ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΛΥΣΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΥΠΟΔΕΞΕΙΣ

Β3. Προτεινόμενες

1. Προσομοιωμένο Διαγώνισμα $4^{ο}$ θέμα $2^{ο}$

2.Θέτουμε $h(x)=e^{x}+x$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

Α) $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}+1=e^{f(x_2)}+1\Rightarrow e^{x_1}+1=e^{x_2}+1\Rightarrow x_1=x_2$

Β) $\ln x=1-x^2\Leftrightarrow \ln x+x^2-1=0$. Θέτω $g(x)=\ln x+x^2-1, x>0$ με $g(1)=0$. Η ρίζα $x_0=1$ είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως μονάτονη άρα και «1-1».

Γ. $h(f(x))=f(x)\Leftrightarrow f(x)=x$

Δ. $e^{x^2}+x^2>e^{x}+x\Rightarrow h(x^2)>h(x)\Rightarrow x^2>x\Rightarrow (x<0 \text{ ή } x>1)$

3. Προσομοιωμένο Διαγώνισμα $2^{ο}$ θέμα $2^{ο}$

4. Προσομοιωμένο Διαγώνισμα $1^{ο}$ θέμα $2^{ο}$

10. Προσομοιωμένο Διαγώνισμα $3^{ο}$ θέμα $2^{ο}$

11. Προσομοιωμένο Διαγώνισμα $5^{ο}$ θέμα $2^{ο}$

12. Προσομοιωμένο Διαγώνισμα $7^{ο}$ θέμα $2^{ο}$

13. Προσομοιωμένο Διαγώνισμα $6^{ο}$ θέμα $2^{ο}$

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ $1^{ου}$

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ορισμός

Α2. Ορισμός

Α3. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$ είναι $\ln x_1<\ln x_2, g(x_1)>g(x_2)$ άρα:

$\ln x_1-g(x_1)<\ln x_2-g(x_2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Β2.

$2\ln x<2+g(x^2)\Leftrightarrow \ln x^2<2+g(x^2)\Leftrightarrow \ln x^2-g(x^2)<2\Leftrightarrow f(x^2)<f(1)\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$

και αφού $x>0$ είναι $0<x<1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Η είναι «1-1» αφού

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(x_1)+1=f(x_2)+1\Rightarrow f(f(x_1)+1)=f(f(x_2)+1)\Rightarrow 2x_1-6=2x_2-6\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=x_2$

β) Για $f(1+f(3))=f(3)\Rightarrow 1+f(3)=3\Rightarrow f(3)=2$

Γ2.

$1+f(x^2+x+1)=1+f(3)\Leftrightarrow f(x^2+x+1)=f(3)\Leftrightarrow x^2+x+1=3\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1, x=-2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x=y=0$ είναι: $f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)=1$

Δ2. Για $x=y$ είναι:

Δ3. $f(0)\neq 0\Rightarrow f(0)=1$

α) Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=0$ τότε:

$f(x_0-x_0)=f^2(x_0)\Rightarrow f(0)=0$ άτοπο

β) Θέτουμε όπου x το $\dfrac{x}{2}$ και έχουμε:

$$f\left(x-\frac{x}{2}\right)=f(x)f\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)f\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)\left[1-f(x)\right]=0$$

και επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα είναι $f(x)-1=0$ ή $f(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ 2ου

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Ψευδής πρόταση. Ισχύει το αντίστροφο.

Αντιπαράδειγμα:

Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Β2. 3

Β3. Συνεχής (ο 2ος κλάδος χρειάζεται και =)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α. $-\dfrac{1}{2}$ **β.** -2

Γ2. $\alpha+\beta=-2$ κλπ.

Γ3. $\lambda=2, \mu=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=4$

Δ2. $f(x)=2x$

Δ3. $a=-2, \beta=2$

Δ4. Θεώρημα Bolzano