

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

ΒΟΗΘΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Χ. Ψαρουδάκης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://www.math.uoi.gr/~abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html>

16 - 11 - 2011

Άσκηση 1. Να γράψετε αναλυτικά τον 6×6 πίνακα $A = (a_{ij})$ όπου $a_{ij} = \min\{i, j\} + i - j$.

Άσκηση 2. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν, οι ακόλουθοι πολλαπλασιασμοί πινάκων:

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad A \cdot C, \quad C \cdot A, \quad B \cdot C$$

Άσκηση 3. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστεί 3×3 πίνακας X , ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$A + 3X = 2(X - B)$$

Άσκηση 4. Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Ας είναι $AT_n(\mathbb{K})$ (αντιστοίχως $KT_n(\mathbb{K})$) το σύνολο των άνω (αντιστοίχως κάτω) τριγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.

Να δείχθει ότι η τομή $AT_n(\mathbb{K}) \cap KT_n(\mathbb{K})$ των δύο αυτών συνόλων ισούται με το σύνολο των διαγωνίων πινάκων.

Άσκηση 5. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι $A^4 = I_3$ και ο ακολούθως να

δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια να βρείτε τους πίνακες A^{-1} και A^{2011} .

Άσκηση 6. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Βρείτε τον πίνακα A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 7. Για κάθε $n \geq 1$, να βρείτε την n -οστή δύναμη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 8. Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες έτσι ώστε ο πίνακας $A + B^{-1}$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $A^{-1} + B$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$$

Άσκηση 9. Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, να υπολογίσετε τον A^2 και να αποδείξετε ότι $A^2 - 2A - 8I_2 = 0$.

Άσκηση 10. Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας $I_n - (A \cdot B)^2$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι

$$(I_n - (B \cdot A)^2)^{-1} = I_n + B \cdot (I_n - (A \cdot B)^2)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot A$$

Άσκηση 11. Αν για τον $n \times n$ πίνακα A ισχύει $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$, να δείξετε ότι: $A^{-1} = -A^4$.

Άσκηση 12. Θεωρούμε τους $n \times n$ πίνακες A και B , και υποθέτουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: $A + B = A \cdot B$. Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.

Άσκηση 13. Έστω A, B δύο $m \times n$ πίνακες. Για ποιές τιμές των $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$A = B \iff \text{tr}(A) = \text{tr}(B);$$

Άσκηση 14. Έστω A, B, C τρεις πίνακες έτσι ώστε να ορίζονται οι πίνακες $A \cdot B$ και $B \cdot C$. Να δείξετε ότι ορίζονται οι πίνακες $A \cdot (B \cdot C)$, $(A \cdot B) \cdot C$ και επιπλέον ισχύει: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

ΒΟΗΘΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Χ. Ψαρουδάκης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://www.math.uoi.gr/~abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html>

23 - 11 - 2011

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \end{vmatrix}$.

Άσκηση 4. Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \quad (\text{ορίζουσα VANDERMONDE}).$$

Άσκηση 5. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 + \alpha_1\beta_1 & 1 + \alpha_1\beta_2 & 1 + \alpha_1\beta_3 \\ 1 + \alpha_2\beta_1 & 1 + \alpha_2\beta_2 & 1 + \alpha_2\beta_3 \\ 1 + \alpha_3\beta_1 & 1 + \alpha_3\beta_2 & 1 + \alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ο οποίος ικανοποιεί την σχέση:

$$A^2 + 2 \cdot A = \mathbb{O}$$

Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_3$ είναι αντιστρέψιμος, να βρείτε τον $(A + I_3)^{-1}$, και να υπολογίσετε την ορίζουσα $|A|$ του A .

Άσκηση 7. Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = 0$, όπου $i^2 = -1$.

Άσκηση 8. Να υπολογισθεί η $n \times n$ οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 9. Να υπολογισθεί η $n \times n$ οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 10. Να υπολογισθεί η $n \times n$ οριζουσα $A =$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 11. Να υπολογισθεί η $2n \times 2n$ οριζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 12. Να υπολογισθεί η οριζουσα του ακόλουθου $n \times n$ πίνακα A , όπου $x \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 13. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να έχει η οριζουσα ενός 5×5 πίνακα της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix};$$

(Με « $\star$ » συμβολίζουμε αυθαίρετες τιμές στοιχείων του $\mathbb{K}$).

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

ΒΟΗΘΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Χ. Ψαρουδάκης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://www.math.uoi.gr/~abeligia/LinearAlgebra/LAI.html>

30 - 11 - 2011

Άσκηση 1. Έστω $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Αν $|A| = -3$, τότε να υπολογισθεί η ορίζουσα $|-A^4|$.

Άσκηση 2. Έστω $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Αν ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος, να εξετάσετε αν και ο πίνακας $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 3. Αν $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ και ισχύει ${}^t A = A^{-1}$, ${}^t B = B^{-1}$, να δείξετε ότι:

$$|(A + B) \cdot (A - B)| = |{}^t A \cdot B - {}^t B \cdot A|$$

Άσκηση 4. Έστω $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε ${}^t A = A$. Να δείξετε ότι ${}^t(\text{adj} A) = \text{adj} A$.

Άσκηση 5. Έστω $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας με $n \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι

$$|\text{adj} A| = |A|^{n-1}$$

Άσκηση 6. Έστω $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας με $n \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι

$$\text{adj}(\text{adj} A) = |A|^{n-2} \cdot A$$

Άσκηση 7. Να βρεθεί η ισχυρά κλιμακωτή μορφή του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο A^{-1} με χρήση πράξεων επί των γραμμών του.

Άσκηση 8. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο A^{-1} :

(1) με χρήση του συμπληρωματικού $\text{adj} A$ του A ,

(2) με τη μέθοδο στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών του πίνακα $(A|I_3)$.

Άσκηση 9. Αν ένας από τους πίνακες $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε να δειχθεί ότι:

$$|A \cdot B + I_n| = |B \cdot A + I_n|$$

Άσκηση 10. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

- (1) με τη μέθοδο Cramer,
(2) με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Άσκηση 11. Να λυθούν τα συστήματα:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 11x_4 = 16 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(4) x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 3.$$

Άσκηση 12. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$:

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x + y + z = -6\alpha \\ 2x + y + (\beta + 1)z = 4 \\ \beta x + 3y + 2z = 3\alpha \end{cases}$$

1. Να υπολογισθούν οι τιμές του β για τις οποίες το (Σ) έχει μοναδική λύση.
2. Για τις τιμές β για τις οποίες το (Σ) δεν έχει μοναδική λύση, να λύσετε το (Σ) με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Άσκηση 13. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Άσκηση 14. Αν το πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$, όπου $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \dots, n$, έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες, τότε να δείξετε ότι το $P(t)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

ΒΟΗΘΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Χ. Ψαρουδάκης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://www.math.uoi.gr/~abeligia/LinearAlgebra/LAI.html>

14 - 12 - 2011

Άσκηση 1. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^3$ μαζί με τις πράξεις:

$$\oplus : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad r \odot (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος.

Άσκηση 2. Στο σύνολο των 2×2 πινάκων $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, ορίζουμε δυο πράξεις:

$$\oplus : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad A \oplus B = -(A + B)$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad r \odot A = -(rA)$$

Οι πράξεις στα δεξιά μέλη των ανωτέρω ορισμών είναι οι γνωστές πράξεις πρόσθεσης πινάκων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα. Να εξετάσετε ποια από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι.

Άσκηση 3. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε τις πράξεις:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z_1, z_2) \longmapsto z_1 + z_2$$

και

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (r, z) \longmapsto r \cdot z$$

Να δείξετε ότι η τριάδα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 4. Στο σύνολο $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ ορίζουμε τις πράξεις:

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad (a, b) \longmapsto a \oplus b = ab - 1$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad (r, a) \longmapsto r \odot a = a$$

Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε πράξεις:

$$\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \longmapsto a \oplus b = ab$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda, a) \longmapsto \lambda \odot a = \lambda + a$$

Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6. Να δείχθει ότι το υποσύνολο:

$$\mathcal{V} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a - b, d = a + b\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

αποτελεί έναν $\mathbb{R}$ -υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 7. Να εξετασθεί ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων είναι υπόχωροι:

- (1) $\mathcal{V}_1 = \{(a, b, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.
- (2) $\mathcal{V}_2 = \{(a, b, a + 2b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.
- (3) $\mathcal{V}_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b - c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.
- (4) $\mathcal{V}_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0 \text{ και } c \leq 0\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.
- (5) $\mathcal{V}_5 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid |a| + |b| + |d| = 0\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$.
- (6) $\mathcal{V}_6 = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (7) $\mathcal{V}_7 = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = O\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (8) $\mathcal{V}_8 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (9) $\mathcal{V}_9 = \{f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$, στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}((-1, 1), \mathbb{R})$.

Άσκηση 8. Θεωρούμε το σώμα $\mathbb{K}$ ως $\mathbb{K}$ -διανυσματικό χώρο. Να δείξετε ότι οι μόνοι υπόχωροι του $\mathbb{K}$ είναι οι: $\{0\}$, και $\mathbb{K}$.

Άσκηση 9. Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ είναι $\mathbb{R}$ -υπόχωροι:

- (1) $\mathcal{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \mid b = a + c \right\}$
- (2) $\mathcal{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \mid c > 0 \right\}$

Άσκηση 10. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ πάνω από το $\mathbb{R}$ και τα παρακάτω υποσύνολα αυτού:

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

και

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c + d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

- (1) Να δείξετε ότι οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (2) Να βρεθεί η μορφή των στοιχείων του υποχώρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Άσκηση 11. Έστω $\mathcal{E}$ ένα μη-κενό σύνολο το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

$$\oplus : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (x, y) \longmapsto x + y$$

και

$$\odot : \mathbb{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda \odot x$$

- (1) Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα (1) - (8), ΕΚΤΟΣ από το αξίωμα:

$$x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathcal{E} \quad \text{Αξίωμα (2)}$$

Να δείξετε ότι το αξίωμα (2) ικανοποιείται και επομένως η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ αποτελεί έναν $\mathbb{K}$ -διανυσματικό χώρο.

- (2) Να δείξετε ότι το αξίωμα

$$1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathcal{E} \quad \text{Αξίωμα (8)}$$

στον ορισμό ενός $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ δεν είναι συνέπεια των αξιωμάτων (1)-(7).