1 \Rightarrow 0\leq 1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt$ Άρα $h(0)h(1)\leq 0$

- Αν $h(0)h(1)<0 \Rightarrow x_0 \in (0,1): h(x_0)=0$
- Αν $h(1)=0 \Rightarrow x_0=1$, τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1]: h(x_0)=0$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x-1$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda>0$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)$.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2,f(e^2))$.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα xx'.

<u>Λύση</u>

i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>e$ τότε: $E(\lambda)=\int_e^\lambda f(x)dx=\int_e^\lambda(\ln x-1)dx=\int_e^\lambda(x)'\ln xdx-(\lambda-e)=$

$$=[x\ln x]_e^\lambda-\int_e^\lambda x\cdot\frac{1}{x}dx-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-e-(\lambda-e)-\lambda+e=$$

$=\lambda\ln\lambda-e-\lambda+e-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e$ (Αφού $e<x<\lambda$ το $\ln x>1$)

- Αν $0<\lambda<e$, τότε

$$E(\lambda)=\int_\lambda^e(-f(x))dx=\int_\lambda^e(1-\ln x)dx=(e-\lambda)-\int_\lambda^e(x)'\ln xdx=$$

$$=e-\lambda-[x\ln x]_\lambda^e+\int_\lambda^e x(\ln x)'dx=$$

$$=e-\lambda-e+\lambda\ln\lambda+(e-\lambda)=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e.$$

ii.Έχουμε: $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln\lambda-2\lambda+e)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda\ln\lambda-0+e=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\dfrac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}}+e=$

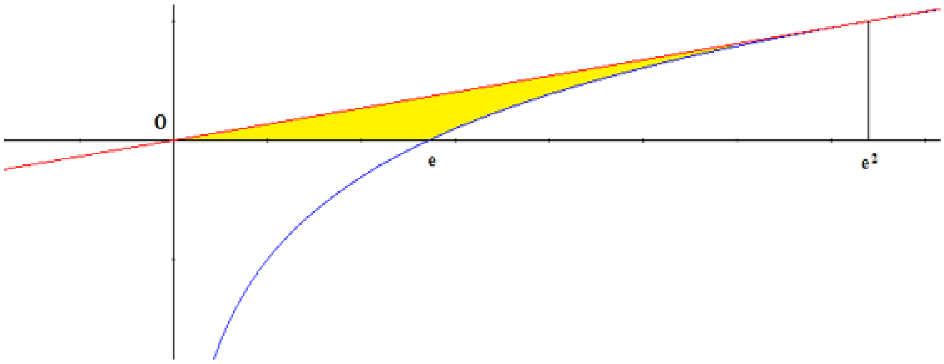
$$=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{(\ln\lambda)'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'}+e=\lim_{\lambda\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}\right)+e=\lim_{\lambda\to0^+}(-\lambda)+e=e.$$

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e^2, f(e^2))$ είναι:
$y - f(e^2) = f'(e^2)(x - e^2)$

Αλλά $f(e^2) = \ln e^2 - 1 = 1$ και $f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$. Αφού $f'(x) = \frac{1}{x}$

Άρα η εξίσωση είναι: $y - 1 = \frac{1}{e^2}(x - e^2)$ ή $y = \frac{1}{e^2}x$.

iv. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, άρα f κοίλη, οπότε η γραφική παράσταση της εφαπτομένης στο Μ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.



Επομένως:

$$E = \int_0^{e^2} \frac{1}{e^2} x dx - \int_e^{e^2} (\ln x - 1) dx =$$

$$= \frac{1}{e^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln x dx + (e^2 - e) = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{e^4}{2} - \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - [x \ln x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} x \frac{1}{x} dx + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e^2 \ln e^2 + e \ln e + e^2 - e + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2\cancel{e^2} + \cancel{e} + \cancel{e^2} - \cancel{e} + \cancel{e^2} - e = (\frac{e^2}{2} - e) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)$

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x+2}^{x+3} f(t)\,dt=+\infty$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)\,dt=0$.

Λύση

i. Πρέπει $e^{2x}-1>0 \text{ και } 2x>0 \Leftrightarrow e^{2x}>e^{0} \text{ και } x>0 \Leftrightarrow x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^{2x}-1\right)\right)'-\left(\ln(2x)\right)'=\frac{1}{e^{2x}-1}\left(e^{2x}-1\right)'-\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}=$$

$\dfrac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x\left(e^{2x}-1\right)}=\dfrac{g(x)}{x\left(e^{2x}-1\right)}$, όπου $g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1$.

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1$, έτσι έχουμε $g'(x)=2e^{2x}+4xe^{2x}-2e^{2x}=4xe^{2x}>0$ με $\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(2xe^{2x}-e^{2x}+1\right)=0$

x	0	$+\infty$
g'		$+$
g		0 ↗

Άρα $x>0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow$

Επίσης

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)\right)=\lim_{x\to0}\left(\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right)\overset{(*)}{=}\lim_{u\to1}\ln u=0,\quad (*)\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{2}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right]\overset{(**)}{=}\lim_{y\to+\infty}\ln y=+\infty,$$

$$(**)\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2}=+\infty$$

Ακρότατα η συνάρτηση f δεν έχει

Επειδή $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο

$$f(D_f)=\left(\lim_{x\to0^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty).$$

ii. Αν $x+2<t<x+3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x+2)<f(t)<f(x+3) \Rightarrow \int_{x+2}^{x+3} f(x+2)dt < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < \int_{x+2}^{x+3} f(x+3)dt$

$$f(x+2)\int_{x+2}^{x+3} 1dt < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < f(x+3)\int_{x+2}^{x+3} 1dt \Rightarrow f(x+2) < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < f(x+3)$$

$\Leftrightarrow \ln\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < \ln\frac{e^{2(x+3)}-1}{2(x+3)}$ **(1)** και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2(x+2)}-1\right)'}{\left(2(x+2)\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2(x+2)}}{2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} = +\infty$$

Όμοια $\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2(x+3)}-1}{2(x+3)} = +\infty$

άρα από το κριτήριο της παρεμβολής η **(1)** μας δίνει: $\lim_{x\to+\infty}\int_{x+2}^{x+3} f(t)\,dt = +\infty$

iii. Αν $\frac{2}{x}<t<\frac{3}{x} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{2}{x}\right)<f(t)<f\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f\left(\frac{2}{x}\right)dt < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f\left(\frac{3}{x}\right)dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}f\left(\frac{2}{x}\right) < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < \frac{1}{x}f\left(\frac{3}{x}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) < x\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < f\left(\frac{3}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$\ln\left(\frac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)dt < \ln\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right)$, **(1)**

έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) \overset{\frac{2}{x}=h}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{e^{2h}-1}{2h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{2e^{2h}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) = \ln 1 = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right) \overset{\frac{3}{x}=h}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{e^{2h}-1}{2h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{2e^{2h}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right) = \ln 1 = 0$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής στη σχέση **(1)**, έτσι έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)\,dt = 0$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3+x-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iv. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Από i) έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x^3+x-2)=0-\infty-\infty-2=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x^3+x-2)=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι: $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$.

iv. Είναι: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $x=f(y)$, οπότε είναι: $dx=f'(y)dy$. Επίσης: $f(0)=-1$ και $f(1)=e$. Άρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι 0 και 1.

Επομένως:

$$I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx=\int_0^1 f^{-1}(f(y))f'(y)dy=\int_0^1 yf'(y)dy=[yf(y)]_0^1-\int_0^1 (y)'f(y)dy=$$

$$=1\cdot f(1)-0-\int_0^1 f(y)dy=f(1)-\int_0^1(e^y+y^3+y-2)dy=e-[e^y+\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}-2y]_0^1=$$

$$e-[e+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2-(e^0+0+0-0)]=\cancel{e}-\cancel{e}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2+1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3=\frac{9}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ και F μία παράγουσά της στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$ με $F(0)=1$.

i. Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F\big(F'(x)-2017\big)=1$, έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.
iii. Να αποδείξετε ότι $F(x+2)-F(x+1)>f(x)$ για κάθε $x>0$.
iv. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου της C_F, με τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $2E>3$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ και αφού η F μία παράγουσά της θα έχουμε $F'(x)=f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}>0$ για κάθε $x>-1$. Άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

Επίσης $F''(x)=f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)'=\dfrac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\dfrac{x\,e^x}{(x+1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.

x	-1 ∞	0	+
F″	-		+
F			

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση F είναι κοίλη στο $(-1,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Έχει στο $A=\big(0,F(0)\big)=(0,1)$ έχουμε σημείο καμπής.

ii. $F\big(F'(x)-2017\big)=1 \Leftrightarrow F\big(F'(x)-2017\big)=F(0) \overset{F:1-1}{\Leftrightarrow} F'(x)-2017=0 \Leftrightarrow F'(x)=2017 \Leftrightarrow$
$f(x)=2017$ **(1).**
Αφού η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ τότε η συνάρτηση F' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής το σύνολο τιμών της θα είναι
$f(A)=\Big[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\Big)=[1,+\infty)$, γιατί:

$f(0)=\dfrac{e^0}{0+1}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{(x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

Επειδή το $2017 \in f(A)$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$ θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,+\infty)$ έτσι ώστε

$$f(x_0)=2017 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} F\left(F'(x_0)-2017\right)=1 .$$

iii. Για $x>0$, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο $[x+1,x+2] \subseteq (0,+\infty)$ για την συνάρτηση F. Τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x+1,x+2)$ έτσι ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(x+2)-F(x+1)}{x+2-x-1}=F(x+2)-F(x+1) \ .$$

Όμως

$$\xi \in (x+1,x+2) \Leftrightarrow 0<x<x+1<\xi<x+2 \overset{F':\,\gamma\nu.\,\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} F'(x)<F'(\xi) \Leftrightarrow f(x)<F(x+2)-F(x+1)$$

iv. Αφού η συνάρτηση F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, θα έχουμε:

$x>0 \overset{F:\,\gamma\nu.\,\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} F(x)>F(0)=1>0$, οπότε $E=\int_0^1 F(x)\,dx$.

Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο καμπής της $A=(0,1)$ είναι:

$y-F(0)=F'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x+1$ και επειδή η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ θα ισχύει: $F(x)\geq y$ και το ¨=¨ ισχύει για $x=0$.

Άρα θα έχουμε:

$$F(x)>y \Rightarrow \int_0^1 F(x)\,dx > \int_0^1 (x+1)\,dx \Rightarrow E>\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 \Rightarrow E>\frac{3}{2} \Rightarrow 2E>3 .$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x+1,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x)=\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)'=\frac{-e}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x^2}$

και επειδή $f'(x)>0\Leftrightarrow x>e$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow x<e$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ και για $x=e$ παρουσιάζει ακρότατο το $f(e)=\frac{e}{e}+\ln e+1=3$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e+x\ln x+x}{x}\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$.

Άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x^2}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)=0+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+0=0$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

iii. Έστω $g(x)=f(x)-3^{x-1}$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο [1,4] και για την οποία ισχύει: $g(1)\cdot g(4)<0$ αφού

- $g(1)=f(1)-3^0=e+\ln 1+1-1=e>0$
- $g(4)=f(4)-3^3=\dfrac{e}{4}+\ln 4+1-3^3<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Είναι:

$1\le x\le e^2 \Leftrightarrow \ln x\ge 0$ και $\dfrac{e}{x}>0$. Άρα $f(x)=\dfrac{e}{x}+\ln x+1>0$ για κάθε $x\in[1,e^2]$. Επομένως έχουμε:

$$E=\int_1^{e^2}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)dx=\int_1^{e^2}\frac{e}{x}dx+\int_1^{e^2}\ln x dx+1\cdot(e^2-1)=$$

$$=e\left[\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}(x)'\cdot\ln x dx+e^2-1=$$

$$=e\cdot(\ln e^2-\ln 1)+\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx+e^2-1=$$

$$=2e+e^2\ln e^2-1\cdot(e^2-1)+e^2-1=2e+2e^2 \text{ τ.μ}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3, x>0$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: y=3x$ να υπολογίσετε το λ.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=e$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3\right)'=2\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+\lambda=2\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}+\lambda=$$

$$=2\frac{1-\ln x}{x^2}+\lambda\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+\lambda .$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι:

$f'(1)=\frac{2-0}{1}+\lambda=2+\lambda$ και επειδή είναι παράλληλη προς την ευθεία ε ισχύει:

$2+\lambda=3\Leftrightarrow\lambda=1$. Άρα $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+x+3, x>0$ και $f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+1$.

ii. Για κάθε $x>0$ είναι: $f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+1=\frac{2-2\ln x+x^2}{x^2}$.

Έστω $g(x)=x^2-2\ln x+2, x>0$.

Είναι: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$

$g'(x)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1$.

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-1>0 \Leftrightarrow |x|>1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1.$$

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Όμοια g γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Επομένως: $g(x)\geq g(1) \Leftrightarrow g(x)\geq 3>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Είναι:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}+x+3}{x}=$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x^2}+1+\frac{3}{x}\right)=2\cdot 0+1+0=1,$$

  αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x}+x+3-x\right)=$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x}+3\right)=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}+3=$$

  $=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+3=3$. Άρα η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y=x+3$.

iv. $E=\int_1^e |f(x)-x-3|dx=\int_1^e\left|2\frac{\ln x}{x}+\cancel{x}+\cancel{3}-\cancel{x}-\cancel{3}\right|dx=$

$$\int_1^e 2\left|\frac{\ln x}{x}\right|dx\overset{*}{=}2\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=$$

$$=\left[\ell n^2 x\right]_1^e=\ell n^2 e-\ell n^2 1=1.$$

*($1<x<e\Leftrightarrow \ln x>0$ άρα $\frac{\ln x}{x}$ θετικός)

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=-2+\frac{2}{x}$ και $g(x)=3\ln x$, όπου $x\in(0,+\infty)$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x)=f(x)-g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda>0$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)$.

Λύση

i. Είναι:
$h(x)=f(x)-g(x)=-2+\frac{2}{x}-3\ln x=\frac{2}{x}-3\ln x-2$ για κάθε $x>0$.

Άρα $h'(x)=\frac{-2}{x^2}-\frac{3}{x}<0$, οπότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Ακόμα $h(1)=0$.

Επομένως:
Για κάθε $x>1$ είναι $h(x)<h(1)\Leftrightarrow h(x)<0$ και για κάθε $0<x<1$ είναι $h(x)>h(1)\Leftrightarrow h(x)>0$.

ii. Για να προσδιορίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν πρέπει να γνωρίζουμε αν $\lambda>1$ ή $\lambda<1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>1$ τότε:

$$E(\lambda)=\int_1^{\lambda}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_1^{\lambda}|h(x)|\,dx\Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=-\int_1^{\lambda}h(x)dx=-\int_1^{\lambda}\left(\frac{2}{x}-3\ln x-2\right)dx=$$

$$=-2\left[\ln x\right]_1^{\lambda}+3\int_1^{\lambda}(x)'\ln x dx+2(\lambda-1)=$$

$$=-2(\ln\lambda-\ln1)+3[x\ln x]_1^{\lambda}-3\int_1^{\lambda}x\frac{1}{x}dx+2\lambda-2=$$

$$=-2\ln\lambda+3\lambda\ln\lambda-3(\lambda-1)+2\lambda-2=-2\ln\lambda+3\lambda\ln\lambda-3\lambda+3+2\lambda-2=$$

$= (3\lambda - 2)\ln\lambda - \lambda + 1$.

- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε:

  $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} |h(x)|\, dx = \int_{\lambda}^{1} h(x)dx = -\int_{1}^{\lambda} h(x)dx$,

  $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

- Αν $\lambda = 1$ τότε προφανώς $E(1) = 0$. Επομένως $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

iii. Είναι:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}[(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = \lim_{\lambda\to+\infty}(3\lambda\ln\lambda - 2\ln\lambda - \lambda + 1) =$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}[\lambda(3\ln\lambda - 2\frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1 + \frac{1}{\lambda})] = (+\infty)(+\infty - 2\cdot 0 - 1 + 0) = +\infty .$$

Αφού $\lim_{\lambda\to+\infty} \ln\lambda = +\infty$ και $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln\lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$.

iv. Είναι: $\lim_{\lambda\to0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to0^+}\left[\left(3\lambda - 2\right)\ln\lambda + 1 - \lambda\right] = \left[(0-2)\cdot(-\infty) + 1 - 0\right] = +\infty$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε
$$2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f\left(t\right)dt=\int_0^x t^2f^2\left(t\right)dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2dt$$

i. Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

ii. Να βρείτε την συνάρτηση f'.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .

iv. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right)=f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$.

v. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\dfrac{f\left(t\right)}{x}dt$.

Λύση

i. Έχουμε $2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f\left(t\right)dt=\int_0^x t^2f^2\left(t\right)dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2dt\Leftrightarrow$

$$\int_0^x t^2f^2\left(t\right)dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2dt-2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f\left(t\right)dt=0\Leftrightarrow\int_0^x\left(tf\left(t\right)-\left(e^t-1\right)\right)^2dt=0$$

Η συνάρτηση $g\left(t\right)=tf\left(t\right)-\left(e^t-1\right)$ είναι συνεχής ως έκφραση συνεχών συναρτήσεων, αν η $g\left(t\right)$ δεν είναι παντού μηδέν τότε $\left(tf\left(t\right)-\left(e^t-1\right)\right)^2>0$, οπότε θα είχαμε $\int_0^x\left(tf\left(t\right)-\left(e^t-1\right)\right)^2dt>0$, άτοπο άρα

$$g\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left(tf\left(t\right)-\left(e^t-1\right)\right)^2=0\Leftrightarrow tf\left(t\right)-\left(e^t-1\right)=0\Leftrightarrow tf\left(t\right)=e^t-1 \text{ ή } xf\left(x\right)=e^x-1$$

Αν $x\neq 0\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{x}$

Αν $x=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}f\left(0\right)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(x\right)'}=f\left(0\right)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}e^x=f\left(0\right)\Leftrightarrow 1=f\left(0\right)$$

Άρα $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{e^{x}-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

ii. Αν $x\neq 0\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}-1}{x}\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{\left(e^{x}-1\right)'x-\left(e^{x}-1\right)}{x^{2}}=\dfrac{xe^{x}-e^{x}+1}{x^{2}}$

Αν $x=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^{x}-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1-x}{x^{2}}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{2x}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}}{2}=\dfrac{1}{2}$

Άρα $f'\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{xe^{x}-e^{x}+1}{x^{2}}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$

iii. Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g\left(x\right)=xe^{x}-e^{x}+1$

Έχουμε $g'\left(x\right)=\left(xe^{x}-e^{x}+1\right)'=xe^{x}=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$
g'	-	+
g	$\searrow$	**0** $\nearrow$

$\min\ g\left(0\right)=0$

δηλαδή $g\left(x\right)\geq g(0)=0\Rightarrow f'\left(x\right)>0\Rightarrow f\uparrow$

iv. Προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x=0$ και $x=1$

Αν $x>1\Rightarrow x^{2014}<x^{2015}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f\left(x^{2014}\right)<f\left(x^{2015}\right)$, **(1)** και

$x^{2016}<x^{2017}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f\left(x^{2016}\right)<f\left(x^{2017}\right),\left(2\right)\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right)<f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $0<x<1\Rightarrow x^{2014}>x^{2015}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f\left(x^{2014}\right)>f\left(x^{2015}\right)$, **(3)** και

$x^{2016} > x^{2017} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2016}\right) > f\left(x^{2017}\right), (4) \overset{(3)+(4)}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right) + f\left(x^{2016}\right) > f\left(x^{2015}\right) + f\left(x^{2017}\right)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $x < 0 \Rightarrow x^{2014} > x^{2015} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right) > f\left(x^{2015}\right)$, **(5)** και

$x^{2016} > x^{2017} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2016}\right) > f\left(x^{2017}\right), (6) \overset{(5)+(6)}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right) + f\left(x^{2016}\right) > f\left(x^{2015}\right) + f\left(x^{2017}\right)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Άρα μοναδικές ρίζες είναι οι αριθμοί $x = 0$ και $x = 1$

ν. Έστω ότι $x \in (0,1) \Rightarrow x < 2x$, οπότε για κάθε t με

$$x \le t \le 2x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(t) \le f(2x) \Rightarrow \int_x^{2x} f(x)dt \le \int_x^{2x} f(t)dt \le \int_x^{2x} f(2x)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)(2x - x) \le \int_x^{2x} f(t)dt \le f(2x)(2x - x) \Rightarrow xf(x) \le \int_x^{2x} f(t)dt \le xf(2x) \overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x) \le \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt \le f(2x) \Rightarrow f(x) \le \int_x^{2x} \frac{f(t)}{x}dt \le f(2x).$$

Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ και $\lim_{x\to 0^+} f(2x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{x}dt = 1$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln(x\cdot e^{1-x})+2, x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3f(x)+2011=0$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=(3\cdot\ln xe^{1-x}+2)'=3\frac{1}{xe^{1-x}}(xe^{1-x})'=$$

$$=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}\cdot(e^{1-x}+x(e^{1-x})')=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}(e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}(1-x)')=$$

$$=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}\cdot e^{1-x}\cdot(1-x)=\frac{3(1-x)}{x}$$

Έχουμε:

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{3(1-x)}{x}>0\Leftrightarrow x<1$ αφού $x>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{3(1-x)}{x}<0\Leftrightarrow x>1$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\geq 1$.
Άρα η f για $x=1$ παρουσιάζει ακρότατο με τιμή $f(1)=3\ln 1+2=2$ που είναι η μέγιστη

ii. Το σύνολο τιμών θα είναι: $f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),f(1)]\cup(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[3\ln(x\cdot e^{1-x})+2]=3\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x\cdot e^{1-x})+2=-\infty$ αφού

  $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot e^{1-x})=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[3\ln(x\cdot e^{1-x})+2]=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0 .$$

- $f(1) = 2$

Άρα $f((0,+\infty)) = (-\infty, 2]$.

iii. Είναι: $3f(x) + 2011 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-2011}{3}$

Έστω $g(x) = f(x) + \frac{2011}{3}$ τότε $g'(x) = f'(x)$, οπότε η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f

$g((0,1]) = (-\infty, 2 + \frac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] έχει μοναδική ρίζα σε αυτό.

Άρα και η $f(x) + \frac{2011}{3} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1].

$g([1,+\infty)) = (-\infty, 2 + \frac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα.

Άρα και η $f(x) + \frac{2011}{3} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $3f(x) + 2011 = 0$ έχει δύο λύσεις, μία στο (0,1] και μία στο $[1,+\infty)$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Το iii) μπορεί να λυθεί και με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

iv. Είναι:

- $f(1) = 2$

- $f(2) = 3\ln\left(\frac{2}{e}\right) + 2 = 3\ln 2 - 3\ln e + 2 = 3\ln 2 - 1 > 0$ και επειδή f γνησίως φθίνουσα

  $f([1,2]) = [3\ln 2 + 1, 2]$ δηλαδή $f(x) > 0$ στο [1,2].

  Επίσης $f(x) = 3\ln x + 3\ln e^{1-x} + 2 = 3\ln x + 3(1-x) + 2 = 3\ln x + 5 - 3x$.

  Άρα $E = \int_1^2 f(x)dx = 3\int_1^2 \ln x dx + \int_1^2 (5-3x)dx = 3\int_1^2 (x)'\ln x dx + [5x - \frac{3}{2}x^2]_1^2 =$

  $= 3[x\ln x]_1^2 - 3\int_1^2 x\cdot(\ln x)'dx + 10 - \frac{3}{2}\cdot 4 - 5 + \frac{3}{2} =$

  $= 3\cdot(2\ln 2 - 0) - 3\int_1^2 1dx + 10 - 6 - 5 + \frac{3}{2} = 6\ln 2 - 3(2-1) + \frac{3}{2} - 1 =$

  $= 6\ln 2 - \frac{5}{2}$ τ.μ.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=2x^4+3\ln x+2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda>0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. Αν η f^{-1}, η αντίστροφη της f, είναι συνεχής, και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^4 f^{-1}(t)dt$.

Λύση

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=8x^3+\frac{3}{x}>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

ii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x^4+3\ln x+2)=0-\infty+2=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+3\ln x+2)=+\infty+\infty+2=+\infty$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, από i), άρα το σύνολο τιμών της είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Για κάθε $\lambda>0$ έχουμε:

$$\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1\Leftrightarrow 2\lambda^4=3(\ln1-\ln\lambda)-2\Leftrightarrow 2\lambda^4=-3\ln\lambda-2\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4+3\ln\lambda+2=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$, τέτοιο ώστε $f(\lambda)=0$.

Αυτό ισχύει αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

(ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ) και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

iv.Η συνάρτηση f επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε $t=f(x)\Leftrightarrow dt=f'(x)dx$. Για $t=0$ είναι $0=f(x)\Leftrightarrow x=\lambda$.

Για $t=4$ είναι $4=f(x)\Leftrightarrow f(1)=f(x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Επομένως:

$$\int_0^4 f^{-1}(t)dt=\int_\lambda^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx=\int_\lambda^1 xf'(x)dx=\int_\lambda^1 x\cdot\left(8x^3+\frac{3}{x}\right)dx=$$

$$\int_\lambda^1(8x^4+3)dx=\left[8\frac{x^5}{5}+3x\right]_\lambda^1=\frac{8}{5}+3-\left(\frac{8}{5}\lambda^5+3\lambda\right)=-\frac{8}{5}\lambda^5-3\lambda+\frac{23}{5}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 22/04/2017

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- «*Αν η συνάρτηση* f *ορίζεται στο* x_0 *τότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την* $x = x_0$ ».

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Ψ

2) Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

Δηλαδή η κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *« Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ μπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f ».*

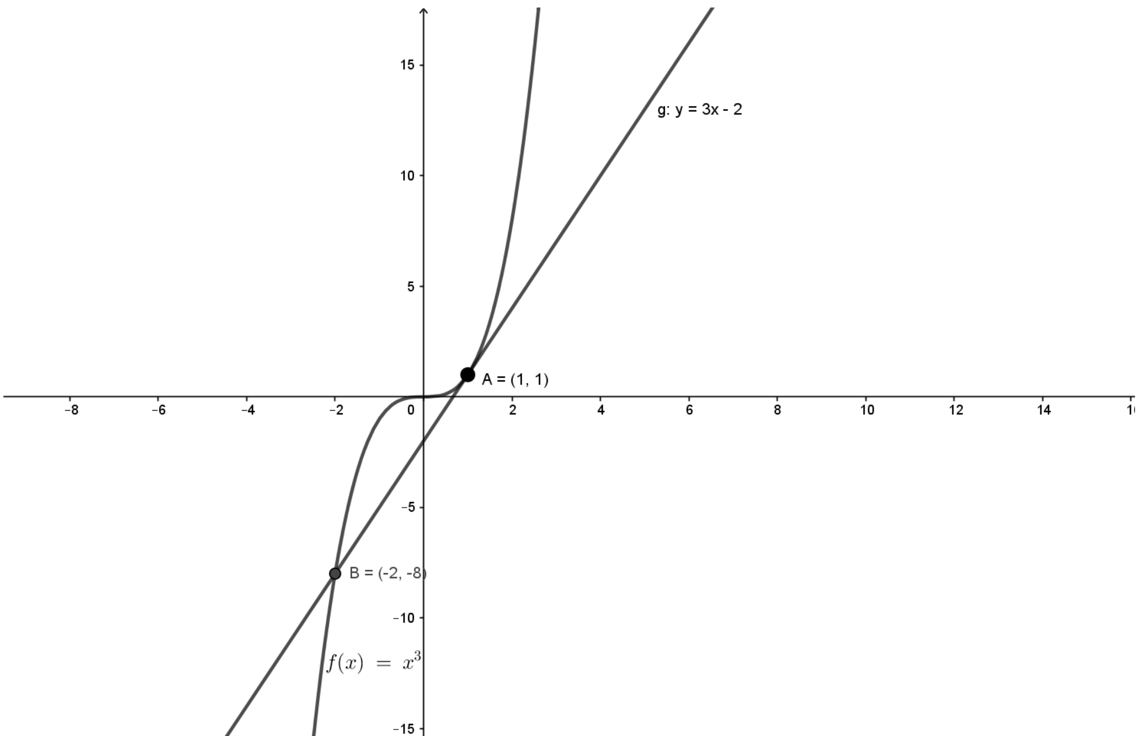
1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{f(x)=x^3}$ και την εφαπτομένη της στο $\mathrm{A}(1,1)$ την $\mathrm{y=3x-2}$ η οποία τέμνει την $\mathrm{C_f}$ και στο σημείο $\mathrm{B}(-2,-8)$ όπως βλέπουμε και στο σχήμα.



Άσκηση 3

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν η συνάρτηση* $f:\Delta \to \mathbb{R}$ *αντιστρέφεται και η* f^{-1} *είναι παραγωγίσιμη στο* $f(\Delta)$ *με* $f'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in \Delta$ *, τότε* $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$, $x \in f(\Delta)$ ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Πράγματι: Για κάθε $x \in f(\Delta)$ ισχύει

$$f\left((f^{-1})(x)\right) = x \Rightarrow \left[f\left((f^{-1})(x)\right)\right]' = (x)' \Rightarrow f'\left((f^{-1})(x)\right)(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left((f^{-1})(x)\right)},\ x \in f(\Delta).$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *« Μπορεί δύο συναρτήσεις f, g να μην είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους και η συνάρτηση $f+g$ να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$.

Όμως η συνάρτηση $f + g$ έχει τύπο $(f + g)(x) = x$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και γνησίως αύξουσα τότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle»*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha<\beta \Rightarrow f(\alpha)<f(\beta)$. άρα $f(\alpha)\neq f(\beta)$ οπότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *να ισχύουν το Θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano»*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Αν ισχύει το θεώρημα του Bolzano έχουμε $f(\alpha)f(\beta)<0,(1)$ και αν ισχύει το θεώρημα του Rolle έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)$ οπότε η (1) γίνεται $f^2(\alpha)<0$ άτοπο.

Άσκηση 7

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση* $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του* $Rolle$ *τότε και η συνάρτηση* $g(x)=(fof)(x)$ *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του* $Rolle$ *στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$*».*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α
2) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , οπότε και η σύνθεση $(\mathrm{fof})(\mathrm{x})$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Επίσης ισχύει $\mathrm{f}(\alpha)=\mathrm{f}(\beta)$ και επειδή $\mathrm{f}(\alpha),\mathrm{f}(\beta)\in[\alpha,\beta]\Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{f}(\alpha))=\mathrm{f}(\mathrm{f}(\beta))\Rightarrow(\mathrm{fof})(\alpha)=(\mathrm{fof})(\beta)$. Άρα η συνάρτηση $\mathrm{g}(\mathrm{x})=(\mathrm{fof})(\mathrm{x})$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν ισχύει $f'(x)<0$ και $g'(x)>0$ για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$ τότε πάντα οι γραφικές παραστάσεις των f,g θα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο »*.

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Ψ
2) Οι συναρτήσεις $\mathrm{f}(\mathrm{x})=-\mathrm{e}^{\mathrm{x}},\mathrm{g}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, προφανώς δεν έχουν κοινό σημείο αλλά $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=-\mathrm{e}^{\mathrm{x}}<0,\ \ \mathrm{g}'(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}>0$.

Άσκηση 9

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε*

$f'(x_1) < f'\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < f'(x_2)$ *».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α

2) Έχουμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $x_1 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < f'(x_2)$.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη έχει τρία σημεία συνευθειακά τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α
2) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ τα τρία συνευθειακά σημεία.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$, οπότε υπάρχουν τουλάχιστον, δύο σημεία $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$, $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ έτσι ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $M(\xi_1, f(\xi_1)), N(\xi_2, f(\xi_2))$ είναι παράλληλες στην ευθείας (ε).
Άρα έχουμε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \lambda_\varepsilon$. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq \Delta$,έτσι ώστε $f''(x_0) = 0$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 25/01/2018