ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γ. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ, Α΄ ΜΕΡΟΣ (§2.1 - §2.7)

Δημήτρης Ι. Μπουνάκης

Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

dimitrmp@sch.gr

Ηράκλειο, 8 Δεκεμβρίου 2010

Συνάδελφοι,

Το διδακτικό αυτό υλικό είναι συνέχεια των δυο προηγουμένων- βελτιωμένων- αρχείων στα Μαθηματικά κατεύθυνσης, που σας έχω ήδη στείλει, και αναφέρεται στο Α΄ μέρος του διαφορικού λογισμού, μέχρι και τα ακρότατα (ενότητες 2.1 - 2.7).Το Β΄ μέρος θα περιλαμβάνει το υπόλοιπο μέρος του διαφορικού λογισμού.

Κοινή σχεδόν είναι η πεποίθηση ότι το σχολικό βιβλίο δεν επαρκεί για να βοηθήσει ουσιαστικά τον καθηγητή που διδάσκει στην Γ΄ Λυκείου και απαιτείται ένα συμπλήρωμα, την στιγμή μάλιστα που δεν υπάρχει αντίστοιχο βιβλίο καθηγητή. Αυτό ακριβώς το συμπλήρωμα προσπαθώ με τις σημειώσεις αυτές να υλοποιήσω, έχοντα κατά νου και την σύσταση του G. Polya, ο οποίος στο περίφημο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» γράφει:

«Ο πρώτος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε αυτό που πρόκειται να διδάξετε. Ο δεύτερος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξετε…»

Υπενθυμίζω ότι οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται *μόνο* στους διδάσκοντες το μάθημα. Ευπρόσδεκτες είναι και δικές σας σχετικές παρατηρήσεις και σχόλια που θα μπορούσαν να ενσωματωθούν σε αυτές. Ένα αντίγραφο του αρχείου αυτού να μείνει στο σχετικό φάκελο (υλικό και ηλεκτρονικό) του σχολείου.

Παρατηρήσεις, Συμπληρώσεις, Επισημάνσεις και Ασκήσεις στο πρώτο μέρος του 2ου κεφαλαίου της Ανάλυσης (ενότητες 2.1 - 2.7)

Α. ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ (§ 2.1 - § 2.4)

1. Α.Η παράγωγος μιας συνάρτησης Σ(x) σε ένα σημείο ξ, έχει δυο εκφράσεις-σημασίες (που αντιστοιχούν στις ανάγκες που την γέννησαν) :
α) την *Γεωμετρική*, εκφράζοντας το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της Σ σε μια θέση x = ξ, και
β) την *Φυσική,* εκφράζοντας τον ρυθμό μεταβολής, δηλαδή την «ταχύτητα» του μεγέθους Σ(x) στη θέση ξ.

Ιστορική νύξη: Η παράγωγος και η χρήση της, όπως υπάρχει στα σύγχρονα βιβλία και όχι μόνο (ορισμός κ.λ.π. και μετά εφαρμογές) δεν έχει καμία σχέση με την ιστορική της εξέλιξη, που είναι ακριβώς αντίθετη.
Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι, σε ένα διάστημα περισσοτέρων των 200 ετών, από τον P. Fermat (1601-1665), ως τον Weierstrass (1815 - 1897), η παράγωγος ακολούθησε την εξής πορεία:
O Fermat τη χρησιμοποίησε (ακρότατα κλπ), οι Newton (: κινηματική προσέγγιση) και Leibniz (: γεωμετρική προσέγγιση) την «ανακάλυψαν», οι Taylor, Euler, Maclaurin την ανέπτυξαν, ο Lagrange την ονόμασε και τη χαρακτήρισε και τέλος οι Cauchy και Weierstrass την όρισαν αυστηρά (βλ. περισσότερα στο σχετικό άρθρο του Ευκλείδη Γ΄, τεύχος 67, 2007)

Β. Σχετικά με την πρόταση, ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι και συνεχής, καλό είναι να επισημάνουμε ότι, όχι μόνο δεν ισχύει το αντίστροφο, με το παράδειγμα του βιβλίου, αλλά ακόμη:
α) Η συνέχεια είναι *αναγκαία* (μόνο, όχι ικανή) συνθήκη για την παραγωγισιμότητα.
β) Αν δεν είναι συνεχής στο ξ, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο ξ.
γ) Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που ενώ είναι συνεχείς, δεν είναι παραγωγίσιμες, π.χ. $\varphi(\chi) = \alpha + |x - \beta|$, $\alpha, \beta \in R$, $x \in R$.
δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, αλλά πουθενά παραγωγίσιμες (π.χ. η περίφημη συνάρτηση του K. Weierstrass: «πολύπλοκη», που δίνεται μέσω δυναμοσειράς)
ε) Σε προβλήματα όπου ζητείται να βρεθούν κάποιες παράμετροι ώστε να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη, εκμεταλλευόμαστε *πρώτα* την συνέχεια και μετά την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης.

2. Εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης.

Α. Το γεωμετρικό χαρακτηριστικό της γραφικής παράστασης (γ. π.) μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης είναι ότι υπάρχει (πλάγια) εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης. Όταν τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής στο ξ ($(f(x) - f(\xi))/(x - \xi)$), είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά όχι ίσοι, αυτό σημαίνει ότι στο σημείο (ξ, f(ξ)) άγονται δυο ημιεφαπτόμενες που δεν είναι αντικείμενες. Αν όμως τα όρια αυτά είναι ίσα, τότε και μόνο, οι ημιεφαπτόμενες είναι αντικείμενες και ορίζουν πλέον την εφαπτομένη της γ. π. στο σημείο αυτό.
Ένα άλλο σημείο που πρέπει να επισημανθεί είναι ότι, για μια συνεχή συνάρτηση σε ένα διάστημα, οι εφαπτόμενες είναι δυο ειδών. Αυτές που έχουν συντελεστή διεύθυνσης

- όταν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη - και τέμνουν τον ψ - άξονα και αυτές που είναι παράλληλες στον ψ-άξονα (κατακόρυφες). Αυτές δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης – σε ελεύθερη γλώσσα έχουν ± ∞, δηλαδή η παράγωγος είναι ίση με ± ∞ - και έχουν παραλειφθεί από την διδακτέα ύλη. Το παράδειγμα με την $\sqrt{x}$ στο 0 είναι καλό να γίνει για να φανεί η σημασία των παραπάνω, προκειμένου να γίνει σαφέστερο το θέμα της εφαπτομένης. Αυτό θα βοηθήσει και παρακάτω στην κατανόηση του σημείου καμπής συνάρτησης.

Β. Καλό είναι να υπενθυμίσουμε και την σχέση (κλίση της f στο ξ) $\lambda = f'(\xi) = \varepsilon\varphi\omega$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη θέση ξ με τον χ- άξονα, $0 \leq \omega < 180^o$, $\omega \neq 90^o$. Περιπτώσεις:
$\omega = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 0$, $f'(\xi) > 0 \Leftrightarrow 0 < \omega < 90^o$, $f'(\xi) < 0 \Leftrightarrow 90^o < \omega < 180^o$.
Για $\omega = 90^o$ («εφ$90^o = \pm\infty$») έχομε «άπειρο» συντελεστή, δηλαδή κατακόρυφη εφαπτομένη (εκτός ύλης).

Γ*. Η εφαπτομένη στην γραφική παράσταση (γ. π.) μιας συνάρτησης σε μια θέση ξ, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση των τιμών της συνάρτησης αυτής κοντά στο ξ, ιδίως όταν η συνάρτηση είναι πολύπλοκη.
Πράγματι, αν f παραγωγίσιμη στο ξ και $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της στο ξ τότε $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x)-(f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)))=0$, οπότε για τιμές του x κοντά στο ξ μπορούμε να λάβουμε κατά προσέγγιση $f(x) \approx f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε την $\sqrt[3]{8,5}$, θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και την εφαπτομένη της στη θέση ξ = 8. Έτσι μπορούμε, για x = 8,5 να πάρουμε την προσέγγιση $\sqrt[3]{8,5} \approx \dfrac{1}{2\sqrt[3]{8^2}}(8,5-8)+2=\dfrac{1}{24}+2=2,041$.
Όσο αφορά πολύ μεγάλες η μικρές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, η προσέγγιση μπορεί να γίνει, όπως θα δούμε, με την ασύμπτωτη. Η παρατήρηση αυτή ζωντανεύει ένα από τους ρόλους της εφαπτομένης καμπύλης.

Δ. Ευθεία εφαπτομένη στην γ. π. μιας συνάρτησης f(x).
Μια ευθεία y = αx + β είναι εφαπτόμενη στην γ. π. της συνάρτησης f(x), αν και μόνο υπάρχει σημείο (ξ, f (ξ)) της γ. π. της f τέτοιο ώστε $f(\xi) = \alpha\xi + \beta$ και $\alpha = f'(\xi)$. Η λύση του συστήματος αυτού (ανάλογα με το ζητούμενο) δίνει συνήθως την απάντηση σε πολλά (μη τετριμμένα) σχετικά προβλήματα με εφαπτόμενες.

3. Οι τύποι παραγώγισης μπορεί να χρησιμοποιηθούν (στις ασκήσεις) και για τον υπολογισμό ορίων:
π.χ. το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2008}-1}{h}$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(\lambda) = \lambda^{2008}$ στο 1, δηλαδή $\varphi'(1) = 2008\cdot 1^{2007} = 2008$.

4. Να χρησιμοποιούμε και συναρτήσεις με ανεξάρτητο μεταβλητή διάφορη από το x, ιδιαίτερα στις παραγωγίσεις, π.χ. να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης
$\varphi(y) = x\eta\mu 2y - ye^{xy}$, $y\in R$, στη θέση y = 0, $x\in R$, να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\Sigma(t) = 2\alpha^3t^2 + \ln(t - 2\alpha)$, $T(\alpha) = 2\alpha^3t^2 + \ln(t - 2\alpha)$, $f(y) = 2e^{2y}\eta\mu(xy) + xy^3$, $Q(P) = 3P^3 - 2P^2 + xP - y$ κλπ.
Αυτό θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την παραγώγιση (και όχι μόνο) και θα τους προετοιμάσει ώστε στις μετέπειτα Μαθηματικές τους σπουδές να

περάσουν ομαλά στις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων δυο ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι οι κανόνες παραγώγισης εφαρμόζονται κάθε φορά *ως προς το γράμμα που δηλώνει την ανεξάρτητη μεταβλητή στην συγκεκριμένη συνάρτηση* (οπότε τα άλλα παριστάνουν σταθερές), που στη περίπτωση του σχ. βιβλίου είναι πάντα – κακώς- το x (και εννοείται!).

5. Συνέχεια της Παραγώγου

Α. Η παράγωγος μιας συνάρτησης δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση.

π.χ. η παράγωγος της συνάρτησης (βλ. σχ. βιβλίο σελ. 292, άσκ. 10)

$\Sigma(x) = x^2\eta\mu\frac{1}{x}$, για $x \neq 0$ και $\Sigma(0) = 0$ είναι η $\Sigma'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$, για $x \neq 0$ και $\Sigma'(0) = 0$, η οποία δεν είναι συνεχής (ο μειωτέος έχει όριο 0, ενώ δεν υπάρχει για τον αφαιρετέο στο 0).

Β.Μια περίπτωση συνέχειας της παραγώγου σε σημείο, που είναι χρήσιμο να έχουμε υπόψη: αν f συνεχής στο (α, β) και παραγωγίσιμη στο (α, ξ)∪(ξ, β) και ισχύει $\lim\limits_{x\to\xi} f'(x) = \kappa \in R$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο ξ (η απόδειξη γίνεται με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο κανόνας De L' Hospital).

6*. Για την παράγωγο μιας συνάρτησης σ' ένα διάστημα ισχύει το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Θεώρημα Darboux, βλ. ασκ.42(γ)) αν και η παράγωγος δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση.

Μια συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι ότι, μεταξύ δυο ετεροσήμων τιμών της παραγώγου, η παράγωγος μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστον σημείο. Επίσης, αν η παράγωγος σ' ένα διάστημα δεν μηδενίζεται, τότε διατηρεί πρόσημο, δηλαδή η συνάρτηση είναι γν. μονότονη.

Μια άλλη συνέπεια του θεωρήματος αυτού, είναι ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης, αν δεν είναι συνεχής, δεν παρουσιάζει «απλές» ασυνέχειες (που μπορούν να αρθούν), αλλά «ουσιώδεις», π.χ. το όριο του λόγου μεταβολής δεν υπάρχει.

7. Αν θ γωνία σε μοίρες τότε $(\eta\mu\theta)' = \frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\theta$, $(\sigma\upsilon\nu\theta)' = -\frac{\pi}{180}\eta\mu\theta$.

(βλ. σελίδα 156 οδηγιών Π.Ι. 2003-2004)

Η παρατήρηση αυτή είναι χρήσιμο να αναφερθεί στους μαθητές: θα τους αποτρέψει π.χ. σε προβλήματα με ρυθμό μεταβολής γωνιών να χρησιμοποιούν μοίρες πριν παραγωγίζουν.

8*. Παράγωγος εκθετικής και λογαριθμικής.

Η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων e^x, lnx, δεν αποδεικνύονται στο σχ. βιβλίο. Ο αυστηρός ορισμός και η μελέτη των συναρτήσεων αυτών είναι θέμα ανωτέρων Μαθηματικών, αλλά λόγω των εφαρμογών τους υπάρχουν στη σχολική ύλη. Πάντως η επόμενη άσκηση υποδεικνύει ένα τρόπο για την απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων, ο οποίος στηρίζεται σε μια πολύ καλή ανισότητα (η οποία προκύπτει γεωμετρικά αν οριστεί ο λογάριθμος με ένα ορισμένο τρόπο, διαφορετικό από τον γνωστό) την οποία βέβαια θα θεωρήσουμε εδώ δεδομένη.

Άσκηση: Δεδομένου ότι $1-\frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ με $0 < x \neq 1$ ισχύουν

α) $1+ x < e^x < 1+ xe^x$, $x\in (-1, 0) \cup (0, 1)$

β) Η lnx, x > 0 είναι συνεχής στο 1 και η e^x συνεχής στο 0, γ) Η $\ln x$, $x > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 και η e^x στο 0,

δ) Οι συναρτήσεις $\ln x$, $x > 0$, e^x, $x\in R$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0,\ \ (e^x)' = e^x,\ x\in R.$$

9. Ισχυρισμός: *μια εφαπτομένη της γ. π. μιας συνάρτησης μπορεί να έχει περισσότερα του ενός κοινά σημεία με αυτήν.*

Είναι αληθής: ο αναλυτικός ορισμός της εφαπτομένης δεν επαληθεύει πάντα την γνωστή μας γεωμετρική εικόνα που έχουμε για τις εφαπτομένης γνωστών αλγεβρικών κυρίως καμπυλών (π.χ. κύκλου, παραβολής, έλλειψης κλπ) να έχουν δηλαδή μοναδικό κοινό σημείο με την καμπύλη, το σημείο επαφής.
Έτσι π.χ. η γ. π. της συνάρτηση $g(t) = ημt$, $t\in R$, έχει στη θέση $π/2$ εφαπτομένη την ευθεία $y = 1$, η οποία έχει άπειρα κοινά σημεία με την γ. π.($ημt = 1$). Αυτό μπορεί να συμβεί και οσοδήποτε κοντά της θέσης που υπάρχει εφαπτομένη, π.χ. η συνάρτηση (βλ. σχ. βιβλίο, σελ.292, ασκ.10)

$Σ(x) = x^2 ημ\frac{1}{x}$, για $x\neq 0$ και $Σ(0) = 0$ έχει εφαπτομένη στη θέση 0, την $y = 0$ η οποία έχει άπειρα κοινά σημεία $(1/κπ)$ κοντά στο 0 με την γ. π. της Σ.
Πάντως μια ικανή συνθήκη για να μην έχει η εφαπτομένη δεύτερο κοινό σημείο με την γ. π. είναι η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο 1-1 (π.χ. σε κυρτή ή κοίλη συνάρτηση) (βλ. άσκηση 22) .

10. *Σχετικά με το ρυθμό μεταβολής:* είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε προκαταβολικά στους μαθητές, τους τύπους τους σχετικούς με μεγέθη στο τρίγωνο, ορθογώνιο, κύβο, παραλληλεπίπεδο, κύκλο, σφαίρα, κύλινδρο, κώνο, καθώς και ότι μπορεί να απαιτηθεί το πυθαγόρειο θεώρημα αλλά και ομοιότητα τριγώνων.
Επίσης στα σχετικά προβλήματα το πρώτο βήμα πρέπει να είναι η αναγραφή των δεδομένων και των ζητούμενων σε Μαθηματική γλώσσα (εξισώσεις).
Σχετικά με τα προβλήματα ταχύτητας και επιτάχυνσης, παρόλο που δεν συνηθίζονται – κακώς- πολύ στα σχολικά Μαθηματικά, ας έχουμε υπόψη τα εξής:
Έστω ένα κινητό που κινείται σε ένα άξονα και $x = x(t)$ η θέση του την χρονική στιγμή t, $υ = υ(t) = x'(t)$ η ταχύτητά του και $α = α(t) = υ'(t)$ η επιτάχυνσή του. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i. Η ταχύτητα $υ > 0$ (δηλαδή η απομάκρυνση $x(t)$, από την αρχή $x(0)$, αυξάνει) τότε:
Αν $α > 0$ (δηλαδή το μέτρο $|υ(t)|$ της ταχύτητας υ αυξάνει) η κίνηση είναι *επιταχυνόμενη,* ενώ αν $α < 0$ (δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται) η κίνηση είναι *επιβραδυνόμενη*.

ii. Αν $υ < 0$ (δηλαδή η απομάκρυνση $x(t)$ ελαττώνεται) τότε, αν $α > 0$ η ταχύτητα αυξάνει, αλλά λόγω $υ < 0$ το μέτρο της $(-υ)$ ελαττώνεται, δηλ. η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, ενώ αν $α < 0$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.
Τελικά αν $αυ > 0$ έχομε επιταχυνόμενη κίνηση και αν $αυ < 0$ επιβραδυνόμενη.

Έτσι, π.χ. στην κατακόρυφη βολή σώματος προς τα άνω (αρχή το σημείο βολής και φορά προς τα άνω) η ταχύτητα $υ(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $υ΄(t) = α(t)= – g < 0$.
Επομένως: Όταν το σώμα ανέρχεται, επειδή $υ(t)>0$ είναι *$αυ < 0$*, οπότε η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, ενώ όταν το σώμα κατέρχεται, επειδή $υ(t) < 0$ και η (προσημασμένη) ταχύτητα φθίνει, το μέτρο $|υ(t)| = -υ(t)$ αυξάνει, δηλ. η κίνηση είναι επιταχυνόμενη (*$αυ > 0$*).

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ Δ. Λ. (§ 2.5 - § 2.6)

11. Θεώρημα Rolle (Michel Rolle (1652-1719), Γάλλος. Το Θεώρημα δημοσιεύτηκε το 1691 για πολυωνυμικές συναρτήσεις).

11.α. Λόγω της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης στο εσωτερικό του (α, β) η υπόθεση της συνέχειας της συνάρτησης στο [α, β] θα μπορούσε να αντικατασταθεί με την συνέχεια μόνο στα α, β. Παραδοσιακά όμως το θεώρημα διατυπώνεται με τον τρόπο αυτό.

11.β. Η συνθήκη f(α) = f(β) εξασφαλίζεται πολλές φορές όταν α, β ρίζες της f, ιδίως σε πολυώνυμα. Ειδικότερα προκύπτει ότι, αν ένα πολυώνυμο (με συντελεστές πραγματικούς), έχει $\kappa \geq 2$ διαδοχικές (διαφορετικές) πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_\kappa$ τότε η παράγωγός του έχει τουλάχιστον κ-1 διαφορετικές ρίζες (αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα τότε αυτή είναι και ρίζα της παραγώγου) οι οποίες βρίσκονται μεταξύ των παραπάνω ριζών του πολυωνύμου (Άσκηση).

11.γ*. Η απόδειξη του Θ. Rolle στηρίζεται στην παρατήρηση ότι, η f ως συνεχής στο [α, β] έχει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο και λόγω f(α) = f(β), αν δεν είναι σταθερή, ένα από τα δυο ακρότατα αυτά, είναι σε σημείο του (α, β). Άρα (Θ. Fermat) είναι ρίζα της παραγώγου στο (α, β). Μ' άλλα λόγια το συμπέρασμα του Θ. Rolle θα μπορούσε να διατυπωθεί: «υπάρχει σημείο του (α, β) όπου μηδενίζεται η παράγωγος και το οποίο είναι συγχρόνως θέση ολικού ακρότατου»

11.δ. Όλες οι υποθέσεις του Θ. Rolle είναι εντελώς απαραίτητες, για να ισχύει το συμπέρασμά του. Αυτό αναδεικνύεται με κατάλληλα παραδείγματα. Έτσι, π.χ. η συνέχεια στα άκρα δεν μπορεί να παραλειφθεί: π. χ. η συνάρτηση

$\varphi(\chi) = \chi^3$, αν $\chi \in (0, 1)$ και $\varphi(0) = \varphi(1) = 2009$,

είναι ορισμένη στο διάστημα [0, 1], παραγωγίσιμη στο (0, 1), όχι συνεχής στα σημεία 0, 1 και ισχύει φ(0) = φ(1).

Αν υπήρχε $\xi \in (0, 1)$ με $\varphi'(\xi) = 0$ τότε $3\xi^2 = 0$ ή $\xi = 0 \notin (0, 1)$, άτοπο (στο 0 δεν παραγωγίζεται).

11.ε. Το αντίστροφο του Θ. Rolle γενικά δεν ισχύει. Έτσι οι υποθέσεις του Θ. Rolle είναι *ικανές* αλλά όχι *αναγκαίες* για να ισχύει το συμπέρασμά του. Ας δούμε δυο περιπτώσεις

- Αν η είναι f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και μηδενίζεται η παράγωγος σε εσωτερικό του (α, β), τότε δεν ισχύει (πάντα) f(α) = f (β).
  Τέτοιο αντιπαράδειγμα μας παρέχει π.χ. η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2$, $\chi \in [-1, 2]$.

- Επίσης, μπορεί να μηδενίζεται η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε εσωτερικό του (α, β) και παρόλο που είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει f(α) = f(β), να μην παραγωγίζεται στο (α, β).
  Αυτό συμβαίνει π.χ. με την συνάρτηση
  $\Sigma(\chi) = 2 - (\chi - 1)^2$ για $\chi \geq 0$ και $\Sigma(\chi) = 2 - (\chi + 1)^2$ για $\chi < 0$, στο διάστημα [-2, 2].
  Είναι συνεχής στο διάστημα [-2, 2] με Σ(-2) = Σ(2) = 1. Η παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο 1 (και -1) όμως δεν παραγωγίζεται στο 0 .

11.στ. Πόρισμα του Θ. Rolle.

Αν η f' δεν μηδενίζεται στο (α, β) τότε η f είναι 1-1 (Άσκηση). (Σίγουρα είναι και γν. μονότονη, αλλά αυτό το θεώρημα δεν υπάρχει στο σχ. βιβλίο (βλ. παρακάτω παρ. 29 (β)).

11.ζ. Γενίκευση Θ. Rolle : Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (α, β) και

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = k \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$.

(Υπ.Αν $k \in R$, θέτουμε $f(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, $f(\beta) = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ οπότε η f είναι συνεχής στο [α, β] κλπ. Αν $k=+\infty$, τότε θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = e^{-f(x)}$, $\alpha \le x \le \beta$ με $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ κλπ, ενώ αν $k= -\infty$, την $\Sigma(x) = e^{f(x)}$ με $\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta) = 0$, $\alpha \le x \le \beta$ κλπ)

Δυνατότητες του Θ. Rolle:

i) Εξασφαλίζει ρίζα για μια συνάρτηση (που είναι παράγωγος μιας άλλης) σε θεωρητικά και μη θέματα.
ii) Εξασφαλίζει ρίζες για την παράγωγο μιας συνάρτησης οι οποίες βρίσκονται μεταξύ των ριζών της συνάρτησης αυτής.
iii) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα που ζητείται να δειχθεί ότι μια συνάρτηση έχει το πολύ 2, 3,… ρίζες (αποκλείοντας να ’χει 3, 4,…αντίστοιχα).

12. Θεώρημα Μέσης τιμής του Δ. Λ (ή θεώρημα Lagrange (1736-1813)

12.α. Εκτός από την γνωστή γεωμετρική ερμηνεία, το Θ.Μ.Τ. έχει και φυσική ερμηνεία - σημασία : υπάρχει (εσωτερική) θέση ξ όπου ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους y = f(t) είναι ίσος με την *μέση τιμή του* μεγέθους y = f(χ) στο διάστημα [α, β], δηλαδή η παράγωγος «δεν ξεχνά» την μέση τιμή της $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (από την οποία «προήλθε»).

Αυτό φαίνεται και στην 3 της σελίδας 248.

Β*. *Σχετικά με την ονομασία «Μέση τιμή».*

Στο ενδεχόμενο ερώτημα, αν σχετίζεται ο λόγος $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ με τον Στατιστικό ορισμό της μέσης τιμής - γεγονός που θα δικαιολογούσε και διαφορετικά την ονομασία του θεωρήματος - ισχύει ότι: Ας θεωρήσουμε την f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] (στις εφαρμογές αυτό είναι σχεδόν πάντα δεδομένο).

Χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη διαστήματα, πλάτους Δχ = (β-α)/ν. Αν επιλέξουμε τυχαία σημεία ξ_κ , κ = 1, 2,…,ν των διαστημάτων αυτών (όπως στο ολοκλήρωμα Riemann), τότε το όριο της *μέσης τιμής των αντιστοίχων τιμών της f′* *(ή* κλίσεων), που μπορούμε να λέμε κατ’ επέκταση *μέση τιμή της παραγώγου στο διάστημα [α, β]* , συμβολικά $\overline{f'}$, είναι ίσο με τον παραπάνω λόγο, δηλαδή

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f'(\xi_\kappa)}{\nu} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{ή} \quad \overline{f'} = f'(\xi)$$

(βλ. σχετικό άρθρο στο περιοδικό Ευκλείδη Γ΄, τεύχος 67, 2007)

12.γ. Μια άλλη συνέπεια του Θ. Μ. Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] είναι ότι, ο αριθμός $\mu = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f' στο (α, β), δηλ. $\mu \in f'((\alpha, \beta))$.

12.δ. Το Θ.Μ.Τ. είναι γενίκευση του Θ. Rolle, αφού όταν f(α) = f (β) προκύπτει το συμπέρασμα του Θ. Rolle .
Αντίστροφα: με βάση το Θ. Rolle αποδεικνύεται το Θ.Μ.Τ.
Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x$, $x \in [\alpha, \beta]$ (να διδαχθεί, ως άσκηση).

12.3. Ενδιαφέροντα είναι τα πορίσματα και όταν $f(\alpha) \neq f(\beta)$.Έτσι

- Αν $f(\alpha) < f(\beta)$ («η f ανέρχεται στο [α, β]») τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) > 0$
- Αν $f(\alpha) > f(\beta)$ («η f κατέρχεται στο [α, β]») τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) < 0$

(έχουν εφαρμογή σε πολλές ασκήσεις)

13. Το Θ.Μ.Τ είναι το βασικότερο θεώρημα του διαφορικού λογισμού. Με βάση αυτό αποδεικνύεται το σπουδαίο θεώρημα της μονοτονίας και άλλα σημαντικά θεωρήματα. Έτσι όλα τα επόμενα θεωρήματα που απορρέουν από αυτό *κληρονομούν τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ.: συνεχής σε διάστημα και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του*. Προφανώς μια ενδεχόμενη υπόθεση η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα καλύπτει (με το παραπάνω) τις υποθέσεις αυτές.

14. Γενικεύσεις του Θ.Μ.Τ:
Α. Αν f παραγωγίσιμη στο (α, β) και τα όρια $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\dfrac{B-A}{\beta-\alpha} = f'(\xi)$.
(απόδειξη όπως στη γενίκευση του Θ. Rolle).

Β. Θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy (βλ. άσκηση 24).

15. Το Θ.Μ.Τ. χρησιμεύει και στην *παραγωγή ανισοτήτων*:

- Αν η f' είναι, π.χ. γν. αύξουσα στο [α, β] , τότε $f'(\alpha) < \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq f'(\beta)$.
- Αν η f' είναι συνεχής στο [α, β] τότε $f'_{\varepsilon\lambda.} \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq f'_{\mu\varepsilon\gamma.}$.

16. Α.Μια άσκηση-λήμμα σχετική με το πόρισμα της σελίδας 251 είναι:
$\varphi = \gamma$ αν και μόνο ($\varphi' = \gamma'$ και $\varphi(\kappa) = \gamma(\kappa)$).
Η άσκηση αυτή έχει εφαρμογή σε προβλήματα εύρεσης συναρτήσεων σε «ολοκληρωτικές εξισώσεις», (βλ. σχετικά: διδακτικό υλικό Ολοκληρώματα σελ.) και καλό να επισημανθεί αυτό στους μαθητές.
Β.Το θεώρημα της σελ.251 και ιδιαίτερα το πόρισμα χρησιμοποιούνται σε προβλήματα *εύρεσης* συνάρτησης. Χρήσιμο μεθοδολογικά είναι να επισημάνουμε ακόμη εδώ ότι

$$x\varphi'(x) + \varphi(x) = (x\varphi(x))', \quad (x\varphi'(x) - \varphi(x)) / x^2 = (\varphi(x)/x)'.$$

Επίσης ότι ο πολλαπλασιασμός της $[\varphi'(x) + \varphi(x)]$ με e^x δίνει την παράγωγο $(e^x\varphi(x))'$, ενώ η διαίρεση της $[\varphi'(x) - \varphi(x)]$ με e^x δίνει την $(\varphi(x)/e^x)'$.

17. Η εφαρμογή της σελ.252 είναι αξιοσημείωτη και γενικεύεται ως εξής: να βρεθούν οι συναρτήσεις με την ιδιότητα $f'(x) = \lambda f(x)$ (θεμελιώδης διαφορική εξίσωση) .

$$f'(x) - \lambda f(x) = 0 \iff e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x) = 0 \text{ ή } (e^{-\lambda x} f(x))' = 0 \text{ κλπ.}$$

(ο $e^{-\lambda x}$ λέγεται *ολοκληρωτικός παράγοντας* και είναι χρήσιμος σε πολλά θέματα ολοκλήρωσης)

18.α. Το θεώρημα της σελίδας 251 μπορούμε να το καλούμε «θεώρημα της μονοτονίας» Το αντίστροφο του θεωρήματος θα διατυπωθεί (προφανώς) με δεδομένο ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Ιδιαίτερη επισήμανση στο σχόλιο της σελ.254 που συνοδεύει το θεώρημα και αναφέρεται στο αντίστροφό του. Εκτός από το αντιπαράδειγμα του σχολίου αυτού, μπορούμε να δώσουμε και την συνάρτηση $\varphi(\omega) = \omega + \eta\mu\omega$, η οποία είναι γν. αύξουσα στο R, αλλά η παράγωγός της μηδενίζεται σε άπειρα σημεία ($(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in Z$) (επί πλέον στις θέσεις $\kappa\pi$, $\kappa\in Z$ έχει σημεία καμπής).

β. Σχετικά ας έχουμε ακόμη υπόψη και το εξής:
Έστω Σ συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Αν η Σ είναι *αύξουσα* στο Δ τότε $\Sigma'(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in$ εσ(Δ) και αντιστρόφως (απόδειξη με βάση θεώρημα διάταξης στα όρια και το Θ.Μ.Τ). Αν βέβαια η Σ είναι γν. αύξουσα στο Δ, τότε και πάλι $\Sigma'(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi\in$εσ(Δ) (και επί πλέον δεν υπάρχει υποδιάστημα του Δ όπου η Σ είναι σταθερή, δηλαδή τα σημεία μηδενισμού της Σ′ είναι σε διακεκριμένες θέσεις, πεπερασμένου πλήθους ή μη).

Γ. ΑΚΡΟΤΑΤΑ (§ 2.7)

19. Στον ορισμό του τοπικού ακρότατου (σχ. βιβλίο) :

«Λέμε ότι η συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο) όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε
$f(x) \leq f(x_0)$ (αντίστοιχα $f(x) \geq f(x_0)$) για κάθε $x\in A\cap(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$».

α) Η τομή $A\cap(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ μπαίνει για καλύψει την περίπτωση τοπ. ακρότατου σε άκρο διαστήματος (ανεξαρτήτως της συνέχειας).
Έτσι π.χ. αν $A = [1, 4]$ και ισχύει $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x\in A\cap(1\text{-}2, 1\text{+}2) = [1, 3)$, τότε η f παρουσιάζει στο 1 τοπικό μέγιστο.

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος, τότε, επειδή υπάρχει πάντα $\varepsilon > 0$ με $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$, θα έχουμε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (x_0 - \theta, x_0 + \theta) \subseteq A$ κλπ
(το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μας είναι πάντα διάστημα ή ένωση διαστημάτων)
Ας σημειωθεί ότι μια σταθερή συνάρτηση σ' ένα διάστημα έχει σε κάθε σημείο τοπικό και ολικό ελάχιστο και μέγιστο (και αντίστροφα).

20. Σχετικά με τα τοπικά ακρότατα, χρήσιμο είναι να επισημαίνουμε (με απλά γραφήματα, αλλά και σε κάθε ευκαιρία όταν κάνουμε την μελέτη μιας συνάρτησης) ότι για μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα:

- κάθε ολικό μέγιστο (ελάχιστο) είναι και τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα, ελάχιστο) και είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) ή ίσο από τα τοπικά μέγιστα (ελάχιστα αντίστοιχα), αν υπάρχουν. Κάθε όμως τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) δεν είναι και ολικό μέγιστο (ελάχιστο αντίστοιχα).
- Ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) μπορεί να είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) από ένα τοπικό ελάχιστο (μέγιστο, αντίστοιχα)

Τα *ολικά ακρότατα* μιας συνεχούς συνάρτησης, ορισμένης σε ανοικτό διάστημα είναι προτιμότερο να προσδιορίζονται μέσω του συνόλου τιμών της συνάρτησης χρησιμοποιώντας το θεώρημα συνέχειας και μονοτονίας, είτε εργαζόμενοι αλγεβρικά (ορισμένες φορές είναι προτιμότερο αυτό). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα τότε ακολουθούμε το σχόλιο της σελίδας 264.

21. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνεχούς συνάρτησης σ' ένα *ανοικτό* διάστημα δεν είναι (ολικό) μέγιστο. Όμοια, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας (συνεχούς) συνάρτησης σ' ένα ανοικτό διάστημα δεν είναι (ολικό) ελάχιστο.
Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$\Sigma(\chi) = \frac{1}{\chi} \text{ αν } 0 < \chi < 1,\ \Sigma(\chi) = \chi \text{ αν } 1 \le \chi \le 2 \text{ και } \Sigma(\chi) = \frac{4}{\chi} \text{ αν } \chi > 2.$$

Έχει τοπικό μέγιστο στο 2 ίσο με 2 αλλά δεν έχει ολικό. Επίσης έχει τοπικό ελάχιστο για $\chi = 1$ ίσο με 1 αλλά δεν είναι ολικό. Αυτά συμβαίνουν επειδή η Σ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Αν όμως μια συνάρτηση είναι συνεχής σε *κλειστό* διάστημα, τότε το μεγαλύτερο (αντίστοιχα μικρότερο) από τα τοπικά μέγιστα (ελάχιστα) είναι μέγιστο (ελάχιστο), επειδή τότε σίγουρα έχει μέγιστο και ελάχιστο.

22. Θεώρημα του Fermat (Pierre de Fermat (1601-1665), Γάλλος).
Το θεώρημα του Fermat είναι ένα πολύ σπουδαίο θεώρημα της Ανάλυσης, γιατί ρίχνει ένα, έστω αμυδρό, φως στο «σκοτάδι» των τοπικών ακροτάτων. Και λέμε αμυδρό, για τους εξής λόγους, που πρέπει να επισημάνουμε ιδιαίτερα.
α) Αναφέρεται μόνο σε εσωτερικά σημεία και όχι άκρα διαστήματος,
β) Αφορά μόνο σε σημεία που η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη,
γ) δίνει μια αναγκαία μόνο συνθήκη για την ύπαρξη ακρότατου. Η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ είναι *αναγκαία, όχι ικανή για τοπικό ακρότατο* (εδώ φαίνεται η ανάγκη ενός ακόμη σχετικού θεωρήματος εξασφάλισης ακροτάτων).
Π.χ. η συνάρτηση $\varphi(x) = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, έχει $\varphi'(0) = 0$, $0 \in (-\infty, +\infty)$, που δεν είναι θέση τοπ. ακρότατου.
Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στα σχόλια του θεωρήματος (σελ. 261).

- ❖ Αν το τοπικό ακρότατο είναι σε άκρο του διαστήματος [α, β] και η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε: αν π.χ. α θέση τ. μεγίστου ισχύει $f'(\alpha) \le 0$, ενώ αν α θέση τ. ελαχίστου τότε $f'(\alpha) \ge 0$. Ανάλογα και για το β. (επαληθεύονται και γεωμετρικά).
(απόδειξη: εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του Θ.Fermat).
Η παρατήρηση αυτή οδηγεί σε ένα τρόπο απόδειξης του Θ.Darboux (βλ. άσκ. 40 (γ))

23. Το θεώρημα της σελίδας 262 είναι βολικό να το καλούμε ως *«κριτήριο ακροτάτων»* και να γίνει η απόδειξη του (i) ή του (ii) χάριν ασκήσεως (κανονικά αυτό είναι το $1^{ο}$ κριτήριο ακροτάτων, αλλά το $2^{ο}$ κριτήριο ως γνωστό έχει παραλειφθεί). Ιδιαίτερη βαρύτητα όμως πρέπει να δοθεί και στο μέρος (iii) του θεωρήματος και να υπογραμμιστεί από τους μαθητές στο βιβλίο τους. Είναι χρησιμότατη πρόταση.
Ας σημειωθεί ότι, όπως διατυπώνεται το θεώρημα αυτό, το τοπικό μέγιστο και ελάχιστο είναι και ολικό στο (α, β). Γενικά βέβαια θα είναι τοπικό, αφού μπορεί να υπάρχει και άλλο διάστημα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, οπότε ενδέχεται να είναι άλλο ολικό ή να μην υπάρχει ολικό ακρότατο.

24. Να επισημανθεί ότι η ανισότητα $\ln x \le x - 1,\ x > 0$, με ισότητα μόνο για $x = 1$, της εφαρμογής 2 (σελ. 266) μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις (ως γνωστό αυτό ισχύει για όλες τις εφαρμογές του βιβλίου και να υπενθυμιστεί στους μαθητές). Από αυτήν θέτοντας όπου x το 1/x προκύπτει και η $1 - \frac{1}{x} \le \ln x,\ x > 0$, (με ισότητα μόνο για $x = 1$). Επίσης εύκολα προκύπτει και η χρήσιμη ανισοταυτότητα $e^x \ge 1 + x,\ x \in R$ (για $1 + x < 0$ είναι προφανής). Αυτές τις ανισοτικές σχέσεις, μαζί με την αλγεβρική $\theta + \frac{1}{\theta} \ge 2,\ \theta > 0$, είναι πολύ χρήσιμο να τις ξέρουν οι μαθητές (παρά το κόστος να αποδείξουν τις $1 - \frac{1}{x} \le \ln x,\ e^x \ge 1 + x$, αν τις χρησιμοποιήσουν!).

25. Σχετικά με την άσκηση 6 σελ.270 (παρουσιάζει ενδιαφέρον). Καλύτερα να μην ακολουθήσουμε την υπόδειξη του βιβλίου. Η παραγώγιση δίνει
$f'(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)Q(x)$, όπου
$Q(x) = (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta),\ \alpha < \beta < \gamma$.
Έτσι φανερά η $f'(x)$ έχει τις ρίζες α, β, γ και το τριώνυμο Q(x), λόγω
$Q(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) > 0$, $Q(\beta) = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma) < 0$ $Q(\gamma) = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) > 0$, έχει (Θ. Bolzano) δυο ρίζες, ανά μια στα διαστήματα (α, β), (β, γ) (ακριβώς, λόγω τριωνύμου, χωρίς μονοτονία).
Άρα η $f'(x)$ ακριβώς 5 ρίζες. Όσο αφορά το πρόσημο της $f'(x)$ φτιάχνουμε ένα πίνακα με τις 5 ρίζες της και με δυο γραμμές, όπου στην μια υπάρχει το πρόσημο του παράγοντα $2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \beta$ (εύκολο) και στην άλλη το πρόσημο του Q(x) (με βάση τα γνωστά για το πρόσημο τριωνύμου) και έτσι εύκολα συνάγουμε ότι την μονοτονία και τα ακρότατα της f(x) (στα α, β, γ τ. ελάχιστα και στις ρίζες του Q(x) τ. μέγιστα). Προφανώς τα τοπικά ελάχιστα είναι και ολικά ($f(x) \ge 0 = f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$) και ίσα με 0, ενώ τα τοπικά μέγιστα δεν είναι ολικά, αφού λόγω $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ δεν έχει ολικό μέγιστο.

26. Ισχυρισμός: *Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει π.χ. τοπικό ελάχιστο στο ξ, τότε είναι (πάντα) γν. φθίνουσα αριστερά κοντά του ξ και γν. αύξουσα δεξιά κοντά του ξ:*

Δεν είναι αληθής. Π.χ. μια μη συνεχής είναι η συνάρτηση Dirichlet
$\varphi(\alpha) = 0$, αν α ρητός και $\varphi(\alpha) = 1$, αν α άρρητος.
Αυτή παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο 0 (και σε κάθε ρητό) αλλά οσοδήποτε κοντά στο 0, δεξιά και αριστερά, υπάρχουν ρητοί και άρρητοι, άρα τιμές 0, 1 οπότε δεν είναι μονότονη.

- Μια συνεχής : η συνάρτηση $\varphi(x) = |\eta\mu\frac{1}{x}|$, για $x \neq 0$ και $\varphi(0) = 0$

έχει ολικό (και τοπικό) ελάχιστο στο $x = 0$, αλλά δεν είναι μονότονη-αύξουσα δεξιά κοντά στο 0.
Πράγματι*: Έστω $\varepsilon > 0$ και $(0, \varepsilon)$ μια δεξιά περιοχή του 0. Υπάρχει (διαισθητικά, αλλά αυστηρά εφαρμόζεται το θεώρημα (αξίωμα) Αρχιμήδη-Ευδόξου) $\nu \in N^*$ με $2\nu\pi + \pi > \frac{1}{\varepsilon}$,

οπότε $0 < x_1 = \dfrac{1}{2\nu\pi + 2\pi} < x_2 = \dfrac{1}{2\nu\pi + \pi} < \varepsilon$.

Είναι $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ και $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\kappa\pi}$, $\kappa \in Z$. Έτσι οι αριθμοί

$\dfrac{1}{(2\nu + 2)\pi}$, $\dfrac{1}{(2\nu + 1)\pi}$ είναι διαδοχικές ρίζες της $\varphi(x)$, οπότε αν $0 < x_1 < x < x_2 < \varepsilon$ ισχύουν $\varphi(x_1) = 0 < \varphi(x)$ και $\varphi(x) > 0 = \varphi(x_2)$.
Άρα η φ στο $(0, \varepsilon)$ δεν είναι ούτε γν. αύξουσα ούτε φθίνουσα.

Ισχύει όμως: αν μια συνάρτηση παρουσιάζει *μεμονωμένο* τοπικό ελάχιστο (μέγιστο) σ' ένα διάστημα (α, β), έστω στο $\xi \in (\alpha, \beta)$, (δηλ. δεν έχει άλλο τ. ακρότατο στο (α, β)), τότε, στο διάστημα $(\alpha, \xi]$ είναι γν. φθίνουσα (αύξουσα) ενώ στο $[\xi, \beta)$ είναι γν. αύξουσα (φθίνουσα) (μεμομωμένα ακρότατα έχουμε π.χ. στις πολυωνυμικές, ρητές συναρτήσεις).

Σημείωση: επειδή $0 \le \varphi(x) \le |x|$ η γ. π. ης φ ταλαντεύεται ημιτονοειδώς μεταξύ του χ-άξονα και της $| x |$. Να γίνει μια πρόχειρη γ. π. για να καταρριφτεί κάπως η σχετική (ισχυρή γεωμετρική) πλάνη.

27. Ισχυρισμός: *Αν μια συνεχής συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε δεν έχει τοπικά ακρότατα.*
Αυτό ισχύει σε *ανοικτό* διάστημα (απόδειξη απλή), δεν ισχύει σε κλειστό (αντιπαράδειγμα εύκολο).

28. Ισχυρισμός: *Μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β) πρέπει να έχει στη θέση α τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο.*
Δεν είναι αληθής: η συνάρτηση $\Sigma(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $\Sigma(0) = 0$, είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1/2\pi)$.
Αν είχε τοπ. ακρότατο στο 0, έπρεπε «κοντά στο 0» (και δεξιά του) να είναι θετική ή αρνητική.
Έστω $0 < \varepsilon < 1/2\pi$ (οσοδήποτε μικρός) και $(0, \varepsilon)$ μια δεξιά περιοχή του 0.
Υπάρχει $\nu \in N^*$ με

$$2\nu\pi + \frac{\pi}{2} > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{οπότε και} \quad \kappa = 2\nu\pi + \frac{3\pi}{2} > \lambda = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2} > \frac{1}{\varepsilon},$$

Είναι $\frac{1}{\kappa}$, $\frac{1}{\lambda} \in (0, \varepsilon)$ και $\Sigma(\frac{1}{\kappa}) = -\frac{1}{\kappa} < 0$ και $\Sigma(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda} > 0$
Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά (και δεξιά) του μηδενός η συνάρτηση Σ έχει θετικές και αρνητικές τιμές. Άρα δεν μπορεί να παρουσιάζει τοπ. ακρότατο στο 0.

29. Ισχυρισμός: *Αν μια συνεχής συνάρτηση δεν έχει τοπικά ακρότατα, τότε είναι γνησίως μονότονη.*
α) Αν είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων, δεν αληθεύει ο ισχυρισμός αυτός, π.χ. η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Αν είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα (α, β) τότε αληθεύει.

Απόδειξη*
Έστω ότι δεν είναι γν. μονότονη. Τότε υπάρχουν κ, λ, μ, $\alpha < \kappa < \lambda < \mu < \beta$ για τους οποίους δεν ισχύει $\varphi(\kappa) < \varphi(\lambda) < \varphi(\mu)$, ούτε $\varphi(\kappa) > \varphi(\lambda) > \varphi(\mu)$. Έστω ότι δεν είναι δυο από τους φ(κ), φ(λ), φ(μ), ίσοι μεταξύ τους. Τότε ο φ(λ) είτε είναι ο μεγαλύτερος, είτε είναι ο μικρότερος των φ(λ), φ(κ), φ(μ). Έστω ότι ο φ(λ) είναι ο μεγαλύτερος, δηλ. $\varphi(\kappa) < \varphi(\lambda)$ και $\varphi(\mu) < \varphi(\lambda)$ (κάνετε ένα σχήμα). Αν $\varphi(\kappa) < \varphi(\mu)$ (όμοια αν $\varphi(\kappa) > \varphi(\mu)$) τότε, θεωρούμε ένα $\varphi(\mu) < \eta < \varphi(\lambda)$, οπότε και $\varphi(\kappa) < \eta < \varphi(\lambda)$. Άρα από το θεώρημα Ενδ. Τιμών υπάρχει $\rho \in (\lambda, \mu)$ και $\xi \in (\kappa, \lambda)$ με $\eta = \varphi(\rho) = \varphi(\xi)$, με $\alpha < \rho < \xi < \beta$.
Όμοια εργαζόμαστε αν φ(λ) είναι ο μικρότερος των φ(κ), φ(λ), φ(μ). Η φ, ως συνεχής στο [ρ, ξ], έχει μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη m και ισχύει $m \le \varphi(x) \le M$.
Αν οι τιμές των M, m ήταν στα ρ, ξ τότε λόγω $\varphi(\rho) = \varphi(\xi)$ η φ θα 'ταν σταθερή, άτοπο (αφού θα είχε τότε τ. ακρότατα). Άρα μια από τις τιμές M, m είναι σε εσωτερικό σημείο του [ρ, ξ], άρα εκεί έχει τοπικό ακρότατο, άτοπο.
Όμοια σκεπτόμαστε αν δυο από τους φ(κ), φ(λ), φ(μ), ίσοι μεταξύ τους. Άρα η φ είναι γν. μονότονη (ουσιαστικά δείξαμε και ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα και δεν είναι γν. μονότονη, τότε δεν είναι 1-1, δηλαδή αν είναι 1-1 τότε είναι γν. μονότονη)

30*. Ισχυρισμός: *Αν f συνεχής σε ανοικτό διάστημα και έχει μοναδικό τοπικό ακρότατο, τότε είναι ολικό;* Αληθεύει (παραλείπουμε την απόδειξη).
Όταν η f δεν είναι συνεχής, δεν ισχύει, π.χ.

$$f(t) = (t - 1)^2 \text{ για } t \ge 0 \text{ και } f(t) = \frac{1}{t} \text{ για } t < 0.$$

Έχει τοπικό ελάχιστο στο 1, που δεν είναι ολικό. Επίσης δεν ισχύει όταν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων (αντιπαράδειγμα: από την προηγούμενη συνάρτηση εξαιρούμε το 0).

31. Χρήσιμες Υποδείξεις για τις ασκήσεις με μονοτονία – ακρότατα.

1. Το θεώρημα της μονοτονίας, εκτός από την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης χρησιμοποιείται: στην εύρεση των ακροτάτων, στην εύρεση του προσήμου συνάρτησης, καθώς στην παραγωγή ανισοτήτων.

2. Ελέγχουμε την πορεία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης 2-3 φορές και αν είναι δυνατόν με διαφορετικούς τρόπους.

3. Γράφουμε την παράγωγο ως ένα κλάσμα (αν αποτελείται από πολλά κλάσματα) με παρανομαστή θετικό.

4. Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση των ριζών του αριθμητή της παραγώγου, έστω A(x), προσέχουμε μήπως το πρόσημό του προκύπτει άμεσα ή εύκολα.

5. Σε περίπτωση που δεν μπορεί να λυθεί αλγεβρικά η εξίσωση $A(x) = 0$ (ή η ανίσωση $A(x) > 0$), εξετάζουμε μήπως έχει προφανή ρίζα (ή ρίζες) και στη συνέχεια την μονοτονία της αντίστοιχης συνάρτησης $f(\chi) = A(x)$ και το πρόσημό της.

6. Το πρόσημο μιας συνάρτησης βρίσκεται πολλές φορές με την βοήθεια της μονοτονίας της και τη γνώση μιας ή περισσοτέρων ριζών της.

7. Σε ασκήσεις του τύπου «να βρεθούν οι α, β ώστε η συνάρτηση να έχει ακρότατα σε δοσμένες θέσεις κ, λ» μετά την εύρεση των α, β (συνήθως πρέπει να) *επαληθεύουμε* αν πράγματι έχει ακρότατα στις θέσεις αυτές (αυτό στη περίπτωση που οι α, β έχουν βρεθεί μόνο από μηδενισμό της παραγώγου (θ. Fermat), συνθήκη που ως γνωστό είναι μόνο αναγκαία και όχι ικανή)

32. Χρήσιμες Υποδείξεις για τις Εξισώσεις.

Ι. Για την ύπαρξη ρίζας συνάρτησης ή την εύρεση του πλήθους ριζών εξίσωσης, εφαρμόζουμε το θ. Bolzano (ή Rolle) και για την μοναδικότητα εξετάζουμε αν είναι 1-1 ή συνήθως την μονοτονία της. Όμως, πολλές φορές αν έχει προηγηθεί η μονοτονία μάλλον είναι προτιμότερο να βρούμε την εικόνα κάθε διαστήματος του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στο οποίο είναι γν. μονότονη (με το θεώρημα μονοτονίας και συνέχειας) και να ελέγξουμε σε ποιες εικόνες ανήκει το μηδέν.

ΙΙ. Αν διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση φ(χ) έχει (ολικό) ελάχιστο θετικό ή μέγιστο αρνητικό τότε (προφανώς) η εξίσωση φ(χ) = 0 δεν έχει λύση.

ΙΙΙ. Στην Ανάλυση όταν η εξίσωση φ(χ) = 0 είναι πολυωνυμική, την έκφραση «η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα ρ» την θεωρούμε συνήθως ισοδύναμη με την έκφραση «η εξίσωση φ(χ) = 0 δεν έχει άλλη ρίζα *διαφορετική* από την ρ». Δηλαδή, αν η ρ είναι πολλαπλή ρίζα, π.χ. πολλαπλότητας $\lambda \geq 2$, πάλι την θεωρούμε ως μοναδική ρίζα (ενώ ως γνωστό από την Άλγεβρα έχουμε λ το πλήθος ρίζες ίσες με ρ). Αυτό γίνεται αφ 'ενός γιατί δεν υπάρχει η έννοια της πολλαπλότητας στην σχολική ύλη, αφ' ετέρου χάριν απλότητας και ενιαίας έκφρασης στα σχετικά θέματα της Ανάλυσης.

33. Χρήσιμοι Μέθοδοι Απόδειξης Ανισοταυτοτήτων.

1. Με κλασικό Αλγεβρικό τρόπο .

Υπόψη και οι χρησιμότατες ανισοταυτότητες: $\theta+1/\theta \geq 2$ με $\theta>0$, $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$ κλπ.

Γενικά την Άλγεβρα δεν πρέπει να την παραμελούμε χάριν της Ανάλυσης (Διδάσκοντας Ανάλυση χρήσιμο είναι : «*να έχουμε από τα δεξιά μας την Άλγεβρα και από τ' αριστερά τη Γεωμετρία, ενώ στους Μιγαδικούς το αντίστροφο»*).
Να τονίζουμε βέβαια τη δύναμη της Ανάλυσης στη μονοτονία, ακρότατα, ανισότητες, κ.ά. αλλά όπου είναι εύκολο να λυθεί αλγεβρικά ένα θέμα (π.χ. σύνολο τιμών, μονοτονία, ανισοταυτότητες κλπ) να το προτιμούμε (μας διευκολύνει συχνά, δεν χρειάζονται τότε παραγωγίσεις) αλλά και για γενικότερους λόγους μαθηματικής καλλιέργειας.

2. Με την βοήθεια του Θ.Μ.Τ. του Δ.Λ.

3. Με Μονοτονία.

4. Με ακρότατα.

5. Με την βοήθεια του σχολίου της σελίδας 274 (εφαπτομένη κάτω (πάνω) από την γ. π. μιας κυρτής (κοίλης) συνάρτησης).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

(Παράγωγος - Θ. Μ. Τ.- Ακρότατα)

Α. Παράγωγος

1. Α. Αν f παραγωγίσιμη στο 2 τότε $(f(2))' = f'(2)$ Σ - Λ

Β. i.Η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(t) = e^3$ είναι ίση με Α.$3e^2$ Β. e^3 Γ. 0 Δ. 3e.
ii. Η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(x) = e^t$ είναι ίση με Α.te^{t-1} Β. e^x Γ. e^t Δ.0 .
Γ. Η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(\psi) = 2\chi^3\psi + \chi e^{2\psi}$ είναι ίση με
Α. $6\chi^2 + e^{2\psi}$ Β. $2\chi^3 + 2\chi e^{2\psi}$ Γ. $6\chi^2 + 2\chi e^{2\psi}$ Δ. $2\chi^3 + 2e^{2\psi}$

Δ. Μια πολυωνυμική συνάρτηση είναι $7^{ου}$ βαθμού. Η τέταρτη παράγωγός της είναι βαθμού
Α.0 Β.1 Γ.2 Δ.3 Β. 4 Γ.5

Ε. $\left(\alpha^\chi \ln\alpha\right)'_\chi = (\alpha^\chi)'\ln\alpha + \alpha^\chi (\ln\alpha)' = \alpha^\chi\ln\alpha + \alpha^\chi\frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\chi\in R$, Σ - Λ

Στ. Αν $\alpha > 0$, $\chi\in R$, $\left(\alpha^\chi - \chi\right)'_\chi =$ Α. $\chi\alpha^{\chi-1}-1$ Β. $(\ln\alpha)\alpha^\chi$ Γ. $\alpha^\chi - 1$ **Δ.** $(\ln\alpha)\alpha^\chi - 1$

2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\xi\in\Delta$, αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση φ συνεχής στο ξ τέτοια ώστε $f(x) - f(\xi) = \varphi(x)(x - \xi)$ κοντά στο ξ. Ποια η σχέση των $\varphi(\xi)$ και $f'(\xi)$;
(Παρατήρηση του *Κ. Καραθεοδωρή* (1873-1950)).

3. Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^4$, $z\in C$. Να αποδειχθεί ότι : α) $|z| < 1 \Leftrightarrow |f(\bar{z})| < 1$,
β) Αν $z = x + iy$ και $g(x) = Re(f(z)) = g(y)$, $h(x) = Im(f(z)) = h(y)$ τότε
$g'(x) = h'(y)$, $g'(y) = - h'(x)$, $x, y\in R$.

4. Έστω φ συνεχής στο $\xi\in R$. Να δειχθεί ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτομένη στην γ. π. της φ στο σημείο $(\xi, \varphi(\xi))$ αν και μόνο αν ισχύει $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{\varphi(x)-(\alpha x+\beta)}{x-\xi} = 0$.

5. Έστω η συνάρτηση $\Sigma(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ της οποίας η γραφική της παράσταση τέμνει τον x-άξονα σε δυο σημεία. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη (μεταξύ των α, β, γ) ώστε οι εφαπτόμενες στην γραφική της παράσταση στα σημεία αυτά να είναι κάθετες.

6. Έστω η παραβολή $\varphi(x) = x^2$ και $A(\alpha, \varphi(\alpha))$, $B(\beta, \varphi(\beta))$ δυο διαφορετικά σημεία της. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο, έστω $\Gamma(\xi, \varphi(\xi))$, της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ΑΒ και ότι ισχύει $2\xi = \alpha + \beta$.

7. Έστω η παραβολή $y^2 = 4px$ και μια χορδή της με (σταθερό) συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \neq 0$. Να δειχθεί ότι α) το μέσο της χορδής ανήκει σε σταθερή ευθεία (ε),
β) η εφαπτομένη στο σημείο που η ευθεία (ε) αυτή τέμνει την παραβολή είναι παράλληλη στην χορδή αυτή.

8. Α. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $y= f(x)$, $x\in R$, που ικανοποιεί την σχέση $x^2 - xy + y^3 = 3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην γ. π. της f στο σημείο (-1, 1).

(Απ.3x-4y+7=0)

Β. Η εφαπτομένη στην γ. π. της συνάρτησης $f(x) = α^x$, $α > 0$, $α \neq 1$, στο σημείο $M(ξ, φ(ξ))$ τέμνει τον x-άξονα στο σημείο A. Να δειχθεί ότι η προβολή του AM στον x -άξονα έχει σταθερό μήκος. (Απ.$1/|\ln α|$)

9. Έστω το πολυώνυμο $Q(x) = (x - α)(x - β)(x - γ)$, $α < β < γ$ και $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του 3. Αν υπάρχουν κ, λ, $μ \in R$ ώστε $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{κ}{x-α} + \dfrac{λ}{x-β} + \dfrac{μ}{x-γ}$ για $x \neq α, β, γ$ να δειχθεί ότι $Q'(α)Q'(β)Q'(β) \neq 0$ και ότι $κ = \dfrac{P(α)}{Q'(α)}$, $λ = \dfrac{P(β)}{Q'(β)}$, $μ = \dfrac{P(γ)}{Q'(γ)}$.

10. α) Έστω το πολυώνυμο $P(χ) = α + β(χ - ξ) + γ(χ - ξ)^2 + δ(χ - ξ)^3$, $χ \in R$, όπου $α, β, γ, δ \in R$. Να δειχθεί ότι $α = P(ξ)$, $β = P'(ξ)$, $γ = \dfrac{P''(ξ)}{2}$, $δ = \dfrac{P'''(ξ)}{6}$.

β) να βρεθούν οι $α, β, γ, δ \in R$ ώστε $χ^3 - 2χ^2 + χ + 3 = α + β(χ - 1) + γ(χ - 1)^2 + δ(χ - 1)^3$, $χ \in R$

γ) να προσδιοριστούν οι $α, β, γ, δ, ε \in R$ ώστε

$χ^4 + 2χ^3 - 3χ^2 + 4χ + 5 = α + β(χ - 1) + γ(χ - 1)^2 + δ(χ - 1)^3 + ε(χ - 1)^4$, $χ \in R$.

11. Αντλία γεμίζει λάδι μια δεξαμενή σε σχήμα (ανεστραμμένου) κώνου με ρυθμό 4π lt/min. Η ακτίνα βάσης του κώνου είναι ίση με το ύψος του. Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται το ύψος του λαδιού στην δεξαμενή την χρονική στιγμή που το ύψος του είναι 10cm. (Όγκος κώνου $V=πρ^2υ/3$, Απ. 40cm/min)

12. Να βρεθεί (συναρτήσει του α) η ευθεία η οποία είναι εφαπτόμενη στην γ. π. της συνάρτησης $φ(x) = α^x$, $α > 1$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρεθεί και το σημείο επαφής.

13*. Α. Έστω φ συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και συνεχής στο $ξ \in (α, β)$ ώστε η $|φ(χ)|$ να είναι παραγωγίσιμη στο ξ. Αν $φ(ξ) \neq 0$, τότε η φ είναι παραγωγίσιμη στο ξ. Δείξετε ότι και όταν $φ(ξ) = 0$, η φ είναι παραγωγίσιμη στο ξ με $φ'(ξ) = 0$.

Β. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση με $Σ(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν η συνάρτηση $f(x) = Σ^2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R να δειχθεί ότι η συνάρτηση Σ(x) είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $Σ'(x) = \dfrac{f'(x)}{2Σ(x)}$, $x \in R$.

Β. Θ. Μ. Τ. - Μονοτονία

14. Α. Αν Σ παραγωγίσιμη στο R, τότε ο αριθμός $Σ(2010) - Σ(2009) \in Σ'(R)$ Σ – Λ

Β. Αν φ συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $ξ \in (α, β)$ με $φ'(ξ) = 0$, τότε $φ(α) = φ(β)$.

Α. Σωστό Β. Λάθος Γ. Σωστό αν φ συνεχής στα α, β.

Γ. Αν φ γν. αύξουσα το (α, β] και στο (β, γ) τότε είναι γν. αύξουσα στο (α, γ) Σ - Λ

Δ. Αν η $φ'(χ)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα, τότε η φ είναι

Α.γν. αύξουσα Β. γν. φθίνουσα Γ. αύξουσα Δ. φθίνουσα Ε. Γν. μονότονη

Ε. Αν $φ'(χ) = f'(χ) + χ + \dfrac{1}{χ} - 2$ για κάθε $χ > 0$, τότε η συνάρτηση $f(χ) - φ(χ)$, $χ > 0$, είναι

Α.γν. αύξουσα Β. γν. φθίνουσα Γ. αύξουσα Δ. φθίνουσα

15. α) Αν $x, y \in R$ τότε ισχύει $|$ συνx – συνy $| \leq | x - y |$.

β) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} |συνx - συν\sqrt{1+x^2}\,|$. (Απ.0)

16. Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $α^4 + α + 2 = 2α^3 - 30α^2$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Β. Αν $0 < β < α < \frac{π}{2}$, τότε ισχύει α + εφβ < β + εφα..

17. α) Έστω h συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο διάστημα [α, β]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m, M ώστε

$$m(x-y) \leq h(x) - h(y) \leq M(x-y) \text{ για κάθε } α \leq y < x \leq β.$$

β) Για την προηγούμενη συνάρτηση h, αν α = 0 και h(0) = 0 να δειχθεί ότι υπάρχουν πραγματικοί m , M με $mx \leq h(x) \leq Mx$ για κάθε $x \in [0, β]$.

γ) Να αποδειχθεί ότι $7 + \frac{1}{7{,}2} < \sqrt{51} < 7 + \frac{1}{7}$.

18. Έστω φ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με φ(α) = φ(β) = 0. Να αποδειχθεί ότι:

α) Για κάθε $γ \in R$ υπάρχει $ξ \in (α, β)$ με $φ'(ξ) = γφ(ξ)$

β) Υπάρχουν $κ, λ \in (α, β)$, $2κ < α + β < 2λ$, με $φ'(κ) + φ'(λ) = 0$.

γ) Υπάρχουν $μ, ν, ρ \in (α, β)$ με $φ'(μ) + φ'(ν) + φ'(ρ) = 0$.

19. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (α, β) και παραγωγίσιμη στα διαστήματα (α, ξ), (ξ, β), όπου $ξ \in (α, β)$.Αν ισχύει $Σ'(x) = 0$ για κάθε $x \in (α, ξ) \cup (ξ, β)$ τότε η Σ είναι σταθερή στο (α, β).

20. Δεδομένου ότι $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ για $x > 0$ (με ισότητες μόνο με x=1) να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις $α(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $φ(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$.

21. α) Αν $ν \in N^*$, $α \in R$, να δειχθεί ότι υπάρχει $ξ \in (ν, ν+1)$ με $(ν + 1)^α - ν^α = αξ^{α-1}$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $2006^x + 2007^x = 2005^x + 2008^x$.

22.α) Έστω Σ συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $Σ'(χ) > 0$ για κάθε $χ \in Δ$. Αν η αντίστροφη της Σ, έστω Τ , είναι παραγωγίσιμη, να αποδειχθεί ότι

$$T'(y) = \frac{1}{Σ'(χ)},\ y = Σ(χ),\ χ \in Δ.$$

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης Σ(χ) = ημχ, $χ \in (0, π/2)$ και με δεδομένο ότι η αντίστροφή της, έστω Τ, είναι παραγωγίσιμη να δειχθεί ότι $T'(χ) = \frac{1}{\sqrt{1-χ^2}}$, $χ \in (0, 1)$.

23*. Α. Έστω μια συνάρτηση Σ παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) της οποίας η παράγωγος είναι 1-1. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης έχει μόνο ένα κοινό σημείο με αυτήν. Τι συμπεραίνετε αν μια εφαπτομένη στην γ. π. μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σ' ένα διάστημα έχει δυο κοινά σημεία με αυτήν;

Β. Να δείξετε ότι κάθε εφαπτομένη στην γ. π. της συνάρτησης $Σ(x) = x + x^{2008}$, $x \in R$ έχει μόνο ένα κοινό σημείο με αυτήν.

24*. Έστω μια συνάρτηση Τ παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα. Τότε ισχύουν, α) υπάρχει $\xi > 0$ με $T'(\xi) > 0$, β) αν η παράγωγος της Τ είναι γνησίως αύξουσα να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} T(x) = +\infty$.

25. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β) και συνεχείς στο [α, β] με $g'(\chi) \neq 0$, $\chi \in (\alpha, \beta)$. Τότε α) $g(\alpha) \neq g(\beta)$, β) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
(Γενίκευση του Θ.Μ.Τ.: Cauchy).

26*. Έστω Σ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, μη σταθερή, με την ιδιότητα
$\Sigma(x + y) = \Sigma(x)\,\Sigma(y)$ για κάθε $x, y \in R$.
α) Να αποδειχθεί ότι $\Sigma'(x) = \lambda\Sigma(x)$, $x \in R$, όπου $\lambda = \Sigma'(0)$, β) Ισχύει $\Sigma(x) = e^{\lambda x}$, $x \in R$, $\lambda \neq 0$.

Γ. ΑΚΡΟΤΑΤΑ

27. i. Αν $\varphi'(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\alpha\gamma < 0$, τότε η φ έχει
Α. ένα μόνο τ. ακρότατο Β. 2 ακριβώς τ. ακρότατα Δ. το πολύ 2 τ. ακρότατα

ii. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνεχούς συνάρτησης σ' ένα ανοικτό διάστημα είναι πάντα (ολικό) μέγιστο.
Α. Σωστό Β. Λάθος Γ. Σωστό αν υπάρχει μέγιστο.
iii. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνεχούς συνάρτησης σ' ένα κλειστό διάστημα είναι πάντα (ολικό) ελάχιστο. Α. Σωστό Β. Λάθος

iv. Αν $\Sigma'(\chi) = \chi^{2005}(\chi - 1)^{2006}(\chi - 2)^{2007}(\chi - 3)^{2008}$ τότε η συνάρτηση Σ έχει ακρότατα στις θέσεις Α.0, 1 Β.0,1,2,3 Γ.0, 2 Δ. 0, 2, 3

v. Αν $\Sigma''(\chi) = (\chi - 1)^{\nu}(\chi - 2)^{\nu+1}(\chi - 3)^{\nu+2}$, $\nu \in N^*$, και η $\Sigma'(\chi)$ έχει δυο μόνο τοπικά ακρότατα τότε ο ν είναι : Α. άρτιος Β. περιττός Γ. πολλαπλάσιο του 3

vi. Να εξεταστεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$, $x \in R$.
Να βαθμολογηθεί (με άριστα τα 10 μόρια), η παρακάτω απάντηση μαθητή (σε πανελλήνιες εξετάσεις).
«Έχομε $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha^x \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha^x = \dfrac{1}{\ln\alpha} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)$,
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(\ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right), +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)\right)$».

28. Αν το σημείο (x, y) κινείται στον κύκλο $x^2+y^2 = 9$, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $P = \dfrac{x^3 + xy^2}{3} + xy^2$. (Απ. 16 , -16)

29. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και η εξίσωση $t^2 - 2\alpha t + 3\beta = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες, να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

30. Να βρεθεί σημείο Μ της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$ το οποίο απέχει λιγότερο από το σημείο Σ(κ, 0), όπου $\kappa > 2\alpha > 0$. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο Μ είναι κάθετη στην ευθεία ΣΜ.

31. Να αποδειχθεί ότι: α) η εξίσωση $1 + 2x + 2\ln x = 0$ έχει μοναδική λύση, έστω θ.
β) η εφαπτομένη στην γ. π. της συνάρτησης $y = -1/x$, $x > 0$, στη θέση θ, είναι εφαπτομένη και στην γ. π. της $y = e^x$, και να βρεθεί το σημείο επαφής (συναρτήσει του θ).

32*. i) Αν η γ. π. της συνάρτηση $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$, τέμνει τον χ- άξονα και ισχύει $\varphi(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in R$, να δειχθεί ότι $\beta^2 = 4\alpha\gamma$.
ii) Να βρεθούν οι θετικοί αριθμοί α, β ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης
$\psi = \dfrac{\alpha x + \beta}{x^2 + 2x + 3}$ να είναι 1 και η ελάχιστη –2. Για ποιες τιμές έχει τα ακρότατα αυτά;
(Απ.(4, 2), 1, -2)

33. Σ' ένα αμπέλι, στην περιοχή των Αρχανών, η παραγόμενη ποσότητα σταφυλιών Τ(Ε) (σε εκατοντάδες κιλά) δίνεται από την σχέση $T(E) = \frac{3}{4}E^2 - \frac{\alpha E^3}{6}$, όπου Ε ο αριθμός των απασχολούμενων εργατών και α παράμετρος, $\frac{1}{6} \leq \alpha < 2$, εξαρτώμενη από διάφορους παράγοντες (π.χ. ποιότητα εδάφους, λίπανση κλπ). Να βρεθεί :
α) μέχρι πόσοι εργάτες πρέπει να εργάζονται στην καλλιέργεια ώστε να έχομε αύξηση του παραγόμενου προϊόντος,
β) μέχρι πόσοι εργάτες πρέπει να εργάζονται ώστε η παραγόμενη ποσότητα να αυξάνει με αύξοντα ρυθμό,
γ) η μέγιστη ποσότητα παραγόμενων σταφυλιών, έστω Σ(α). Για ποια τιμή του α η Σ(α) γίνεται μέγιστη; (Απ.(γ) 1/6, 8100 Kg)

34.α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2x^3 + x = \alpha$, $\alpha > 0$, έχει μοναδική λύση η οποία ανήκει στο διάστημα (0, α).
β) Έστω η παραβολή $y = x^2$ και το σημείο Α(α, 0), α > 0. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα σημεία που ανήκουν στην παραβολή αυτή υπάρχει ένα ακριβώς, έστω $E(\kappa, \kappa^2)$, με την ελάχιστη απόσταση από το Α. γ) Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη στην παραβολή στο σημείο Ε είναι κάθετη στην ευθεία ΕΑ. (το (γ) γενικεύεται για μια οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση, όταν υπάρχει η ελάχιστη απόσταση).

35. Έστω α > 1. α) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $x(t) = \alpha^t + \alpha^{1-t}$, $0 \leq t \leq 1$.
β) Να δειχθεί ότι $\alpha^t + \alpha^{1-t} \geq 2\sqrt{\alpha}$, $0 \leq t \leq 1$.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $\left(\frac{9}{4}\right)^{\eta\mu^2 x} + \left(\frac{9}{4}\right)^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (Απ. π/4)

36*. Αν a, b > 0 και ισχύει $a^x + 2b^x \leq 3$ για κάθε $x \in R$, να δειχθεί ότι $ab^2 = 1$ και στην συνέχεια ότι a = b = 1.

37*. Έστω $\alpha, \beta \in C$, ώστε $|\alpha z + \beta| = 1$ για κάθε $z \in C$ με $|z| = 1$. Τότε ισχύουν
α) $|\alpha + \bar{z} \cdot \beta| = 1$ για κάθε $z \in C$ με $|z| = 1$,
β) $|\alpha|^\nu + |\beta|^\nu = 1$ για κάθε $\nu = 1,2,\ldots$.

38*. Έστω η ευθεία ψ = x και η συνάρτηση $\psi = \alpha^x$, α > 1. Να αποδειχθεί ότι
α) Αν η ευθεία είναι εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της συνάρτησης, τότε $\alpha = e^{1/e}$. Να βρεθεί το σημείο επαφής. (Απ. (e, e))
β) Αν $\alpha > e^{1/e}$ τότε η ευθεία ψ = x δεν έχει κοινά σημεία, ενώ αν $1 < \alpha < e^{1/e}$ τότε έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

39*. Έστω α, β, κ, $\lambda\in R$ με α < β , κ, λ θετικοί αριθμοί και συνάρτηση Σ(χ) διπλά παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $(\kappa + \lambda)\Sigma(\chi) \leq \kappa\Sigma(\alpha) + \lambda\Sigma(\beta)$ για κάθε $\chi\in R$.
Να αποδειχθεί ότι : α) Σ(α) = Σ(β), β) Σ′ (α) = Σ′ (β),
γ) Υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $\Sigma''(\xi) = 0$.

40*. Έστω φ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\alpha \leq \varphi(x) \leq \beta$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ και $\varphi'(x) \neq 1$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$. Τότε ισχύουν
α) υπάρχει μοναδικός $\xi\in[\alpha, \beta]$ με φ(ξ) = ξ, β) οι εξισώσεις συνx = x, συν(συνx) = x έχουν μοναδική και κοινή λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

41.Α. Έστω φ(t) συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, +∞) με φ(t) > 0 και $\varphi^2(t) + t\varphi'(t) < \varphi(t)$ για κάθε t > 0. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$, $g(t)= (\varphi(t))^t$, t > 0 είναι γνησίως φθίνουσες.
Β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^{x-1} +(x +1)^{x-1} = (x +2)^{x-1}$, x>0, έχει μοναδική λύση την x=3.

42. Έστω φ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R με τις ιδιότητες $\varphi(x) \neq x$ και

$$2\varphi'(x) = 2 + \varphi(x) - x - \frac{1}{\varphi(x) - x}$$

για κάθε $x\in R$ και $\varphi(0) = \sqrt{2}$. Να αποδειχθεί ότι:
α) Η εφαπτομένη στην γ. π. της φ στο σημείο με τετμημένη 0 σχηματίζει με τον x-άξονα γωνία μικρότερη των 60^o και μεγαλύτερη των 45^o.
β) Η γ. π. της φ δεν έχει κοινά σημεία με την διχοτόμο της α΄ και γ΄ γωνίας των αξόνων.
γ) Η συνάρτηση $\gamma(x) = (\varphi(x) - x)^2 - e^x$, $x\in R$ είναι σταθερή και ίση με 1.
δ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης φ.

43. Τρεις πόλεις Α, Β, Γ βρίσκονται κατά μήκος ενός αυτοκινητοδρόμου με αποστάσεις ΑΒ = 200 km, ΒΓ= 400 km (και ΑΓ= 600 km). Ένα αυτοκίνητο κινούμενο συνεχώς ξεκινά από την πόλη Α, περνάει από την πόλη Β μετά από 3 ώρες και φθάνει στην πόλη Γ σε 6 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά 3 ώρες, έτσι ώστε το αυτοκίνητο τη μία χρονική στιγμή είχε διπλάσια ταχύτητα απ’ ό,τι την άλλη (η συνάρτηση που εκφράζει το διάστημα συναρτήσει του χρόνου είναι συνεχής και παραγωγίσιμη). (ΑΣΕΠ 2009)

44*. Έστω Σ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β].
α) Αν το Σ(α) είναι η μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της Σ τότε $\Sigma'(\alpha) \leq 0$ (αντίστοιχα $\Sigma'(\alpha) \geq 0$), ενώ αν Σ(β) είναι η μέγιστη (ελάχιστη) τιμή τότε $\Sigma'(\beta) \geq 0$ (αντίστοιχα $\Sigma'(\beta) \leq 0$),.
β) Έστω $\Sigma'(\beta) < 0 < \Sigma'(\alpha)$. Να δειχθεί ότι η μέγιστη τιμή της Σ δεν μπορεί να είναι στο α ή στο β και ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ με $\Sigma'(\xi) = 0$.
γ) Αν $\Sigma'(\alpha) < \eta < \Sigma'(\beta)$ τότε υπάρχει $\lambda\in(\alpha, \beta)$ με $\Sigma'(\lambda) = \eta$ (Θεώρημα Darboux).

45*. α) Έστω συνάρτηση y = φ(λ) ορισμένη στο διάστημα (0, +∞) με την ιδιότητα, όταν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής λ βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο (με λόγο οποιοδήποτε θετικό), οι αντίστοιχες τιμές του y να βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο και φ(1) = 0. Να αποδειχθεί ότι φ(αβ) = φ(α) + φ(β) για κάθε α, β > 0.
β) Για μια τέτοια συνάρτηση φ δείξετε ότι, αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο 1 τότε είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει $\varphi'(\lambda) = \frac{\varphi'(1)}{\lambda}$, λ > 0. -

* * *