2017-2018

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διδακτέα ύλη

Οδηγίες Διδασκαλίας και διαχείρισης της ύλης

Γυμνάσιο-Ημερήσιο & Εσπερινό ΓΕ.Λ. Πανελλαδικών

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Καραγιάννης Ιωάννης

2017-2018

Πρόλογος

Το παρόν αρχείο αποτελείται από την διδακτέα ύλη και τις οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της διδακτέας ύλης σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου, του Ημερησίου και Εσπερινού Γενικού Λυκείου όπως δόθηκαν από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) κατά το τρέχον Σχολικό Έτος 2017-2018.

Εκτιμώ ότι αυτή η ενοποίηση αυτή θα οργανώσει και θα διευκολύνει το έργο των διδασκόντων.

Ψηφιακά υπογεγραμμένο από ANASTASIA PASCHALIDOU
Ημερομηνία: 2017.10.03 12:35:32 EEST

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ
Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Α΄

Ταχ. Δ/νση: Ανδρέα Παπανδρέου 37
Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι
Ιστοσελίδα: www.minedu.gov.gr
Πληροφορίες: Α. Πασχαλίδου
Β. Πελώνη
Τηλέφωνο: 210-3443422
210-3442238

Βαθμός Ασφαλείας:
Να διατηρηθεί μέχρι:
Βαθ. Προτεραιότητας:

Αθήνα, 03-10-2017
Αρ. Πρωτ. 164264/Δ2

ΠΡΟΣ:

- **Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης**
- **Σχολ. Συμβούλους Δ.Ε. (μέσω των Περιφερειακών Δ/νσεων Εκπ/σης)**
- **Δ/νσεις Δ/θμιας Εκπ/σης**
- **Γυμνάσια (μέσω των Δ/νσεων Δ/θμιας Εκπ/σης)**

ΚΟΙΝ.:

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
info@iep.edu.gr

ΘΕΜΑ: Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο για το σχολ. έτος 2017 – 2018

Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. ΥΠ.Π.Ε.Θ. 156798/20-09-2017 έγγραφο

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 36/14-09-2017 του Δ.Σ) σας αποστέλλουμε τις παρακάτω οδηγίες για τη διδασκαλία των **Μαθηματικών** στις **Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Ημερησίου και Εσπερινού Γυμνασίου** για το σχολικό έτος 2017-2018.

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Μαθηματικά Α΄ Τάξης Γυμνασίου

Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου» των Ιωάννη Βανδουλάκη, Χαράλαμπου Καλλιγά, Νικηφόρου Μαρκάκη, Σπύρου Φερεντίνου.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφ. $1^{ο}$: Οι φυσικοί αριθμοί

1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας – Μ.Κ.Δ. – Ε.Κ.Π. – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Κεφ. 2ο: Τα κλάσματα

2.1 Η έννοια του κλάσματος
2.2 Ισοδύναμα κλάσματα
2.3 Σύγκριση κλασμάτων
2.4 Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων
2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων
2.6 Διαίρεση κλασμάτων

Κεφ. 3ο: Δεκαδικοί αριθμοί

3.1 Δεκαδικά κλάσματα, Δεκαδικοί αριθμοί, Διάταξη δεκαδικών αριθμών, Στρογγυλοποίηση
3.5 Μονάδες μέτρησης

Κεφ. 4ο: Εξισώσεις και προβλήματα

4.1 Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις: $\alpha+x=\beta$, $x-\alpha=\beta$, $\alpha-x=\beta$, $\alpha\cdot x=\beta$, $\alpha:x=\beta$ και $x:\alpha=\beta$ (χωρίς τις έννοιες της ταυτότητας και της αδύνατης εξίσωσης).
4.2 Επίλυση προβλημάτων.
4.3 Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων.

Κεφ. 5ο: Ποσοστά

5.1 Ποσοστά
5.2 Προβλήματα με ποσοστά

Κεφ. 7ο: Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

7.1 Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου
7.2 Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών
7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών
7.4 Αφαίρεση ρητών αριθμών
7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών
7.6 Διαίρεση ρητών αριθμών
7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών
7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφ. 1ο:Βασικές γεωμετρικές έννοιες

1.1 Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο
1.2 Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα
1.3 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθυγράμμου τμήματος
1.4 Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων
1.5 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας
1.6 Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες
1.7 Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών
1.8 Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες
1.9 Θέσεις ευθειών στο επίπεδο
1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων
1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου
1.12 Επίκεντρη γωνία
1.13 Θέσεις ευθείας και κύκλου

Κεφ. 2ο: Συμμετρία

2.1 Συμμετρία ως προς άξονα
2.2 Άξονας συμμετρίας
2.3 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος
2.4 Συμμετρία ως προς σημείο
2.5 Κέντρο συμμετρίας
2.6 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

Κεφ. 3ο: Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

3.1 Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων
3.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου
3.3 Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπέζιο – Ισοσκελές τραπέζιο
3.4 Ιδιότητες Παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου – Ρόμβου – Τετραγώνου – Τραπεζίου – Ισοσκελούς τραπεζίου

ΙΙ. Διαχείριση Διδακτέας ύλης

Οι παρακάτω οδηγίες έχουν στόχο να παρουσιάσουν κάποιες σημαντικές πλευρές για κάθε ενότητα και έτσι να υποστηρίξουν τον εκπαιδευτικό ώστε να σχεδιάσει τη διδασκαλία του και να επιλέξει υλικό. Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κ.λπ.

Οι δραστηριότητες που περιέχονται είναι ενδεικτικές και προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το γυμνάσιο και τον οδηγό του εκπαιδευτικού, τα οποία είναι συμπληρωματικά προς τα ισχύοντα και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ψηφιακού σχολείου:
(http://ebooks.edu.gr/new/ps.php).

Ταυτόχρονα κατεβλήθη προσπάθεια οι οδηγίες να εξειδικευθούν **ανά παράγραφο** με συγκεκριμένες διδακτικές προτάσεις που λαμβάνουν υπόψη τη συνοχή και εξέλιξη των διδασκόμενων εννοιών και μεθόδων, την ανάδειξη των σημαντικών ιδεών καθώς και τη διδακτική πρακτική.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαια 1ο, 2ο, 3ο (Φυσικοί αριθμοί, Κλάσματα, Δεκαδικοί)

Στο Δημοτικό έχουν διδαχθεί τόσο οι έννοιες όσο και οι διαδικασίες που αναφέρονται στα κεφάλαια αυτά. Έτσι, η διδασκαλία στην Α΄ Γυμνασίου πρέπει να έχει δύο στόχους:

1. Την επανάληψη – υπενθύμιση εννοιών και διαδικασιών και
2. Την εμβάθυνση σε κάποιες πλευρές που κρίνονται σημαντικές για την περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών.

Πιο συγκεκριμένα πρέπει να έχει ως στόχους:

- ✓ Την αντιμετώπιση εμποδίων και δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές (π.χ. το γινόμενο δύο αριθμών είναι πάντα μεγαλύτερο από τους παράγοντές του, οι δεκαδικοί αριθμοί είναι άλλο είδος αριθμών απ' ό,τι τα κλάσματα).
- ✓ Την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις και να μεταβαίνουν από το ένα είδος στο άλλο (π.χ. αναπαράσταση στην ευθεία των αριθμών, οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων, οι δεκαδικοί και τα δεκαδικά κλάσματα, αλλά και τα ποσοστά, ως διαφορετικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών ή μεγεθών).
- ✓ Την εμβάθυνση σε ιδιότητες των πράξεων και αλγοριθμικών διαδικασιών που υποστηρίζουν τη μετάβαση από την αριθμητική στην Άλγεβρα (π.χ. επιμεριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα, η αφαίρεση ως αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης κτλ.).
- ✓ Την εισαγωγή αλγεβρικών συμβόλων και τη νοηματοδότησή τους μέσα από την ανάγκη διατύπωσης σχέσεων και ιδιοτήτων (π.χ. ιδιότητες πράξεων), από την ανάγκη περιγραφής προβλημάτων ή ποσοτήτων που είναι λεκτικά διατυπωμένες (π.χ. άσκηση 1 της §4.1), από την παραγωγή αλγεβρικών εκφράσεων που περιγράφουν γεωμετρικά ή αριθμητικά μοτίβα (π.χ. άσκηση 15 της §4.1).

Με βάση τα παραπάνω, προτείνεται να αφιερωθούν 20 ώρες για τα τρία πρώτα κεφάλαια. Εξάλλου, οι μαθητές θα έχουν και στο 7ο κεφάλαιο την ευκαιρία να ασχοληθούν με τις πράξεις και να βελτιώσουν την ευχέρειά τους σε αυτές. Η ενασχόληση με τα τρία πρώτα κεφάλαια για μεγάλο διάστημα δεν εξασφαλίζει την αντιμετώπιση των δυσκολιών.

Κεφάλαιο 1ο (Να διατεθούν 8 ώρες)

Κρίνεται σκόπιμο πριν την διδασκαλία των §1.4 και §1.5 να διατεθούν 3 ώρες για την διδασκαλία των παραγράφων 1.1 και 1.2, με τρόπο που να ανταποκρίνεται στις ανάγκες της μετάβασης των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Ενδεικτικά προτείνεται να διδαχθούν:

- Δραστηριότητα 1 σ.11 Ασκήσεις 3, 4, 5 σ.13.
- Δραστηριότητα 1 σ. 14. (Δίνεται κενός ο πίνακας και συμπληρώνεται στην τάξη).
- Δραστηριότητα 3 σ. 14. (Μπορεί να ζητηθούν και εμβαδά άλλων σχημάτων πχ του ορθογωνίου που περικλείει το σχήμα).
- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 16
- Ιστορικό σημείωμα σ. 17 (μπορούν να ζητηθούν και άλλα αθροίσματα όπως το 25+26+…+50).
- Εφαρμογές 2, 3 σ.16.
- Άσκηση 11 σ. 18.

Για τις §§1.4 και 1.5 να δοθεί έμφαση στα παρακάτω:

- ✓ Ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης και χρήση των εννοιών «διαιρεί», «πολλαπλάσιο».
- ✓ Κριτήρια διαιρετότητας, ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και εύρεση Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ.
- ✓ Λεκτικά προβλήματα που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο.
- ✓ Αναλυτικότερη επεξεργασία των Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. θα γίνει στην §2.2

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο κάθε 4 ημέρες, ο Μιχάλης κάθε 5 ημέρες και ο Μαρίνος κάθε 8 ημέρες. Αν σήμερα παίζουν ποδόσφαιρο και οι τρεις μαζί, τότε να υπολογίσετε μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί το ίδιο για δεύτερη φορά.

[Σχόλιο: Ο στόχος είναι η χρήση του ΕΚΠ σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα. Η επίλυση του προβλήματος από τους μαθητές μπορεί να στηρίζεται σε διαισθητικές προσεγγίσεις (πχ κάποιο σχήμα) ή σε εύρεση των πολλαπλασίων του 4, του 5 και το 8. Αυτές οι προσεγγίσεις μπορούν να αξιοποιηθούν για την ανάδειξη της έννοιας του ΕΚΠ]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η δραστηριότητα στην §1.4 του σχολικού βιβλίου, μπορεί να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο, με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως με το δόμημα «Πειράματα με τη διάταξη μαθητών», στο Φωτόδεντρο:
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/14342
Αναλυτικότερες πληροφορίες για την εφαρμογή και τις δραστηριότητες που μπορεί να εμπλέξει τους μαθητές ο εκπαιδευτικός, υπάρχουν σε σύνδεσμο στο κάτω μέρος της εφαρμογής.

Κεφάλαιο 2ο (Να διατεθούν 9 ώρες)

Να δοθεί έμφαση στα παρακάτω:

- ✓ Έννοια κλάσματος και οι διαφορετικές πτυχές της όπως μέρος του όλου, πηλίκο και λόγος (οι εισαγωγικές δραστηριότητες της §2.1, ασκήσεις 1, 2, 3, σελ. 36, δραστηριότητα 2, σελ. 37 και προβλήματα αναγωγής στη μονάδα).
- ✓ Ισοδύναμα κλάσματα και μετατροπές τους
- ✓ Σύγκριση κλασμάτων μέσα από διαφορετικούς τρόπους (μετατροπή σε ομώνυμα, χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων, χρήση προσεγγιστικών μεθόδων π.χ. σύγκριση με τη μονάδα ή με ένα τρίτο αριθμό)
- ✓ Διαδικασίες που συνδέονται εμμέσως με την έννοια της πυκνότητας των ρητών (να επεκταθεί το παράδειγμα 4 στην §2.3 στην περίπτωση παρεμβολής περισσότερων του ενός κλασμάτων).
- ✓ Ανάγκη μετατροπής ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα στην περίπτωση της πρόσθεσης και αφαίρεσης, χρησιμοποιώντας ασκήσεις πράξεων απλών κλασμάτων με παρονομαστές μέχρι το

10.

- ✓ Έννοια των πράξεων στα κλάσματα και η εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων (π.χ. ότι η έκφραση «τα $\frac{2}{5}$ του $\frac{3}{8}$» αποδίδεται αριθμητικά με τον πολλαπλασιασμό $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$, ότι οι αντίστροφοι αριθμοί είναι αυτοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα, ότι το άθροισμα και η διαφορά κλασμάτων αναφέρεται στο ίδιο όλο, ότι τα σύνθετα κλάσματα εκφράζουν τη διαίρεση κλασμάτων)
- ✓ Παραστάσεις και προτεραιότητα πράξεων
- ✓ Διαφορετικές αναπαραστάσεις κλασμάτων (ευθεία, γεωμετρικά σχήματα)

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗΣ ΑΝΑ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ

§**2.1**

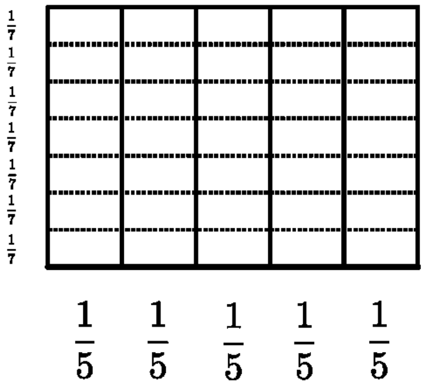
- Δραστηριότητες 1, 2, 3, 4 σ. 34.
- Εφαρμογές 1, 2, 3 σ. 35-36.
- Ασκήσεις 4, 5, 8, 9 σ. 36-37

§**2.2**

- Δραστηριότητα σ. 38
- Παράδειγμα 1 β) και μετά 1 α) σ. 39.
- Παραδείγματα 2, 3 σ. 39.
- Ασκήσεις 2, 5, 7, 10 σ. 40.
- 2.3 Δραστηριότητες 1, 2 σ. 41.
- Παραδείγματα 1, 2, 3, 4, σ. 42
- Ασκήσεις 2, 3, 4, 8, 9 σ. 43
- 2.4 Δραστηριότητες 1, 2 ,3 σ. 44.
- Παραδείγματα 1, 3, 6 σ. 45-46
- Ασκήσεις 1, 2, 5, 7, 8 σ. 46

§**2.5**

- Για την εισαγωγή του πολλαπλασιασμού κλασμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο διάγραμμα και βρεθούν τα γινόμενα $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}$ και $\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{5}$.



- Παραδείγματα 1 (να γίνει και με απλοποίηση), 2 σ. 48 και άσκηση 9
- Ασκήσεις 2, 3, 4, 8

§**2.6**

- Παραδείγματα 1, 2 σ. 50
- Ασκήσεις 2, 4, 6, 7, 8, 9

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

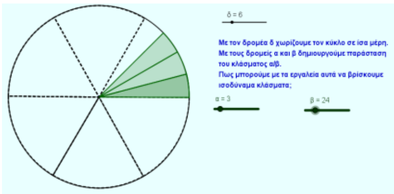
Υπολογίζοντας την αριθμητική παράσταση $\frac{1}{2}\cdot 2^2+1+3\cdot\frac{5}{2}$, το σωστό αποτέλεσμα είναι:

α) 9,5 β) 10,5 γ) 12 δ) 15 ε) άλλο.

[Σχόλιο: Κάθε άλλη απάντηση από τη σωστή (β) προκύπτει από λανθασμένη χρήση της προτεραιότητας των πράξεων. Έτσι, αυτή η δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την αξιολόγηση των δεξιοτήτων των μαθητών και την ανατροφοδότηση της διδασκαλίας, με αναλυτική συζήτηση στην τάξη.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η κατανόηση της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων μπορεί να διευκολυνθεί με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως με το δόμημα «Ισοδύναμα κλάσματα» του Φωτόδεντρου:



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/14353

Αναλυτικότερες πληροφορίες για την εφαρμογή και τις δραστηριότητες που μπορεί να εμπλέξει τους μαθητές ο εκπαιδευτικός, υπάρχουν σε σύνδεσμο στο κάτω μέρος της εφαρμογής.

Κεφάλαιο 3ο (Να διατεθούν 4 ώρες)

Θα διδαχθούν οι §3.1 και §3.5. Να δοθεί έμφαση στα παρακάτω:

- ✓ Ότι οι δεκαδικοί και τα δεκαδικά κλάσματα είναι διαφορετικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών
- ✓ Στη διαδικασία σύγκρισης δεκαδικών αριθμών και την τοποθέτησή τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- ✓ Σε επιλεγμένα προβλήματα να επιδιώκεται η χρήση υπολογιστή τσέπης και, μέσω αυτής της χρήσης, να αναδεικνύεται η προτεραιότητα των πράξεων .

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗΣ ΑΝΑ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ

§3.1

- Δραστηριότητα 4 σ. 57
- Παραδείγματα 1 (εδώ θα γίνει αναφορά στην περιοδικότητα (σ. 135-136), 2, 3, 4, 5 σ. 58
  Επίσης ως εφαρμογές οι ασκήσεις 1, 4, 11 σ. 61.
- Ως εργασία για το σπίτι μπορούν να δοθούν οι ασκήσεις 3, 5, 6 σ. 61 ενώ η άσκηση 2 σ. 61 μπορεί να λυθεί με υπολογιστή.

§3.5.

- Δραστηριότητα 3. σ. 64
- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 66
- Ασκήσεις 6, 7, 8, 11, 12 σ. 67

Κεφάλαιο 5ο (Να διατεθούν 6 ώρες)

Για διδακτικούς λόγους, οι οποίοι μεταξύ άλλων θα εξασφαλίσουν και οικονομία χρόνου, προτείνεται το 5ο Κεφάλαιο να διδαχθεί αμέσως μετά το 3ο, προκειμένου:

- ✓ Να αναδειχθεί το πλαίσιο πολλαπλών αναπαραστάσεων που υλοποιούν οι δεκαδικοί, τα κλάσματα και τα ποσοστά.
- ✓ Να αναδειχθεί μέσω παραδειγμάτων η έννοια της αναλογίας, την οποία έχουν διδαχθεί στην ΣΤ΄ Δημοτικού, που οι παραπάνω όροι υποστηρίζουν στα προβλήματα και τις εφαρμογές.

Η έννοια του ποσοστού και προβλήματα με ποσοστά έχουν διδαχθεί στο Δημοτικό. Το καινούριο που υπάρχει στην ύλη αυτού του Κεφαλαίου είναι το πλαίσιο των προβλημάτων (π.χ. προβλήματα με τόκους, Φ.Π.Α.).

§5.1 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Να δοθεί έμφαση στα ποσοστά ως διαφορετική αναπαράσταση των δεκαδικών και των κλασμάτων, αλλά και να επισημανθεί το γεγονός ότι δεν γράφονται όλα τα κλάσματα με ακρίβεια στη μορφή ποσοστού (π.χ. ενώ $\frac{3}{4}=0,75=75\%$, ισχύει $\frac{1}{3}=0,33...=33,33...\%$). Να δοθεί προτεραιότητα σε ασκήσεις μετατροπής ποσοστών σε κλάσματα και δεκαδικούς και αντίστροφα, καθώς και σε απλά προβλήματα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητες 1, 2 σ. 80
- Παράδειγμα 3 σ. 81
- Ασκήσεις 4, 5, 6 σ. 81

§5.2 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Επειδή πολλά από τα προβλήματα που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο είναι δύσκολα, για να εμπλακούν με τη λύση τους όλοι οι μαθητές, ο εκπαιδευτικός πρέπει να κάνει μια προσεκτική επιλογή απλών μόνο προβλημάτων τόκου, Φ.Π.Α. και προβλημάτων που αντιμετωπίζει ο καταναλωτής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 82
- Ασκήσεις 3, 4, 5, 8 σ. 83
- Η δραστηριότητα της σελίδας 83 να ανατεθεί ως κατ΄ οίκον εργασία.

Κεφάλαιο 4^{ο} (Να διατεθούν 4 ώρες)

§4.1 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Η έννοια της εξίσωσης και η εύρεση της λύσης με την αντίστροφη πράξη έχει συζητηθεί στην ΣΤ΄ Δημοτικού. Επιπλέον, η επίλυση των εξισώσεων πρώτου βαθμού θα αντιμετωπισθεί αναλυτικά στη Β΄ Γυμνασίου. Ο ρόλος του κεφαλαίου αυτού στην Α΄ Γυμνασίου είναι επαναληπτικός, καθόσον οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν απλές εξισώσεις στην αντιμετώπιση προβλημάτων σε επόμενα κεφάλαια.
Πρέπει να δοθεί έμφαση στην παραγωγή αλγεβρικών παραστάσεων που εκφράζουν ένα πρόβλημα ή μια κατάσταση και οδηγούν σε εξισώσεις (όπως η 1^{η} δραστηριότητα και οι ασκήσεις 1, 14 και 15). Τέτοιες απλές διαδικασίες μοντελοποίησης δίνουν νόημα στην εισαγωγή της άλγεβρας και υποστηρίζουν την ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος.
Η επίλυση εξίσωσης εδώ γίνεται με χρήση του ορισμού των πράξεων και οι εξισώσεις περιορίζονται σε αυτές που έχουν τον άγνωστο μόνο στο ένα μέλος. Χρειάζεται να συζητηθεί η επίλυση με δοκιμή, γιατί αυτό βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης και της έννοιας της λύσης της (4η δραστηριότητα και ασκήσεις 7, 8). Από την άλλη, δεν προτείνεται να χρησιμοποιηθούν διαδικασίες που θα διδαχτεί ο μαθητής στη Β Γυμνασίου (επίλυση με τις ιδιότητες της ισότητας) και πολύ περισσότερο η απομνημόνευση κανόνων χωρίς νόημα. Για τον ίδιο λόγο δεν προτείνεται η απομνημόνευση των λύσεων (τελευταία παράγραφος του «μαθαίνουμε»). Τέλος, προτείνεται να μην διδαχτούν οι έννοιες της ταυτότητας και της αδύνατης εξίσωσης.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Ως αφόρμηση για την εισαγωγή των εξισώσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν η εφαρμογή 2 της σ. 82 και η άσκηση 5 σ. 83.
- Δραστηριότητες 1, 2, 3, 4 σ. 72.
- Στην δραστηριότητα 4 συνιστάται να χρησιμοποιηθούν και άλλοι αριθμοί κατά την κρίση του διδάσκοντα.
- Η ορολογία του «Μαθαίνουμε» της σ. 73 καλό είναι να αναφερθεί κατά την επεξεργασία των παραδειγμάτων. Σε κάθε περίπτωση δε μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο εξέτασης θεωρίας.
- Ασκήσεις 12, 8, 9, 11, 15 σ. 74

§§4.2 και 4.3 (Να διατεθούν 2 ώρες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Παραδείγματα 1, 2 σ. 75.

- Η ορολογία και η διαδικασία του «Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε» της σ. 75 θα παρουσιασθούν κατά την διάρκεια επεξεργασίας των παραπάνω παραδειγμάτων και δεν αποτελούν αντικείμενο εξέτασης θεωρίας.
- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 76-77.
- Ασκήσεις 3, 5, 13 σ. 78.

Ενδεικτική δραστηριότητα:
Έχουμε μια "αλυσίδα" αριθμών: 2, 5, 8, 11, 14, …
α) Βρείτε τον επόμενο όρο. β) Βρείτε τον τρόπο που προκύπτει κάθε όρος από τον προηγούμενό του. Μπορείτε με αυτόν τον τρόπο να βρείτε τον 10^{ο} και τον 100^{ο} όρο; γ) Ποιος όρος είναι ίσος με 332;
[Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η αναγνώριση από τους μαθητές της αξίας της αλγεβρικής παράστασης (για να βρεθεί ο 100^{ος} όρος), ακόμα κι αν με αναδρομικούς τρόπους μπορούν να βρεθούν κάποιοι όροι. Επίσης, στόχος είναι η δημιουργία εξίσωσης για τη λύση του προβλήματος του (γ) ερωτήματος. Αν ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι χρειάζεται, μπορεί να επιλέξει πιο εύκολη ακολουθία, πχ την 2, 4, 6, … ή την 3, 5, 7, …]

Κεφάλαιο 7^{ο} **(Να διατεθούν 29 ώρες)**

Το περιεχόμενο του κεφαλαίου είναι εξολοκλήρου νέο για τους μαθητές, αν και υπάρχει άτυπη γνώση των αρνητικών αριθμών (θερμοκρασία κτλ.) που μπορεί να αξιοποιηθεί.

§7.1 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Η αξιοποίηση της άτυπης γνώσης των μαθητών από τους αρνητικούς ακεραίους (θερμοκρασία, υπόγεια κοκ) μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην κατανόηση των σχετικών μαθηματικών εννοιών.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Δραστηριότητες 1 (συνιστάται να χρησιμοποιηθούν και στοιχεία από την ίδια πόλη) 2, 3, της σ. 114.
- Η «Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία μιας ευθείας» της σ. 116 θα γίνει στην τάξη και η τοποθέτηση στην ευθεία των αριθμών θα είναι αντικείμενο συζήτησης με τους μαθητές.
- Η δραστηριότητα της σ. 116 θα δοθεί ως εργασία για το σπίτι.

§7.2 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Το γεγονός ότι ο αντίθετος του -2 είναι ο 2 ίσως είναι προφανές για τους μαθητές, αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο για τον αντίθετο ενός αριθμού $α$. Στην κατεύθυνση αυτή ίσως είναι αποτελεσματική η χρήση της ευθείας των αριθμών, όπου ο $α$ μπορεί να τοποθετηθεί τόσο δεξιά από το 0 (αν ο $α$ είναι θετικός), όσο και αριστερά του (αν είναι αρνητικός). Έτσι, μπορεί να αναδειχθεί το γεγονός ότι στην έκφραση $-α$ το «-» δηλώνει τον αντίθετο του $α$, αλλά όχι το πρόσημο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Δραστηριότητες 1, 2, σ. 118.
- Τα «Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε» της σ. 118 και της σ. 119 να γίνουν διεξοδικά.
- Ασκήσεις 3. 6. 12. 13 σ. 121.

Ενδεικτική δραστηριότητα:
Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

x	3,2					
-x		–3	5			
-(-x)				2/3		
|x|					6	
|-x|						0,45

[Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι η διερεύνηση του ρόλου του "–" ως πρόσημο και ως σύμβολο αντιθέτου. Οι συζητήσεις που θα γίνουν μέσα στην τάξη χρειάζεται να αναδείξουν ότι το "–" στο –x δεν δηλώνει το πρόσημο. Για τη συζήτηση αυτή θα πρέπει να αφιερωθεί αρκετός χρόνος.]

§7.3 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Για την εισαγωγή της πρόσθεσης θετικών και αρνητικών αριθμών, παράλληλα με τη δραστηριότητα του βιβλίου του μαθητή μπορεί να γίνει χρήση και της μετατόπισης πάνω στον άξονα: στο άθροισμα δύο αριθμών, ο πρώτος προσθετέος δείχνει το σημείο εκκίνησης πάνω στο άξονα, ενώ ο δεύτερος δείχνει τη μετακίνηση (το πρόσημό του την κατεύθυνση και η απόλυτη τιμή του την απόσταση). Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλα μοντέλα, όπως οι θετικοί και αρνητικοί μετρητές (ή κάρτες). Οι θετικοί-αρνητικοί μετρητές όπως και η κίνηση στην αριθμογραμμή μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στις τέσσερις πράξεις των ακεραίων. Προτείνεται με τη χρήση των μοντέλων και με συλλογική διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη, να διατυπώσουν και να οικειοποιηθούν οι μαθητές τους κανόνες της πρόσθεσης ακεραίων και στη συνέχεια να εξασκηθούν σε πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 122
- Παραδείγματα 1, 2 σ. 123-124
- Ασκήσεις 7, 8, 5 σ. 125

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

Ένα ρομποτάκι κινείται πάνω στην αριθμογραμμή μέσω ενός τηλεχειριστηρίου–αριθμομηχανής. Το +5 ερμηνεύεται ως "5 βήματα δεξιά", ενώ το –5 ερμηνεύεται ως "5 βήματα αριστερά".

Αν υποθέσουμε ότι το ρομποτάκι ξεκινάει πάντα από τη θέση που δείχνει ο πρώτος αριθμός, ποια θα είναι η καινούρια του θέση, όταν πληκτρολογήσουμε:

α) (+3)+(+5) **β)** (–5)+(+3) **γ)** (+5)+(–3) **ε)** (–4)+(–7) **η)** (–4)+(+7)+(–3) **θ)** (–4)+(–2)+(+6)+(–1)

Πώς μπορούμε να οδηγήσουμε το ρομποτάκι από τη θέση 5 στη θέση –2 με δύο κινήσεις; Με τρεις κινήσεις;

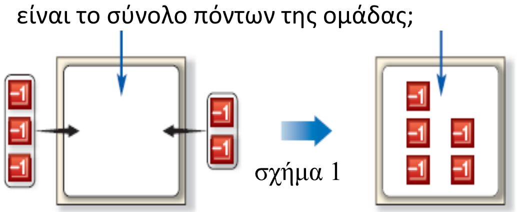
[Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι η δημιουργία της "εικόνας" της κίνησης στην αριθμογραμμή για την αναπαράσταση της πρόσθεσης. Τέτοιου είδους αναπαραστάσεις βοηθούν στην κατανόηση της πράξης και στη χρήση τους από τους μαθητές και θεωρείται χρήσιμο να αξιοποιούνται πριν από τη χρήση των κανόνων.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

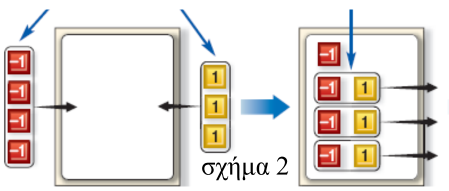
Σε ένα παιχνίδι, δύο ομάδες παιδιών απαντούν σε ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση η ομάδα παίρνει μια θετική κάρτα και για κάθε λάθος παίρνει μια αρνητική. Για παράδειγμα, αν η ομάδα Α έχει 5 θετικές κάρτες (+5) και πάρει άλλες δύο θετικές (+2), θα έχει 7 θετικές, δηλαδή σύνολο +7 πόντους. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε με την πρόσθεση: (+5)+(+2)=+7.

α) Το σχήμα 1 περιγράφει την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 3 αρνητικές και πήρε δύο ακόμη αρνητικές. Μπορείτε να εκφράσετε αυτή την κατάσταση με μια πράξη;

β) Περιγράψτε με λόγια και με μια πράξη την κατάσταση που περιγράφει το σχήμα 2. Ποιο είναι το σύνολο πόντων της ομάδας;



σχήμα 1



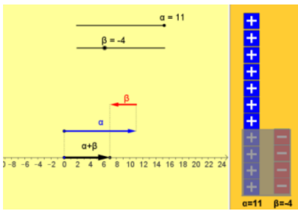
σχήμα 2

γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το παιχνίδι για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι επόμενες πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: (+3)+(+4) , (–2)+(–5) , (–8)+(–3) , (–7)+(–5) .
Μπορείτε να σκεφτείτε έναν κανόνα για να κάνετε αυτές τις προσθέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;

δ) Χρησιμοποιήστε αυτό το παιχνίδι για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι επόμενες πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: (+3)+(–5) (–2)+(+3) (–5)+(+3) (+7)+(–4)
Μπορείτε να σκεφτείτε έναν κανόνα για να κάνετε αυτές τις προσθέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;

[Σχόλιο: Η δραστηριότητα αποτελεί μια εισαγωγή στην πρόσθεση ακεραίων και έχει ως στόχο την «ανακάλυψη» του ορισμού της πρόσθεσης και των αντίθετων ως αριθμών με άθροισμα μηδέν. Χρησιμοποιείται το μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών, το οποίο μπορεί να στηριχτεί σε χειραπτικό υλικό (πχ. κόκκινα και μαύρα πούλια) ή σε εικονικές αναπαραστάσεις (πχ το +5 μπορεί να παρασταθεί με +++++). Πλεονεκτήματα αυτού του μοντέλου είναι η άμεση σχέση του με τη συμβολική γραφή του αθροίσματος (η ύπαρξη 5 θετικών καρτών και 2 αρνητικών συμβολίζεται με (+5)+(–2)) και η πρόσβαση στην ιδέα των αλληλοαναιρούμενων ποσοτήτων που οδηγεί στους αντίθετους αριθμούς. Τα δύο πρώτα ερωτήματα της δραστηριότητας έχουν ως στόχο την εξοικείωση των μαθητών με το πλαίσιο του προβλήματος και τη χρήση του μοντέλου σε προσθέσεις. Το τρίτο και το τέταρτο ερώτημα, καλούν τους μαθητές να κάνουν προσθέσεις με χρήση των καρτών και κατόπιν να επιχειρήσουν γενικεύσεις για τους πιθανούς κανόνες της πρόσθεσης. Είναι πιθανό να απαιτηθεί αρκετή συζήτηση μεταξύ των μαθητών για να φτάσουν στη γενίκευση (ιδιαίτερα στο τέταρτο ερώτημα) και ο εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει με κατάλληλες ερωτήσεις.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 3η:



Η εισαγωγή στην πρόσθεση ακεραίων αριθμών μπορεί να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως με το «Πειράματα με την πρόσθεση ακεραίων αριθμών», στο Φωτόδεντρο: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/14348
Αναλυτικότερες πληροφορίες για την εφαρμογή και τις δραστηριότητες στις οποίες μπορεί να εμπλέξει τους μαθητές ο εκπαιδευτικός, υπάρχουν σε σύνδεσμο στο κάτω μέρος της εφαρμογής.

§7.4 (Να διατεθούν 6 ώρες)

Μια πηγή δυσκολιών για τους μαθητές είναι η τριπλή σημασία του συμβόλου «–»: ως πρόσημο (π.χ. στον αριθμό -2), ως δηλωτικό του αντίθετου (π.χ. στο –(-3) ή στο -*α*) και ως σύμβολο της αφαίρεσης (π.χ. στο 3–8). Είναι, λοιπόν, χρήσιμο να γίνει συζήτηση στην τάξη με στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης όλων αυτών των σημασιών και την ευχέρεια στην μετάβαση από τη μία σημασία στην άλλη. Επιπλέον, ίσως χρειάζεται να ξαναγίνει συζήτηση για την έννοια του αντίθετου (βλ. την §7.2). Επειδή στην απαλοιφή των παρενθέσεων εμφανίζονται δυσκολίες, καλό είναι να δοθεί περισσότερος χρόνος για την κατανόησή της από τους μαθητές. Ένας τρόπος να αποδοθεί νόημα στους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων είναι ο υπολογισμός με δύο τρόπους των αποτελεσμάτων (άσκηση 8). Ένας ακόμη τρόπος (ο οποίος είναι ίσως περισσότερο αποδοτικός) είναι η χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας. Αυτό σημαίνει ότι η απαλοιφή παρενθέσεων δεν θα διδαχθεί σε αυτή την παράγραφο αλλά στην επόμενη (βλ. παρακάτω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 126
- Παραδείγματα 3, 4 σ. 127
- Ασκήσεις 2, 4, 5, 6 σ. 128

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

Σε μια παραλλαγή του παιχνιδιού με τις κάρτες, μπορούν από μια ομάδα να αφαιρούνται κάρτες, θετικές ή αρνητικές. Έτσι, για παράδειγμα, όταν αφαιρούνται 5 θετικές κάρτες από 10, μένουν 5, δηλαδή (+10)–(+5)=+5.

α) Πως μπορούμε να εκφράσουμε (με πράξη) την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 5 αρνητικές κάρτες και της αφαιρέθηκαν 3 αρνητικές; Ποιο είναι τώρα το σκορ της ομάδας;

β) Μια ομάδα έχει σκορ +25. Με ποιους τρόπους μπορεί να αυξήσει το σκορ της σε +28; Με ποιους τρόπους μπορεί να μειωθεί το σκορ της σε +20;

γ) Πώς θα μπορούσαν από μια ομάδα που δεν έχει ούτε θετικές ούτε αρνητικές κάρτες να αφαιρεθούν 5 θετικές κάρτες; 3 αρνητικές;

δ) Χρησιμοποιήστε το παιχνίδι με τις κάρτες για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι παρακάτω πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους:

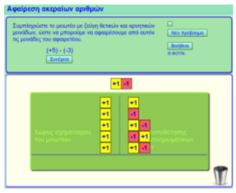
(+3)–(–5)   (–2)–(+3)   (–5)–(+3)   (+7)–(–4)   (–7)–(–5)

ε) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την πρόσθεση για να κάνετε τις αφαιρέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;

[Σχόλιο: Η δραστηριότητα αυτή επεκτείνει το μοντέλο των καρτών στην αφαίρεση, όπου μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο για να προκύψει η ιδέα ότι η αφαίρεση ενός αριθμού είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση του αντιθέτου του. Για παράδειγμα, για την αφαίρεση (+3)–(–5), δηλαδή για να αφαιρεθούν 5 αρνητικές κάρτες ενώ έχουμε μόνο 3 θετικές, θα πρέπει πρώτα να προστεθούν 5 "ζεύγη του μηδενός" δηλαδή 5 θετικές και 5 αρνητικές κάρτες, ώστε να μπορούν μετά να αφαιρεθούν οι 5 αρνητικές. Έτσι όμως, το αποτέλεσμα είναι (+3)+(+5), αφού έμειναν οι 5 θετικές κάρτες. Αυτή η ιδέα υπάρχει στο (γ) ερώτημα, το οποίο χρειάζεται χρόνο για να συζητηθεί στην τάξη. Δυσκολία έχει και η διερεύνηση πολλαπλών τρόπων αντιμετώπισής του (β) ερωτήματος που θα πρέπει και αυτό να συζητηθεί αρκετά στην τάξη.]

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα $2^{η}$:</u>

Η εισαγωγή στην αφαίρεση ακεραίων αριθμών μπορεί να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως με το «Αφαίρεση ακεραίων αριθμών-Το μοντέλο των καρτών», από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1917



§7.5 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Για την κατανόηση του πρόσημου του γινομένου δύο ρητών είναι καλό να χρησιμοποιηθεί η εισαγωγική δραστηριότητα του βιβλίου.

Εδώ προτείνεται να διδαχθεί και η απαλοιφή παρενθέσεων, με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας. Αυτό θα επιτρέψει την κατανόηση και αιτιολόγηση των κανόνων. Για παράδειγμα, η έκφραση –(2 – 5) μπορεί να σημαίνει

$$-(2-5)=(-1)\cdot\left[(+2)+(-5)\right]=(-1)\cdot(+2)+(-1)\cdot(-5)=(-2)+(+5)=-2+5$$

και αυτό μπορεί να γενικευθεί και σε παραστάσεις με μεταβλητές, (π.χ. $-(\alpha-\beta)=\ldots$). Βέβαια, θα πρέπει να προηγηθεί μια συζήτηση για να εξηγηθεί ότι ο αντίθετος ενός αριθμού είναι το γινόμενό του με το -1, πράγμα που μπορεί να γίνει μέσω παραδειγμάτων, όπως $(-1)\cdot(+2)=-2$, $(-1)\cdot(-5)=+5$ κ.ο.κ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 129
- Παραδείγματα 1, 2, 4 σ. 131
- Ασκήσεις 2, 3, 4, 5, 7, 8 σ. 132

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Υπολογίστε την τιμή της αριθμητικής παράστασης $\frac{2}{5}\cdot 10-3\cdot(-2)-\frac{1}{2}\cdot\left(-3+7-2\right)$ καταγράφοντας σε κάθε κίνηση που κάνετε τον ορισμό ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.

[Σχόλιο: Το ζητούμενο είναι η ανάπτυξη μιας συζήτησης στην τάξη που θα αναδεικνύει μαθηματικές έννοιες, ιδιότητες και συμβάσεις, και θα βοηθά τους μαθητές να συνειδητοποιούν το «γιατί» και όχι μόνο το «πως» σε αυτό που κάνουν. Παρόμοιοι στόχοι μπορούν να υπηρετούνται και από δραστηριότητες όπου δίνονται κάποια πιθανά αποτελέσματα μιας αριθμητικής παράστασης και ζητείται η ερμηνεία του πως μπορεί να προέκυψαν αυτά και η αναγνώριση των λαθών.]

§7.6 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Η διαίρεση ως πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο του διαιρέτη ανάγεται άμεσα στον πολλαπλασιασμό και έτσι οι κανόνες των προσήμων του πολλαπλασιασμού επεκτείνονται και στη διαίρεση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 133-134
- Ασκήσεις 2, 3, 5, 6, 7 σ. 134

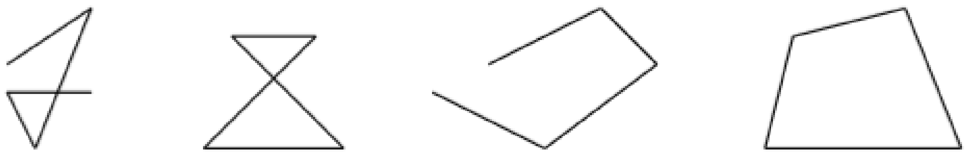
§7.7 (Να διατεθούν 2 ώρες)
Σε συνδυασμό με την μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό (που εντοπίζεται στην §3.1) η αντίστροφη διαδικασία είναι σημαντική για τη συγκρότηση της έννοιας του ρητού αριθμού.

§ 7.8 (Να διατεθούν 4 ώρες)
Είναι σημαντικό να αφιερωθεί χρόνος στην εξήγηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων μέσα από παραδείγματα. Η απομνημόνευση των κανόνων είναι προτιμότερο να έρθει μέσα από τη χρήση τους και όχι από την αρχή της διδασκαλίας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:
Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το γινόμενο $3^4 \cdot 3^5$ είναι ίσο με τη δύναμη 3^9; Μπορείτε να γράψετε με μορφή μιας δύναμης το γινόμενο $2^3 \cdot 2^5$;
Μπορείτε να γράψετε με μορφή μιας δύναμης το γινόμενο $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda$;
Πως θα γράφατε το 5^8 ως γινόμενο δυνάμεων;
[Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η διερεύνηση και η αιτιολόγηση (από τους μαθητές) της ιδιότητας $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$. Αντίστοιχες δραστηριότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τις υπόλοιπες ιδιότητες.]

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφάλαιο 1ο (Να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες)
Στην εισαγωγή γεωμετρικών εννοιών χρειάζεται να δοθεί έμφαση στο να μπορούν οι μαθητές να τις αναγνωρίζουν, να τις περιγράφουν (άτυπα ή τυπικά) και να τις αναπαριστάνουν. Για το πρώτο κεφάλαιο προτείνεται να δοθεί αρκετός χρόνος στην τάξη, για σχεδιασμό σχημάτων από τους μαθητές και με χρήση χειραπτικών μέσων για συγκρίσεις και κατασκευές (π.χ. διαφανές χαρτί). Στις παραγράφους 1.1-1.4 προτείνεται οι ορισμοί να προσεγγίζονται διαισθητικά από τους μαθητές, χωρίς να ζητείται τυπική διατύπωσή τους. Στις επόμενες παραγράφους, αν διατυπώνονται ορισμοί, αυτό να γίνεται διερευνητικά και «κατασκευαστικά» από τους μαθητές, αφού πρώτα έχουν αναγνωρίσει τις ιδιότητες των αντίστοιχων γεωμετρικών αντικειμένων-εννοιών. Ενδεικτικά βλέπε την παρακάτω ενδεικτική δραστηριότητα και την ενδεικτική δραστηριότητα 2 της §1.8.
Ενδεικτική δραστηριότητα:
Ο διδάσκων απευθύνει το ερώτημα «τι είναι τετράπλευρο» και χρησιμοποιεί τις απαντήσεις των μαθητών για να τους καθοδηγήσει στη διατύπωση του ορισμού. Στην πολύ πιθανή απάντηση «ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές», παρουσιάζει διαδοχικά τα παρακάτω σχήματα και ζητά κάθε φορά από τους μαθητές να εντοπίσουν εκείνο το χαρακτηριστικό που δε συνδέεται με την εικόνα που έχουν για την έννοια «τετράπλευρο».



§§1.1 - 1.4 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)
Οι έννοιες που εισάγονται σε αυτές τις παραγράφους, αν και είναι διαισθητικά γνώριμες στους μαθητές (κάποιες γνωστές κι από το δημοτικό) έχουν δυσκολία στην τυπική περιγραφή τους. Στις επόμενες παραγράφους οι μαθητές θα συναντούν ξανά και ξανά αυτές τις έννοιες. Θα έχουν την ευκαιρία να περάσουν σιγά-σιγά και σε βάθος χρόνου, από την διαισθητική, αντίληψη στην πιο τυπική.
Για αυτούς τους λόγους, σε αυτή τη φάση προτείνεται να γίνει εποπτική προσέγγιση των εννοιών, ώστε οι μαθητές να αρχίζουν να αναγνωρίζουν ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, ημιευθείες, αντικείμενες ημιευθείες και γωνίες. Η ισότητα σχημάτων μπορεί να εισαχθεί με τη χρήση χειραπτικών μέσω

(π.χ. διαφανούς χαρτιού), όπως στο παράδειγμα-εφαρμογή της σελίδας 155. Ένα εποπτικό εμπόδιο, που μπορεί να αντιμετωπιστεί σε αυτή τη φάση είναι η δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν τα σημεία του διπλανού σχήματος, ως σημεία της κυρτής γωνίας του ίδιου σχήματος.
Η δραστηριότητα 2 της σελίδας 148 προτείνεται να αντικατασταθεί με μία απλούστερη.
Επίσης προτείνεται να διατεθεί χρόνος για μετρήσεις και απλές συγκρίσεις ευθυγράμμων τμημάτων, όπως στα παραδείγματα της σελίδας 160, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της μέτρησης και της σύγκρισης τμημάτων (με μέτρηση ή διαβήτη).
Η διαφοροποίηση ανάμεσα στο ευθύγραμμο τμήμα και στο μήκος του, η έννοια της μονάδας μέτρησης (άτυπη, τυποποιημένη), η προσεγγιστική φύση της διαδικασίας της μέτρησης, η χρήση των οργάνων μέτρησης, ο τρόπος μεταβολής του αποτελέσματος της μέτρησης όταν χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια μιας αρχικής μονάδας θα κατανοηθούν από τους μαθητές μέσα από τη χρήση τους στις επόμενες παραγράφους.
Στην §1.4, προτείνεται να μην ζητηθεί από τους μαθητές να διατυπώσουν τους ορισμούς και τις ιδιότητες μήκους τεθλασμένης γραμμής και ευθύγραμμου τμήματος, αλλά να τις εφαρμόσουν σε συγκεκριμένες δραστηριότητες και ασκήσεις.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΝΑ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ

§1.1

- Θα δοθούν διαισθητικά με παραδείγματα που θα επιλέξει ο διδάσκων για τις έννοιες σημείο, ευθ. τμήμα, ευθεία, ημιευθεία, επίπεδο, ημιεπίπεδο και θα τονιστούν οι σχέσεις του περιέχεσθαι (η ευθεία απαρτίζεται από σημεία, τα τμήματα είναι μέρη ευθειών κτλ).
- Να γίνει η συσχέτιση ημιευθείας-ημιάξονα και ευθείας-ευθείας αριθμών (παράγραφο; 1.1)
- Παραδείγματα: 1,2, 3 σ. 151.
- Ασκήσεις 2, 3, 4, 5.
- Επίσης να δοθεί ως άσκηση η δραστηριότητα 1 σ. 152

§1.2

- Να αναδειχθεί το γεγονός ότι δύο ημιευθείες με κοινή αρχή ορίζουν δύο γωνίες.
- Να τονιστεί ότι ως γωνίες πολυγώνου νοούνται οι γωνίες που ορίζουν οι ημιευθείες που περιέχουν δύο διαδοχικές πλευρές και έχουν αρχή την κοινή κορυφή.
- Δραστηριότητα 2 σ. 154 (στην επεξεργασία της να γίνει αναφορά και σε μη κυρτές γωνίες).
- Παράδειγμα σ. 155 (Να τονιστεί ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα αν μπορούν, με κατάλληλο τρόπο περιλαμβανομένης και της δίπλωσης, να τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο και να συμπέσουν).
- Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5 σ. 156.

§1.3

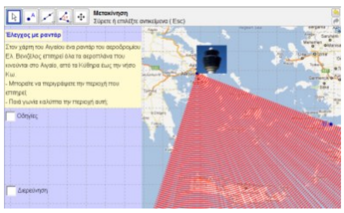
- Θα καταβληθεί προσπάθεια να διδαχθεί μετά το κεφάλαιο της Άλγεβρας που αναφέρεται στις μονάδες μέτρησης.
- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 160-161.
- Ασκήσεις 8, 9, 10, 11, 12 σ. 162 (Επιδιώκεται να καλλιεργηθεί η κατασκευαστική δεξιότητα και η συνακόλουθη επίγνωση των ιδιοτήτων των σχημάτων)

§1.4

- Δραστηριότητα σ. 163. Ασκήσεις 6, 8, 11 σ. 164.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα</u>:

Η εισαγωγή στην έννοια της γωνίας μπορεί να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως με το «Πειράματα για την έννοια της γωνίας», στο Φωτόδεντρο:
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/14354
Αναλυτικότερες πληροφορίες για την εφαρμογή και τις δραστηριότητες που μπορεί να εμπλέξει τους μαθητές ο εκπαιδευτικός, υπάρχουν σε σύνδεσμο στο κάτω μέρος της εφαρμογής.



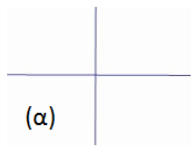
§1.5 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

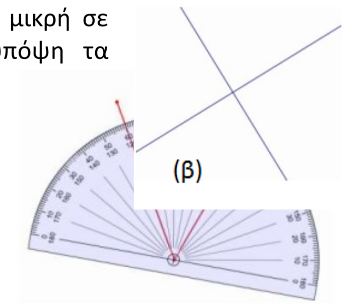
Οι μαθητές έχουν γνωρίσει τις άλλες έννοιες στο Δημοτικό, εκτός από την έννοια της διχοτόμου γωνίας, όμως αντιμετωπίζουν δυσκολίες σχετικά μ' αυτές. Συγκεκριμένα συγχέουν ποιο ακριβώς

είναι το γεωμετρικό αντικείμενο που μετράται (η γωνία) με άλλα και/ή τις μετρήσεις τους, όπως τα μήκη των τμημάτων που είναι οι πλευρές της γωνίας, την επιφάνεια ανάμεσα στις ημιευθείες κ.λ.π. Επίσης ταυτίζουν το γεωμετρικό αντικείμενο (γωνία) με την μέτρησή του (μέτρο της γωνίας).
Προτείνεται η σύγκριση γωνιών να γίνεται και με τη χρήση διαφανούς χαρτιού (παραδείγματα 1, 2 και άσκηση 6) και όχι αποκλειστικά και μόνο μέσω του μέτρου τους με τη μέτρηση με μοιρογνωμόνιο. Γενικά, διαφορετικά μέσα αναδεικνύουν διαφορετικές πτυχές των εννοιών που διαπραγματευόμαστε. Για παράδειγμα, η εύρεση - κατασκευή της διχοτόμου μιας γωνίας (σελ. 167) με δίπλωση του χαρτιού αναδεικνύει την ισότητα των γωνιών αλλά και την διχοτόμο ως άξονα συμμετρίας, ενώ η κατασκευή με το μοιρογνωμόνιο αναδεικνύει την ισότητα των γωνιών μέσω του μέτρου τους. Επίσης, προτείνεται οι μαθητές να συγκρίνουν γωνίες χρησιμοποιώντας και άτυπες μονάδες μέτρησης γωνιών (μικρότερες γωνίες) και να δοθεί αρκετός χρόνος σε μετρήσεις και κατασκευές γωνιών.
Για τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια της μέτρησης, παραπέμπουμε στην θέση http://ebooks.edu.gr/new/ps.php, στο 2. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣ ΤΑ ΙΣΧΥΟΝΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ/ Β. Οδηγοί για τον Εκπαιδευτικό/ Επιστημονικό Πεδίο: Μαθηματικά/ Σελ 81.
Η δραστηριότητα που προτείνεται στην παράγραφο 1.6, μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα και να χρησιμοποιηθεί σε αυτή την παράγραφο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Η δραστηριότητα της σ. 165 να αντικατασταθεί με μέτρηση γωνιών που θα υπάρχουν σε φύλλο χαρτιού που θα δοθεί με φωτοαντίγραφο από τον διδάσκοντα.
- Παραδείγματα 1, 2, (μπορεί να γίνει και με διαφανές χαρτί) 3 σ. 166-167.
- Ασκήσεις 2, 3, 4, 7 σ. 168.
- Οι δραστηριότητες 1, 2 της σ. 168 μπορούν να γίνουν μόνο εφόσον ο διδάσκων κατατοπίσει τους μαθητές για την ανάκλαση.

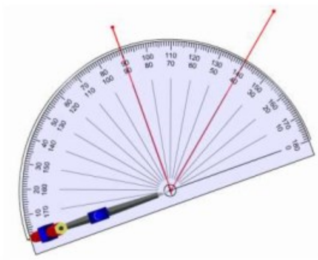
§1.6 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)
Το περιεχόμενο της ενότητας είναι γνωστό στους μαθητές από το Δημοτικό, εκτός από την μηδενική, την ευθεία, την μη κυρτή και την πλήρη γωνία. Παρόλα αυτά η έννοια της καθετότητας μπορεί να μην έχει κατακτηθεί από πολλούς μαθητές και μια από τις συνηθισμένες δυσκολίες που έχουν είναι η αναγνώριση της καθετότητας σε ευθείες που δεν έχουν τον συνήθη οριζόντιο και κατακόρυφο προσανατολισμό. Κάποιες από τις αιτίες αυτής της δυσκολίας είναι ο τρόπος προσανατολισμού των σχημάτων στα σχολικά βιβλία (π.χ. ορθογώνια ή τετράγωνα με πλευρές παράλληλες προς τις ακμές των σελίδων του βιβλίου), οι παραστάσεις που έχουν από το περιβάλλον γύρω τους (π.χ. οριζόντιος και κατακόρυφος προσανατολισμός των κουφωμάτων των σπιτιών, των παραθύρων κλπ), αλλά και από τον τρόπο προσανατολισμού των σχημάτων στον πίνακα, κατά την διδασκαλία. Το φαινόμενο αυτό δεν περιορίζεται μόνον στην έννοια της καθετότητας αλλά επεκτείνεται και στην αναγνώριση σχημάτων π.χ. δεν αναγνωρίζουν ως τρίγωνο κάποιο «μακρόστενο» στο οποίο μία πλευρά είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες. Θα πρέπει ο διδάσκων, λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα, να εμπλουτίζει την ποικιλία των σχημάτων που χρησιμοποιεί κατά την διάρκεια της διδασκαλίας.





Για παράδειγμα, προτείνεται για την αναγνώριση των κάθετων ευθειών να χρησιμοποιούνται και τα δύο σχήματα (α και β) του διπλανού σχήματος και όχι μόνο το (α).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Δραστηριότητες 1, 2 σ 169.
- Παραδείγματα 1 &2 (να τονιστεί ότι ο έλεγχος της καθετότητας μπορεί να γίνει και με μέτρηση ή γνώμονα), 3, 4 σ, 171-172.
- Ασκήσεις 6, 7 σ. 172.



<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</u>:
Ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές, που είναι χωρισμένοι

σε ομάδες, προσχεδιασμένες γωνίες και ζητά από αυτούς να τις χαρακτηρίσουν ως κυρτές – μη κυρτές και αμβλείες, ορθές ή οξείες (στην περίπτωση των μη κυρτών). Στην αρχή οι μαθητές μετρούν τη γωνία με το μοιρογνωμόνιο με τον συνήθη τρόπο. Κατόπιν τους ζητά να βρουν τρόπο ή τρόπους να τις μετρήσουν με το μοιρογνωμόνιο, χωρίς όμως να ακολουθήσουν την τυπική διαδικασία ταύτισης μιας πλευράς της γωνίας με τη διάμετρο του ημικυκλίου του μοιρογνωμονίου, όπως δείχνουν οι εικόνες. Οι μαθητές θα πρέπει να περιγράψουν τις στρατηγικές που ακολούθησαν και να συζητήσουν διάφορα χαρακτηριστικά. Αναμένεται ότι οι μαθητές θα ανακαλύψουν ότι η μέτρηση μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους ανεξάρτητα από την τοποθέτηση του μοιρογνωμονίου, αρκεί το κέντρο του να είναι στην κορυφή της γωνίας και να βρίσκουν τη διαφορά των ενδείξεων της ίδιας κλίμακας. Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός, με κατάλληλες ερωτήσεις, βοηθά τους μαθητές να κάνουν τη σύνδεση με τη σχέση της επίκεντρης γωνίας και του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει αυτή, την ανεξαρτησία του μέτρου του τόξου από την ακτίνα των ημικυκλίων των μοιρογνωμονίων και τον χωρισμό των τόξων σε ίσα μέρη από τα εξωτερικά σημάδια - ενδείξεις του μοιρογνωμονίου και αντίστοιχα των γωνιών.
[Σχόλιο: Η παραπάνω δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί με κατάλληλες μετατροπές και στην παράγραφο 1.5. Στόχος είναι η χρήση άτυπων μονάδων μέτρησης για τη σύγκριση γωνιών.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:
Οι μαθητές καταγράφουν και σχεδιάζουν τα διάφορα είδη γωνιών (μηδενική, κυρτή, οξεία, ορθή, αμβλεία, ευθεία, μη κυρτή, πλήρης) και τις ταξινομούν ως προς το μέτρο μεδιάφορους τρόπους.

§1.7 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)
Οι έννοιες είναι νέες για τους μαθητές. Να αναφερθεί η έννοια της διαφοράς δύο γωνιών. Να δοθεί προτεραιότητα κατά σειρά στις ασκήσεις 1, 4 (περιπτώσεις 3 και 2) και 3 και να εμπλουτισθούν οι ασκήσεις με ερωτήματα για τον προσδιορισμό της γωνίας η οποία είναι το άθροισμα των ζευγών των εφεξής γωνιών που βρίσκουν οι μαθητές, όπως και ερωτήματα προσδιορισμού της διαφοράς δύο γωνιών. Ο ορισμός των εφεξής γωνιών είναι αρκετά περίπλοκος στη διατύπωσή του. Προτείνεται να αναγνωρίσουν οι μαθητές τις ιδιότητες των εφεξής γωνιών και στη συνέχεια να κατασκευάσουν οι ίδιοι τον ορισμό, διαπιστώνοντας την αναγκαιότητα της συγκεκριμένης διατύπωσης.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Δραστηριότητα σ. 173.
- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 174-175.
- Ασκήσεις 1, 2, σ. 175.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Η εισαγωγή στις έννοιες των εφεξής και διαδοχικών γωνιών μπορεί να γίνει με τη δραστηριότητα της σελίδας 173 του σχολικού βιβλίου και πιο διερευνητικά με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως με το «Κοινά στοιχεία γωνιών», στο Φωτόδεντρο:
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2184

§1.8 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)
Οι έννοιες είναι νέες για τους μαθητές. Προτείνεται κι εδώ οι ορισμοί να έπονται της αναγνώρισης των ιδιοτήτων και να είναι προϊόν της διερεύνησης των μαθητών. Σε αυτή την κατεύθυνση προτείνεται η «ενδεικτική δραστηριότητα 2» που ακολουθεί

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Δραστηριότητα σ. 176.
- Παραδείγματα 1, 2 (να διευκρινιστεί ότι δύο γωνίες μπορεί να είναι παραπληρωματικές ή συμπληρωματικές χωρίς να είναι εφεξής), 3, 4, 5, 6 σ. 177-178.
- Ασκήσεις 3, 5, 9, 11 σ. 179.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

Για την ισότητα των κατακορυφήν γωνιών μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μικροπείραμα «Κατακορυφήν γωνίες», όπου οι μαθητές μέσα από την εμπλοκή τους με ένα προβληματικό μικρόκοσμο που πρέπει να διορθώσουν, εισάγονται στην έννοια των κατακορυφήν γωνιών και τη σχέση τους. Το μικροπείραμα έχει δημιουργηθεί με χρήση εργαλείων συμβολικής έκφρασης μέσω του προγραμματισμού (Χελωνόσφαιρα).
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/9521

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

1η φάση (εξερεύνηση ιδιότητας): Ο διδάσκων προτρέπει τους μαθητές να σχεδιάσουν δύο τεμνόμενες ευθείες και να εικάσουν για σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των γωνιών που σχηματίζονται. Οι μαθητές μετρούν προσεγγιστικά με το μοιρογνωμόνιο. Αναμένεται ότι θα εικάσουν ότι υπάρχουν δύο ζεύγη ίσων γωνιών και είναι μάλλον απίθανο ότι θα εικάσουν ζεύγη παραπληρωματικών. Ο διδάσκων θέτει το ερώτημα αν θα δημιουργούνται ζεύγη ίσων γωνιών σε κάθε περίπτωση που τέμνονται δύο ευθείες. Προτείνει να διερευνήσουν την κατάσταση στον υπολογιστή με κάποιο πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας. Οι μαθητές αναζητούν εξήγηση γιατί αυτά τα ζεύγη γωνιών είναι ίσα και συνεργάζονται για να δημιουργήσουν μια απόδειξη του ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες. Με προτροπή του διδάσκοντα εξερευνούν τη σχέση που έχουν οι εφεξής γωνίες. Αν ανακαλύψουν ότι οι γωνίες είναι παραπληρωματικές. Καταγράφουν όλα τα ζεύγη των παραπληρωματικών γωνιών, συζητούν και δικαιολογούν γιατί είναι παραπληρωματικές.

2η φάση (Ορισμός): Ο διδάσκων δίνει στους μαθητές ένα φύλλο χαρτί που περιέχει δύο στήλες. Η μία έχει τίτλο «Κατακορυφήν γωνίες» και η άλλη «Γωνίες που δεν είναι κατακορυφήν». Κάθε στήλη έχει αντιστοίχως παραδείγματα και μη παραδείγματα κατακορυφήν γωνιών (στα μη παραδείγματα πρέπει να έχουν περιληφθεί ζεύγη ίσων γωνιών με ένδειξη του μέτρου των γωνιών). Ζητείται από τους μαθητές να βρουν τα κοινά χαρακτηριστικά των κατακορυφήν γωνιών και να γράψουν έναν ορισμό που θα τις περιγράφει. Οι μαθητές λόγω της προηγούμενης εξερεύνησης θα μπορέσουν να δώσουν έναν ορισμό αρκετά κοντά στον τυπικό ορισμό και θα διακρίνουν την διαφορά ορισμού και ιδιότητας.

[Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να οδηγηθούν στην διατύπωση του ορισμού, μετά από εξερεύνηση. Έτσι διαπιστώνουν την αναγκαιότητα της χρήσης των συγκεκριμένων λέξεων στον ορισμό.]

§§1.9 και 1.10 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Η έννοια της παραλληλίας είναι γνωστή στους μαθητές από το Δημοτικό. Προτείνεται να δοθεί ως άσκηση ο σχεδιασμός ενός παραλληλογράμμου (είναι γνωστή έννοια από το Δημοτικό) με στοιχεία που θα καθορίσει ο διδάσκων/ουσα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 2.
- Παράδειγμα 2 σ. 181.
- Παραδείγματα 1, 2, 3 (να τονιστεί ότι παράλληλες ευθείες είναι εκείνες που όλα τα σημεία της μιας ισαπέχουν από την άλλη) , 4 σ. 185.
- Ασκήσεις 2, 3, 5, 6 σ. 186.

§1.11 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Λόγω εξαίρεσης από την διδακτέα ύλη της επόμενης παραγράφου οι εφαρμογές 2 και 3 της §1.12 θα διδαχθούν σε αυτή την παράγραφο, μαζί με την εφαρμογή της σελ. 189. Ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει οι κατασκευές να γίνουν με ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και με κατάλληλες δραστηριότητες και ερωτήσεις οι μαθητές να διερευνήσουν π.χ. τις συνθήκες κατασκευής ενός τριγώνου, όταν δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα (εφαρμογή, σελ. 189, δραστηριότητα για το σπίτι, αριθ. 2).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητες 2, 3 σ. 187.
- Παράδειγμα 1 σ . 189.
- Ασκήσεις 2, 3,4 σ. 189

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</u>:
Μέσω διερευνητικής δραστηριότητας, οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν κύκλο, που να διέρχεται από τρία δοσμένα σημεία (με χρήση της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και ορισμού του κύκλου).

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</u>:
Με το παρακάτω μικροπείραμα του Φωτόδεντρου, μπορεί να γίνει διερευνητικά στην τάξη η εφαρμογή της σελίδας 189).

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/9521

§§ 1.12 και 1.13 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)
Το περιεχόμενο της ενότητας είναι νέο για τους μαθητές. Προτείνεται να δοθεί χρόνος για κατασκευές και οι μαθητές να ανακαλύψουν και να διατυπώσουν τις αντίστοιχες προτάσεις.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 190. Στο «Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε» της σ. 193 εφόσον είναι δυνατό να γίνει χρήση λογισμικού.
- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 193.
- Ασκήσεις 1, 4 σ. 194

Κεφάλαιο 2^{ο} (Να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

Αυτό που επιδιώκεται από τη διδασκαλία των συμμετριών είναι να αποκτήσουν οι μαθητές, μια ευελιξία στον τρόπο της γεωμετρικής τους σκέψης και να τις χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο για τη μελέτη και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων, όπως των παραλλήλων ευθειών που τέμνονται από άλλη ευθεία (§2.6), της μεσοκαθέτου (§2.3) και των ιδιοτήτων των ειδών τετραπλεύρου.
Γενικά για την διδασκαλία του κεφαλαίου 2 ενδείκνυται η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών, παράλληλα με τη χρήση άλλων μέσων (όπως το διαφανές χαρτί, τα γεωμετρικά όργανα, τετραγωνισμένο χαρτί κτλ.) με σκοπό όχι μόνο την κατασκευή συμμετρικών σχημάτων αλλά και την κατανόηση και την αξιοποίηση των ιδιοτήτων της συμμετρίας.
Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διαισθητική αναγνώριση των ιδιοτήτων των συμμετριών και στις κατασκευές.
Στόχοι είναι:

- ✓ Οι μαθητές να κατασκευάζουν σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα και κέντρο.
- ✓ Να αναγνωρίζουν υπάρχουσες συμμετρίες σε δοθέντα σχήματα.
- ✓ Να κατανοήσουν ότι με την κεντρική και την αξονική συμμετρία διατηρούνται τα μήκη, η ισότητα των γωνιών και η ισότητα σχημάτων.
- ✓ Να χρησιμοποιούν τη συμμετρία σε διεργασίες αιτιολόγησης.

§§2.1 και 2.2 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)
Οι παράγραφοι 2.1 και 2.2 θα διδαχθούν σαν μια ενότητα. Προτείνεται να προηγηθεί η διδασκαλία της §2.2 (άξονας συμμετρίας) και να ακολουθήσει η διδασκαλία της §2.1 (συμμετρία ως προς άξονα) με σκοπό να προηγηθεί το διαισθητικό μέρος της αξονικής συμμετρίας και κατόπιν να ακολουθήσει το κατασκευαστικό και τα συμμετρικά σχήματα.
Επισημαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται σε κατασκευές με την αξονική συμμετρία, καθώς συχνά κάνουν μεταφορά, αντί για ανάκλαση. Γι' αυτό προτείνεται να διατεθεί χρόνος σε κατασκευές, από τους ίδιους.
Να επισημανθεί ότι η ταύτιση των δύο μερών του σχήματος, όταν διπλώνεται κατά μήκος του άξονα

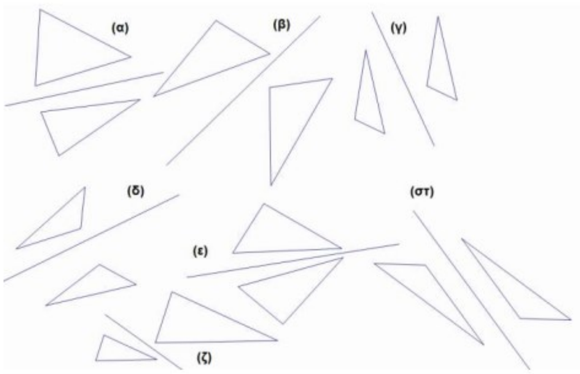
συμμετρίας του, σημαίνει ισότητα των δύο μερών. Προτείνεται να δοθούν για ανακάλυψη και αιτιολόγηση οι ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου[1] (δεν θα αναφέρονται σε ύψος, διάμεσο και διχοτόμο του τριγώνου ως προς την βάση, αλλά θα συνάγουν ότι ο άξονας συμμετρίας διχοτομεί την γωνία που είναι απέναντι από την βάση, τέμνει κάθετα την βάση κτλ.), του ισόπλευρου, του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου (οι μαθητές τα σχεδιάζουν σε διαφανές χαρτί ή τους δίνονται έτοιμα τα σχήματα και με την χάραξη των αξόνων συμμετρίας και την δίπλωση των σχημάτων κατά μήκος αυτών ανακαλύπτουν και δικαιολογούν τις ιδιότητες τους).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 200.
- Παραδείγματα 1-9 σ. 201-203 (για την τάξη).
- Άσκηση 2 σ. 203.
- 2.2 Δραστηριότητα σ. 204.
- Παράδειγμα 1. σ. 205.
- Ως παράδειγμα στην τάξη να γίνει η άσκηση 3 σ. 205.
- Ασκήσεις 4, 5 σ, 205.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1η</u>:

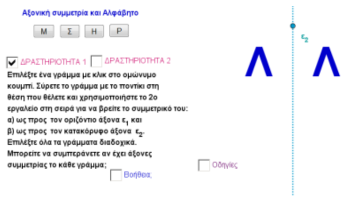
Οι μαθητές προσπαθούν να προσδιορίσουν ποια από τα σχήματα της εικόνας είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα που είναι σχεδιασμένος και να δικαιολογήσουν την απάντησή τους. Εξηγούν τον τρόπο που σκέφτηκαν και τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Για παράδειγμα, μπορεί να απέκλεισαν κάποιες περιπτώσεις και εξηγούν τα κριτήρια αποκλεισμού. Στη συνέχεια ο διδάσκων προτείνει να εξετάσουν μήπως υπάρχει κάποια περίπτωση που να μπορούν τα σχήματα να γίνουν συμμετρικά ως προς άξονα, αλλά ο άξονας δεν είναι σωστά σχεδιασμένος και τους προτρέπει να σχεδιάσουν τον σωστό άξονα.



[Σχόλιο: Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει σε συνδυασμό με τη δραστηριότητα1 της §2.3]

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2η</u>:

Η άσκηση 2 της σελίδας 205 του σχολικού βιβλίου μπορεί να γίνει πιο διερευνητικά με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων όπως με το «Αξονική συμμετρία και αλφάβητο», από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2051



§2.3 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Στόχοι είναι:

- ✓ Η χρήση της αξονικής συμμετρίας για την αιτιολόγηση της ιδιότητας της μεσοκαθέτου.
- ✓ Η κατασκευή της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος με διαφορετικούς τρόπους (υποδεκάμετρου και γνώμονα, κανόνα και διαβήτη, δίπλωση χαρτιού).

Προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στις εφαρμογές 1, 2 και 5 και στις ασκήσεις 1, 3, 4, 5, 7 και 9.

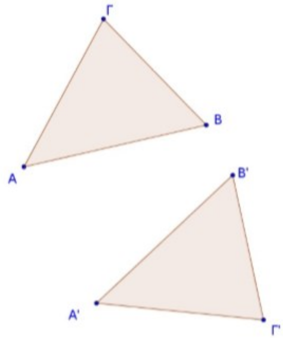
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ 206.
- Παραδείγματα 1-5 σ. 207-208. Να γίνει αναφορά στο ισοσκελές.
- Ασκήσεις 2, 3 σ. 209.

1 Οι έννοιες του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου τους είναι γνωστές από το Δημοτικό, ομοίως του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου.

- Η δραστηριότητα 1 σ. 209 μπορεί να δοθεί για το σπίτι.

Ενδεικτική δραστηριότητα $1^{η}$:



Ο διδάσκων δίνει στους μαθητές διαφανές χαρτί, πάνω στο οποίο υπάρχουν σχεδιασμένα δύο συμμετρικά, ως προς άξονα, τρίγωνα, χωρίς όμως να είναι σχεδιασμένος ο άξονας συμμετρίας. Οι μαθητές προσπαθούν με δίπλωση του χαρτιού να προσδιορίσουν τον άξονα συμμετρίας τον οποίο και σχεδιάζουν με βάση την γραμμή τσάκισης που θα έχουν κάνει στο χαρτί. Με προτροπή του διδάσκοντα σχεδιάζουν τα τμήματα που έχουν ως άκρα αντίστοιχες κορυφές των τριγώνων και εξετάζουν την σχέση που έχει ο άξονας με αυτά τα τμήματα. Διαπιστώνουν και δικαιολογούν, μέσω της δίπλωσης του χαρτιού ως προς τον άξονα συμμετρίας, ότι αυτός είναι η κοινή μεσοκάθετος των τμημάτων. Συζητούν σε πόσα τμήματα, που ενώνουν αντίστοιχα σημεία, πρέπει να χαράξουν την μεσοκάθετο για τον προσδιορισμό του άξονα συμμετρίας. Προτείνουν τρόπο κατασκευής του άξονα συμμετρίας με κανόνα και διαβήτη τον οποίο και εφαρμόζουν.

[Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι η χρήση της αξονικής συμμετρίας για αιτιολόγηση. Με κατάλληλη προσαρμογή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο τέλος της διδασκαλίας των § 2.1 και § 2.2.]

Εναλλακτικά:

«Τα δυο τρίγωνα είναι συμμετρικά ως προς άξονα. Να προτείνετε έναν γεωμετρικό τρόπο ώστε να σχεδιάσετε τον άξονα συμμετρίας».

Ενδεικτική δραστηριότητα $2^{η}$:

Η άσκηση 8 του σχολικού βιβλίου μπορεί να γίνει και με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων όπως με το μικροπείραμα «Κατασκευή του άγνωστου κέντρου ενός κύκλου», από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2080

§§2.4 και 2.5 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Και αυτές οι παράγραφοι θα διδαχθούν σαν μια ενότητα. Μπορεί να προηγηθεί η διδασκαλία της §2.5 (κέντρο συμμετρίας) και να ακολουθήσει η διδασκαλία της §2.4 (συμμετρία ως προς σημείο) με σκοπό να προηγηθεί το διαισθητικό μέρος της κεντρικής συμμετρίας και κατόπιν να ακολουθήσει το κατασκευαστικό και τα συμμετρικά σχήματα.

Επισημαίνεται ότι οι μαθητές μπορεί να δυσκολεύονται με την στροφή κατά 180^{o} και προτείνεται να δοθούν αρκετές πρακτικές εφαρμογές με χειραπτικά μέσα ως εργασίες στην τάξη (π.χ. στροφή 180^{o} με διαφανές χαρτί).

Προτείνεται να δοθεί για δραστηριότητα η ανακάλυψη και η αιτιολόγηση των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου, με την σχεδίαση δύο ίσων παραλληλογράμμων σε δύο διαφορετικά φύλλα, που το ένα θα είναι διαφανές χαρτί. Ωστόσο αυτό να γίνει μπορεί να γίνει σαν εφαρμογή της συμμετρίας ως προς κέντρο, στις παραγράφους 3.3 και 3.4.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η δραστηριότητα της σελίδας 212 (§2.5) του σχολικού βιβλίου μπορεί να γίνει με τη χρήση του ψηφιακού εργαλείου «Κέντρο συμμετρίας αντικειμένων» που διατίθεται στο Φωτόδεντρο http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2075

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΝΑ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ

§2.4

- Να γίνει ως δραστηριότητα η εύρεση του συμμετρικού του γράμματος γ ως προς Ο (σελίδα 210, μπλε πλαίσιο) και μετά να γίνει η δραστηριότητα της αρχής της σ. 210.
- Παραδείγματα 1, 2, 3, 4, 5, 6 σ. 210-211.
- Άσκηση 1 σ. 210.

§2.5

- Δραστηριότητα σ. 212.
- Παραδείγματα 1,3 σ. 213.
- Άσκηση 2 σ. 213.

§ 2.6 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

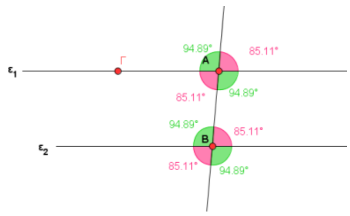
Οι ιδιότητες των γωνιών μπορούν να αιτιολογηθούν με τη χρήση της συμμετρίας ως προς κέντρο. Κατά την διδασκαλία της ενότητας να διευκρινιστεί ότι δύο γωνίες ορίζονται ως εντός εναλλάξ, εντός και επί τα αυτά κτλ., ανεξάρτητα από το αν οι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 (τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία), είναι παράλληλες μεταξύ τους ή όχι. Όμως, μόνο όταν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, οι παραπάνω γωνίες θα είναι αντιστοίχως ίσες, παραπληρωματικές κτλ.

Προτείνεται να μη δοθεί έμφαση σε ασκήσεις αλγεβρικού υπολογισμού γωνιών.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Η διδασκαλία θα ξεκινήσει από το «Θυμόμαστε- Μαθαίνουμε» της σ. 214 και θα συνεχίσει με το παράδειγμα 1 σ. 215 και το παράδειγμα 2 σ. 216.
- Ασκήσεις 2, 4, 5 σ. 216.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα</u>: Η εφαρμογή 1 του σχολικού βιβλίου μπορεί να γίνει και με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων όπως με το μικροπείραμα «Ισότητα γωνιών μεταξύ παραλλήλων», από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2138



Κεφάλαιο 3ο (Να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

§3.1 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, διαφορετικά μέσα αναδεικνύουν διαφορετικές πτυχές μιας έννοιας. Ταυτόχρονα, σε κάποιες περιπτώσεις αυτά απαιτούν και διαφορετικό βαθμό συνειδητοποίησης και κατανόησης κάποιων εννοιών, εκ μέρους των μαθητών.

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας επιτρέπουν στο χρήστη να δημιουργήσει μία κατασκευή μέσα από μία σειρά ενεργειών που ορίζονται γεωμετρικά (π.χ. κατασκευή ευθείας παράλληλης προς μία άλλη, από σημείο εκτός αυτής). Όταν στο αποτέλεσμα αυτής της κατασκευής, επιλέξουμε κάποιο σημείο και το σύρουμε, με την βοήθεια του ποντικιού, το γεωμετρικό αντικείμενο μεταβάλλεται, ενώ όλες οι γεωμετρικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά την κατασκευή διατηρούνται. Έτσι, η κατασκευή βασίζεται και συμπεριφέρεται με βάση τις γεωμετρικές σχέσεις και τις ιδιότητες που απορρέουν απ' αυτές. Αυτή η συμπεριφορά του σχήματος δεν παρουσιάζεται όταν ο μαθητής έχει δημιουργήσει ένα σχήμα βασισμένο σε επιφανειακά χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, η ανάθεση στους μαθητές να βρουν τρόπο (ή τρόπους) να σχεδιάσουν με ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, ένα ισοσκελές τρίγωνο το οποίο να μπορεί να μεταβάλλεται και να αντέχει στην δοκιμασία του συρσίματος των κορυφών, απαιτεί εκ μέρους τους τη συνειδητοποίηση και την κατανόηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων που θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν έτσι ώστε το τρίγωνο να παραμένει ισοσκελές κάτω απ' όλες τις περιστάσεις. Η σχεδίαση ενός ισοσκελούς τριγώνου, βασισμένη στις μετρήσεις των πλευρών, δεν «αντέχει» στην δοκιμασία του συρσίματος, ενώ η κατασκευή ισοσκελούς που βασίζεται π.χ. στην ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου «αντέχει». Ταυτόχρονα η δυναμική μεταβολή της κατασκευής, τους επιτρέπει να διερευνήσουν και να κατανοήσουν (με κατάλληλες δραστηριότητες και ερωτήσεις) άλλες σχέσεις, όπως ότι τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι και ισοσκελή, χωρίς όμως να ισχύει και το αντίστροφο.

Προτείνεται να δοθούν ως δραστηριότητες για το σπίτι, οι κατασκευές ισοσκελούς, ισόπλευρου και σκαληνού τριγώνου, όπως επίσης ορθογωνίου, αμβλυγωνίου και οξυγωνίου με ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, που να «αντέχουν» στην διαδικασία συρσίματος[2] και με συζήτηση στην τάξη, των προσεγγίσεων των μαθητών, μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις, να αναδειχθούν πτυχές των υπό

2 Απαραίτητη προϋπόθεση για αυτή την δραστηριότητα είναι οι μαθητές να είναι εξοικειωμένοι με κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και να μπορούν να δουλεύουν αυτόνομα σ' αυτό.

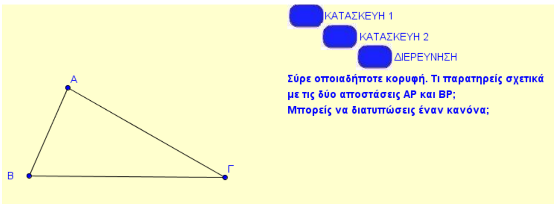
διαπραγμάτευση εννοιών ή να αποτελέσουν την βάση προβληματισμού για την ανάπτυξη της επόμενης ενότητας.

Προτείνεται να γίνουν στην τάξη κατασκευές τριγώνων (ισοσκελούς & ισοπλεύρου) από τους μαθητές και κανόνα και διαβήτη, αλλά και λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (αν υπάρχει η δυνατότητα), ώστε να φανεί ποιες ιδιότητες του κάθε τριγώνου παραμένουν σταθερές όταν αυτό αλλάζει.

Επίσης να δοθεί έμφαση στις κατασκευές κυρίως υψών, αλλά και διχοτόμων-διαμέσων όλων σε οξυγώνιο, αμβλυγώνιο και ορθογώνιο τρίγωνο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα: Θα δοθεί ένα φύλλο εργασίας με τρίγωνα διαφόρων ειδών και θέσεων και θα κληθούν οι μαθητές να τα ταξινομήσουν. Επίσης μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν τρίγωνα με βάση κάποιες προδιαγραφές λ.χ. ορθογώνια ισοσκελή.
- Παράδειγμα σ. 219.



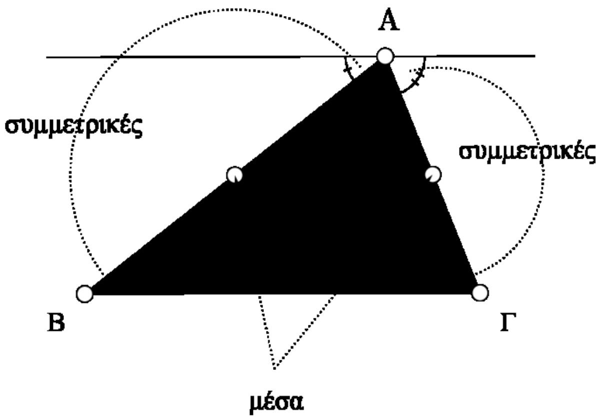
Ενδεικτική δραστηριότητα:
Η άσκηση 4 του σχολικού βιβλίου που αφορά το σημείο τομής των διαμέσων, μπορεί να γίνει πιο διερευνητικά με το μικροπείραμα «Εκεί που τέμνονται οι διάμεσοι» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5510
[Σχόλιο: Η ενδεικτική δραστηριότητα αυτή δίνεται ως παράδειγμα της χρήσης ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας στη διερεύνηση ιδιοτήτων, καθώς αυτές παραμένουν σταθερές όταν το σχήμα αλλάζει.]

§3.2 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές γνωρίζουν από το Δημοτικό ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^{o}, ενώ τις ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισοπλεύρου μπορεί να τις έχουν διαπραγματευτεί σε προηγούμενες ενότητες, όπως έχει προταθεί. Προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στα παραδείγματα – εφαρμογές και στις ασκήσεις 1, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Η άσκηση 10 είναι πολύ δύσκολη γι' αυτή την ηλικία και αν αντιμετωπιστεί να μη γίνει με τη βοήθεια του αλγεβρικού λογισμού. Να μη δοθεί έμφαση μόνο σε υπολογιστικές ασκήσεις γωνιών τριγώνου.

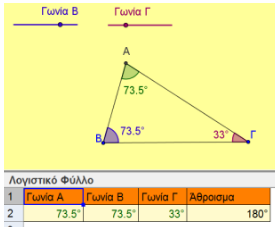
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1. Σημειώνεται ότι εδώ υπάρχει η δυνατότητα να γίνει και θεωρητική αιτιολόγηση του συμπεράσματος με βάση όσα υπάρχουν στις σ. 210-213 ή με βάση την διάταξη του παραδείγματος σ. 222.



- Παραδείγματα 2, 3, 4, 5, 6 σ. 222-223 (τα παραδείγματα 4, 5, 6 μπορούν να δοθούν για το σπίτι και να γίνει μετά η παρουσίαση τους από τους μαθητές).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:
Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου χρησιμοποιείται ως βασικό αποτέλεσμα για τον προσδιορισμό μιας σχέσης ανάμεσα στο άθροισμα των γωνιών και το πλήθος των πλευρών ενός τυχαίου πολυγώνου. Οι μαθητές κατασκευάζουν πολύγωνα με 4, 5, 6, 7 και 8 πλευρές, τα χωρίζουν σε τρίγωνα με διαγώνιες που άγονται από μία κορυφή και καταγράφουν σε πίνακα το είδος του πολυγώνου, το πλήθος των τριγώνων στα οποία χωρίζεται και το άθροισμα των γωνιών του. Από τα στοιχεία του πίνακα συνάγουν με επαγωγικό τρόπο τη ζητούμενη γενική σχέση.
[Σχόλιο: Στόχος αυτής της δραστηριότητας είναι να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές το άθροισμα γωνιών τριγώνου σε περαιτέρω υπολογισμούς]
Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:
Ηαισθητοποίηση της έννοιας του αθροίσματος γωνιών τριγώνου, προτείνεται να γίνει με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως με το «Πειράματα με το άθροισμα γωνιών τριγώνου», στο Φωτόδεντρο: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/14350.
Αναλυτικότερες πληροφορίες για την εφαρμογή και τις δραστηριότητες που μπορεί να εμπλέξει τους μαθητές ο εκπαιδευτικός, υπάρχουν σε σύνδεσμο στο κάτω μέρος της εφαρμογής.

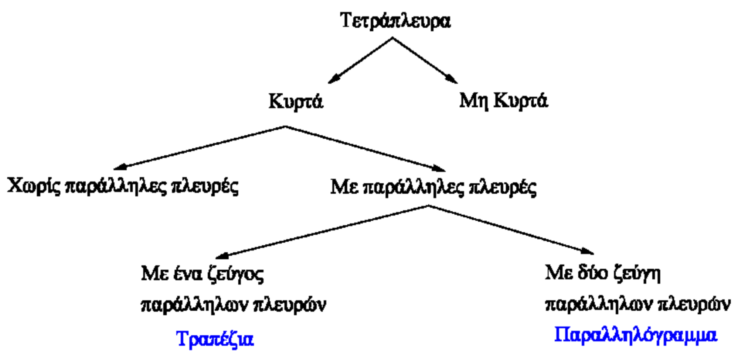


§§3.3 και 3.4 (Να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές κατανοούν ότι τα παραλληλόγραμμα και τα τραπέζια είναι τετράπλευρα με συγκεκριμένες ιδιότητες. Προτείνεται να δοθούν κατάλληλες δραστηριότητες κατασκευής παραλληλογράμμου, ορθογωνίου κτλ. με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, με βάση αυτά που αναφέρθηκαν στην §3.1 με χρήση χειραπτικών και ψηφιακών μέσων και σχεδιασμού των υψών τους.
Το περιεχόμενο της ενότητας είναι 3.4 είναι νέο για τους μαθητές.
Προτείνεται η αιτιολόγηση των ιδιοτήτων να γίνει με χρήση των συμμετριών και οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων σε κατασκευές.

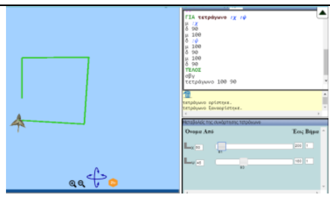
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Μπορεί να δοθεί η ακόλουθη ταξινόμηση των τετραπλεύρων:

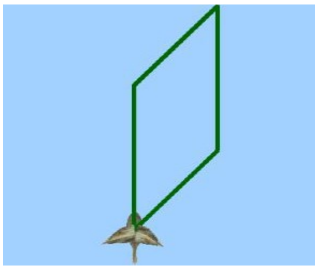


- Η διδασκαλία να γίνει με έμφαση α) στις κατασκευές από τις οποίες προκύπτουν οι ιδιότητες) β) διερεύνηση συμμετριών
- Παραδείγματα 1, 2, 3 σ. 227 και παράδειγμα σ,. 230
- Ασκήσεις 2, 3, 6 σ. 231.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:
Με το μικροπείραμα στη ‘Χελωνόσφαιρα’ «Μια διαδικασία που κατασκευάζει πάντοτε τετράγωνα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με την κατασκευή τετραγώνου, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του.



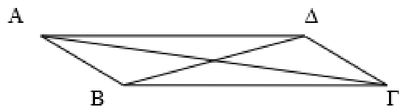
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/9534
[Σχόλιο: Στόχος είναι ο ορισμός να αποκτήσει ‘νόημα για τους μαθητές’ μέσω της χρήσης του σε κατασκευές. Παρόμοια μικροπειράματα μπορούν να γίνουν και με άλλα παραλληλόγραμμα.]



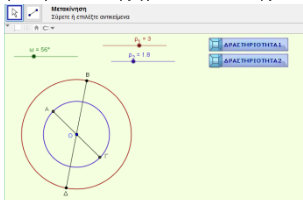
Ενδεικτική δραστηριότητα $2^{η}$:
Με το μικροπείραμα στη ‘Χελωνόσφαιρα’ «Είδη παραλληλογράμμου και οι σχέσεις εγκλεισμού τους» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές μπορούν να διερευνήσουν τις σχέσεις εγκλεισμού των ειδών τετραπλεύρου.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/9586

Ενδεικτική δραστηριότητα $3^{η}$:
Να κατασκευάσετε με χρήση του χάρακα, του μοιρογνωμονίου και του διαβήτη (ή με χρήση λογισμικού) ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη 5,1cm και 3,2cm και σχηματίζουν γωνία 52^{o}.

Ενδεικτική δραστηριότητα $4^{η}$:
Να περιγράψετε τον τρόπο που κατασκευάστηκε με χρήση του χάρακα και του μοιρογνωμονίου (ή με χρήση λογισμικού) το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαγώνιες έχουν μήκη ΑΓ = 6cm, ΒΔ = 3,5cm και σχηματίζουν γωνία 66^{o}.



[Σχόλιο: Στόχος των δύο παραπάνω δραστηριοτήτων είναι η εμβάθυνση στην έννοια της γεωμετρικής κατασκευής. Οι μαθητές α) δημιουργούν ένα γεωμετρικό σχήμα που έχει δεδομένες ιδιότητες και β) περιγράφουν τα βήματα της κατασκευής ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος.]



Ενδεικτική δραστηριότητα $5^{η}$:
Για τη χρήση των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μικροπείραμα «Κατασκευή παραλληλογράμμων με ομόκεντρους κύκλους» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1911

Σημείωση: Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό.
Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε, αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb, κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή, διαφορετικά, ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.
Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή MozillaFirefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobeflashplayer από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exceptionsitelist στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το ControlPanel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit sitelist και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

<u>Μαθηματικά Β΄ Τάξης Γυμνασίου</u>

Διδακτικό Έτος 2017-2018

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

<u>Από το βιβλίο **«Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου»**</u> των Ιωάννη Βανδουλάκη, Χαράλαμπου Καλλιγά, Νικηφόρου Μαρκάκη, Σπύρου Φερεντίνου:

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφ. 7^{ο}: Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών.
7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό
7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

<u>Από το βιβλίο **«Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου»**</u> των Παναγιώτη Βλάμου, Παναγιώτη Δρούτσα, Γεωργίου Πρέσβη, Κωνσταντίνου Ρεκούμη:

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφ. 1^{ο}: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις
1.2 Εξισώσεις α' βαθμού
1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

Κεφ. 2^{ο}: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού
2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί
2.3 Προβλήματα

Κεφ. 3^{ο}: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 Η έννοια της συνάρτησης
3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης (χωρίς τις εφαρμογές 2 και 3).
3.3 Η συνάρτηση $y=\alpha\cdot x$
3.4 Η συνάρτηση $y=\alpha\cdot x+\beta$ (χωρίς τις υποπαραγράφους: «Η εξίσωση της μορφής «$\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\gamma$» και «Σημεία τομής της ευθείας $\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\gamma$ με τους άξονες»).
3.5 Η συνάρτηση $y=\frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή

Κεφ. 4^{ο}: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα
4.2 Γραφικές Παραστάσεις
4.5 Μέση τιμή – Διάμεσος (χωρίς την υποπαράγραφο: «Μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής»)

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφ. 1^{ο}: ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας
1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών
1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων
1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα

Κεφ. 2^{ο}: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας
2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας (χωρίς την παρατήρηση β της σελίδας 143).

Κεφ. 3ο: ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες
3.2 Κανονικά πολύγωνα
3.3 Μήκος κύκλου
3.5 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Κεφ. 4ο: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου
4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου
4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της
4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της

ΙΙ. Διαχείριση Διδακτέας ύλης

Οι παρακάτω οδηγίες έχουν στόχο να παρουσιάσουν κάποιες σημαντικές πλευρές για κάθε ενότητα και έτσι να υποστηρίξουν τον εκπαιδευτικό ώστε να σχεδιάσει τη διδασκαλία του και να επιλέξει υλικό. Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κ.λπ. Οι δραστηριότητες που περιέχονται προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το γυμνάσιο και τον οδηγό του εκπαιδευτικού τα οποία είναι συμπληρωματικά προς τα ισχύοντα και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ψηφιακού σχολείου (http://ebooks.edu.gr/new/ps.php).
Ταυτόχρονα κατεβλήθη προσπάθεια οι οδηγίες να εξειδικευθούν **ανά παράγραφο** με συγκεκριμένες διδακτικές προτάσεις που λαμβάνουν υπόψη τη συνοχή και εξέλιξη των διδασκόμενων εννοιών και μεθόδων, την ανάδειξη των σημαντικών ιδεών καθώς και τη διδακτική πρακτική.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 7ο Α΄ ΜΕΡΟΥΣ Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου (Να διατεθούν 10 ώρες)

Επανάληψη βασικών εννοιών (αρνητικοί αριθμοί, απόλυτη τιμή, αντίθετος αριθμού) και διαδικασιών (πράξεις) από τις προηγούμενες παραγράφους **(3 ώρες)**.

§§ 7.7, 7.8 και 7.9 (Να διατεθούν 7 ώρες και μέχρι την ολοκλήρωση τους δεν θα διδαχθεί η Γεωμετρία.)

Η διδασκαλία αυτών των παραγράφων προσφέρεται για ανάκληση προηγουμένων γνώσεων ενώ προετοιμάζεται η διδασκαλία των πρώτων κεφαλαίων τόσο της Άλγεβρας όσο και της Γεωμετρίας της Β΄ Γυμνασίου.
Κατά την διδασκαλία προτείνεται να δοθεί έμφαση στα παρακάτω:

- Φυσικοί αριθμοί, θετικά κλάσματα, θετικοί δεκαδικοί, Ακέραιοι, αρνητικά κλάσματα, Αρνητικοί δεκαδικοί.
- Διάταξη, πράξεις.
- Τοποθέτηση και αναγνώριση αριθμών (με δεκαδική ή κλασματική μορφή) στην ευθεία των ρητών

Είναι σημαντικό να αφιερωθεί χρόνος στην εξήγηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων μέσα από παραδείγματα. Η απομνημόνευση των κανόνων είναι προτιμότερο να έρθει μέσα από τη χρήση τους και όχι από την αρχή της διδασκαλίας.
Είναι σημαντικό να αφιερωθεί χρόνος στη δικαιολόγηση των ορισμών των δυνάμεων με εκθέτη 0 ή αρνητικό, μέσα από την επιδίωξη να επεκτείνονται οι ιδιότητες των δυνάμεων. Αυτό μπορεί να γίνει με διερεύνηση των ίδιων των μαθητών μέσα από παραδείγματα (που περιέχονται στο βιβλίο ή άλλα).
Σχετικά με τις δυνάμεις, να συζητηθεί το γεγονός ότι μεταξύ δύο δυνάμεων με ίδια βάση, μεγαλύτερη του 1, μεγαλύτερη είναι η δύναμη που έχει το μεγαλύτερο εκθέτη (π.χ. $2{,}52 < (2{,}52)^2 < (2{,}52)^3$), ενώ συμβαίνει το αντίθετο, αν η βάση είναι μικρότερη του 1 (π.χ. $0{,}22 > (0{,}22)^2 > (0{,}22)^3$). Να γίνει χρήση του υπολογιστή τσέπης.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>
Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το γινόμενο $3^4 \cdot 3^5$ είναι ίσο με τη δύναμη 3^9; Μπορείτε να γράψετε με μορφή μιας δύναμης το γινόμενο $2^3 \cdot 2^5$;

Μπορείτε να γράψετε με μορφή μιας δύναμης το γινόμενο $α^κ \cdot α^λ$;
Πως θα γράφατε το 5^8 ως γινόμενο δυνάμεων;
[Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η διερεύνηση και η αιτιολόγηση (από τους μαθητές) της ιδιότητας $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$. Αντίστοιχες δραστηριότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τις υπόλοιπες ιδιότητες.]

Οι παράγραφοι 7.7, 7.8, 7.9 δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη.

Κεφάλαιο 1ο (Να διατεθούν 13 ώρες)

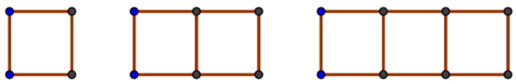
§1.1 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Να δοθεί προτεραιότητα σε ασκήσεις αλγεβρικής έκφρασης ποσοτήτων που είναι λεκτικά διατυπωμένες και αντιστρόφως. Στόχος είναι η εξοικείωση των μαθητών με διαδικασίες αλγεβρικής μοντελοποίησης οι οποίες δίνουν νόημα στην άλγεβρα αλλά μπορούν να υποστηρίζουν και την κατανόηση των διαδικασιών (όπως για παράδειγμα την επιμεριστική ιδιότητα). Επιπρόσθετα, οι μαθητές θα πρέπει να εμπλακούν σε δραστηριότητες που θα δίνουν νόημα στις αναγωγές ομοίων όρων και τις απλοποιήσεις αλγεβρικών παραστάσεων με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Η έννοια της μεταβλητής θα προσεγγιστεί περιγραφικά εξηγώντας τον ρόλο και την σημασία της. Ο προτεινόμενος από το διδακτικό βιβλίο ορισμός δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης.
- Στην δραστηριότητα 1.1 της σελίδας 11 προτείνεται να προστεθούν ερωτήματα όπου δίνεται το κόστος του τηλεφωνήματος και ζητείται η διάρκεια του. Με αυτό τον τρόπο η αλγεβρική κατάστρωση συνδέεται με μια απλή εξίσωση.
- Στην δραστηριότητα 1.2 της σελίδας 12 προτείνεται να δοθούν και δεκαδικές τιμές στα α, β, γ ώστε να φανεί η αξία χρήσης της επιμεριστικής ιδιότητας για την οικονομία των πράξεων.
- Εφαρμογή 4 σ. 13. Να τονιστεί ότι η μόνη διαθέσιμη πληροφορία είναι ότι $x+y=10$ και πως η επιλογή της μεθόδου επίλυσης πρέπει να αξιοποιεί αυτό το δεδομένο.
- Ερώτηση κατανόησης 3 σ. 13. Να συζητηθεί η τεχνική απάντησης με δοκιμή αριθμών. Ειδικά ή χρήση εύκολων τιμών όπως του 0.
- Ασκήσεις 1, 2, 5, 6. Σ. 14. Στην άσκηση 5 να συμπεριληφθούν τιμές που υποδεικνύουν την αναγκαιότητα απλοποίησης. Ενδεικτικά α) $x=1/4$, $y=1/8$ β) $α=7$, $β=5$.

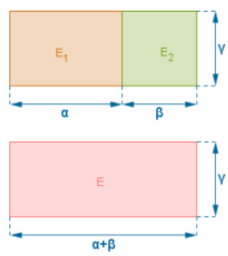
Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:



Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κοκ.

α) Να βρείτε πόσα σπίρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα;
[Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η παραγωγή μιας αλγεβρικής παράστασης για να εκφραστεί ο γενικός όρος της κανονικότητας (ακολουθίας). Η διερεύνηση των μαθητών για τον αριθμό των σπίρτων που χρειάζονται για συγκεκριμένο και μικρό αριθμό τετραγώνων θα τους βοηθήσει να αναπτύξουν στρατηγικές (όπως η κατασκευή ενός πίνακα τιμών) η γενίκευση των οποίων θα οδηγήσει στη συμβολική διατύπωση του γενικού όρου (που είναι απαραίτητος για να βρεθεί ο αριθμός σπίρτων που χρειάζεται για μεγάλους αριθμούς τετραγώνων). Είναι αναμενόμενες και επιθυμητές οι διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθητών, πχ. $1+3x$, $4+3(x-1)$, $2x+x+1$, κι αυτό μπορεί να είναι αφορμή συζήτησης για την ισοδυναμία αυτών των εκφράσεων.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:



Μικροπείραμα από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, μέσα από τη γεωμετρική της ερμηνεία:
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2245

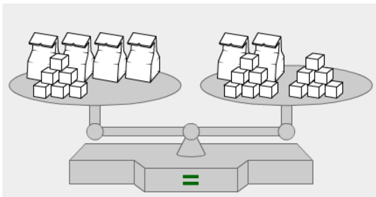
§1.2 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Στις εξισώσεις ο χωρισμός γνωστών από άγνωστους να μην γίνεται από την αρχή με τον πρακτικό κανόνα «αλλάζω μέλος – αλλάζω πρόσημο», που μοιάζει μαγικός στο μαθητή και τον οδηγεί σε μηχανιστικούς και άνευ νοήματος χειρισμούς, αλλά με βάση τις ιδιότητες των πράξεων. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να υποστηριχθεί με το μοντέλο της ζυγαριάς στην περίπτωση των θετικών αριθμών. Εξάλλου, οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία της άλγεβρας, δίνουν έμφαση στο νόημα των αλγεβρικών εκφράσεων και στην δυνατότητα χειρισμού πολλαπλών αναπαραστάσεων, παράλληλα με την ανάπτυξη αλγοριθμικών δεξιοτήτων. Η διδασκαλία των εξισώσεων θα πρέπει να ξεκινάει από προβλήματα, τα οποία είναι δυσκολότερο να λυθούν με πρακτική αριθμητική και να επιλύονται εξισώσεις που είναι μοντέλα τέτοιων προβλημάτων. Έτσι, δεν έχει νόημα η διδασκαλία πολύπλοκων εξισώσεων που απαιτούν μεγάλη ευχέρεια στον αλγεβρικό λογισμό, όπως οι ασκήσεις 6, 7 και 9 (εξίσωση με παράμετρο).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Να γίνει υπενθύμιση των χειρισμών (στους οποίους μπορεί να αναχθεί η επίλυση εξισώσεων):
    - Αν $x+\alpha=\beta$ τότε $x=\beta-\alpha$.
    - Αν $\alpha x=\beta$ και $\alpha\neq 0$ τότε $x=\beta/\alpha$.
    - Αν $x-\alpha=\beta$ τότε $x=\beta+\alpha$.
    - Αν $x/\alpha=\beta$, οπότε, βέβαια, $\alpha\neq 0$, και $\beta\neq 0$ τότε $x=\alpha\beta$.
- Επίσης να τονιστεί ότι αυτό που ονομάζεται μεταφορά αριθμού/μεταβλητής από ένα μέλος μιας εξίσωσης σε ένα άλλο έχει άμεση σχέση με
    - τους παραπάνω χειρισμούς,
    - το πώς συνδέεται ο αριθμός αυτός με τους υπόλοιπους και
    - με ποιες πράξεις.
- Επίσης καλό είναι να τονιστεί ότι όπως μπορούν να μεταφέρονται αριθμοί μπορούν να μεταφέρονται παραστάσεις
- Προτείνεται όπου είναι δυνατόν οι εξισώσεις να επιλύονται με βάση τους παραπάνω χειρισμούς.
- Εφαρμογές 1, 2, 3, 4 σελίδων 18-19.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 2 σελίδας 20 (να τονιστεί η σημασία απάντησης με δοκιμή).
- Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 10, 11 σελίδων 20-21.
- Ως επέκταση των τεχνικών επίλυσης εξισώσεων να γίνουν η δραστηριότητα 1 της σ. 23 και η εφαρμογή της σ. 23.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1$^{\eta}$:</u>



Στο διπλανό σχήμα όλα τα σακουλάκια έχουν το ίδιο βάρος, κάθε κυβάκι ζυγίζει 50 γρ. και η ζυγαριά ισορροπεί. Μπορείτε να βρείτε (χωρίς χαρτί και μολύβι) το βάρος που έχει κάθε σακουλάκι; Περιγράψτε τον τρόπο που λύσατε το πρόβλημα, πρώτα με λόγια και μετά με μαθηματικές σχέσεις.

[Σχόλιο: Μέσα από το μοντέλο της ζυγαριάς οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν τόσο τις ιδιότητες της ισότητας (ότι η ισότητα – ισορροπία δεν αλλάζει αν κάνουμε τη ίδια πράξη – δράση και στα δύο μέλη), όσο και τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης. Είναι σημαντικό η εξερεύνηση αυτή να γίνει από τους ίδιους τους μαθητές μέσα από το νοητικό πείραμα με τη ζυγαριά (χωρίς χαρτί και μολύβι) και κατόπιν να διατυπωθεί συμβολικά από τους ίδιους. Είναι πιθανό κάποιοι μαθητές να λύσουν το πρόβλημα με δοκιμές, εφόσον αυτή η μέθοδος είναι πιο προσιτή στον άπειρο λύτη και πιο κοντά στην καθημερινή εμπειρία. Με κατάλληλη μετατροπή των δεδομένων (πχ. ένα κυβάκι λιγότερο στον ένα από τους δίσκους)μπορεί να φανεί ότι αυτή η μέθοδος δεν είναι πάντα εύχρηστη]

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2$^{\eta}$:</u>

Να κατασκευάσετε μια εξίσωση με άγνωστο και στα δύο μέλη, η οποία να έχει για λύση τον αριθμό –4.

[Σχόλιο: Η κατασκευή εξίσωσης με γνωστή λύση υποστηρίζει την κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης και της λύσης της. Θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν και παραλλαγές αυτής της δραστηριότητας με περισσότερους περιορισμούς, όπως πχ να έχει άγνωστο μόνο στο πρώτο μέλος και το δεύτερο μέλος να είναι ίσο με 5, κοκ.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 3η:

Με το μικροπείραμα «Αναπαράσταση και επίλυση εξίσωσης στο ζυγό» από τα Φωτόδεντρο οι μαθητές διερευνούν μέσα από την αναπαράσταση στο ζυγό την επίλυση μιας εξίσωσης: http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-5514

§1.4 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω, τα προβλήματα είναι η σημαντικότερη αφετηρία δημιουργίας και επίλυσης εξισώσεων στο πλαίσιο της διδασκαλίας του Γυμνασίου. Η υποστήριξη των μαθητών ώστε να εμπλακούν επιτυχώς με αυτά είναι σημαντικός στόχος.

Αντί για την αυτόνομη διδασκαλία αυτής της ενότητας, ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να σχεδιάσει τη διδασκαλία του ώστε να προβλήματα να είναι πάντα μέσα στη συζήτηση ολόκληρου του κεφαλαίου των εξισώσεων, αφιερώνοντας τις 8 ώρες στην ενιαία διαπραγμάτευση των παραγράφων 1.2 και 1.4.

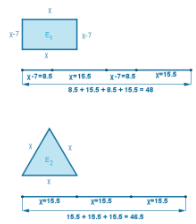
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 26
- Εφαρμογές 1, 2 σ, 27 και 3, 4 σ. 28.
- Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 7.
- Επισημαίνεται ότι η εμπέδωση των εξισώσεων διατρέχει όλη την ύλη ιδιαίτερα τα Β.1.1, Β1.2, Β1.3.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

Να κατασκευάσετε ένα πρόβλημα που λύνεται με την εξίσωση 15=2x-7.

[Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι η κατασκευή προβλήματος που μοντελοποιείται από γνωστή εξίσωση. Αυτή η διαδικασία είναι σημαντική στην εξοικείωση των μαθητών με την μοντελοποίηση κατα-στάσεων και προβλημάτων μέσω εξισώσεων.]



Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

Η άσκηση 2 του σχολικού βιβλίου πριν την αλγεβρική της επίλυση προτείνεται να διερευνηθεί πρώτα, με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων με το μικροπείραμα «Ισότητα εμβαδών (Ορθογώνιο-Ισόπλευρο)», από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2316.

Κεφάλαιο 2ο (Να διατεθούν 7 ώρες)

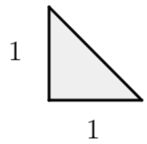
Το περιεχόμενο του κεφαλαίου είναι νέο για τους μαθητές και υπάρχουν πολλές πτυχές που είναι πηγή δυσκολιών (δεκαδική αναπαράσταση αρρήτων, έννοια πραγματικών αριθμών, κ.ο.κ.).

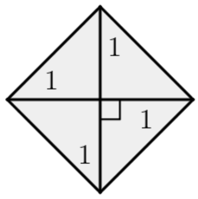
§2.1 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Η παράγραφος αυτή θα πρέπει να διδαχθεί αμέσως μετά τη διδασκαλία της §1.4 (Πυθαγόρειο Θεώρημα) της Γεωμετρίας.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Η αφόρμηση για την εισαγωγή της έννοιας της τετραγωνικής ρίζας θα γίνει από το πυθαγό-ρειο θεώρημα:
- Δραστηριότητα: Οι εφαρμογές 3, 4 σ. 42.
- Μετά τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και τα κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα να γίνει ιδιαίτερη μνεία στην $\sqrt{2}$ με τις εξής δύο αναπαραστάσεις:





- Στα παραδείγματα υπολογισμού να δοθεί και το ακόλουθο:

[redacted]

- Ασκήσεις 1, 2, 3 σ. 43 και 5, 7, 12, 13, 14 σ. 44

  Ενδεικτική δραστηριότητα:
  Μια μικρή αίθουσα του σχολείου μας έχει δάπεδο σχήματος τετραγώνου πλευράς 4 m. Μια άλλη αίθουσα έχει επίσης δάπεδο σχήματος τετραγώνου, αλλά διπλάσιου εμβαδού. Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του δαπέδου της δεύτερης αίθουσας;
  [Σχόλιο: Μέσα από αυτό το πρόβλημα (ή άλλα παρόμοια) μπορεί να αναδειχθεί η ανάγκη χρήσης τετραγωνικών ριζών και η διερεύνηση της ύπαρξης αριθμών που δεν είναι ρητοί. Η αναζήτηση της πλευράς ώστε το εμβαδόν της αίθουσας να είναι 32m^2, μπορεί να γίνει με υπολογιστή, ώστε να διευκολυνθεί η προσπάθεια διαδοχικών προσεγγίσεων. Η επιδίωξη είναι να πιθανολογήσουν οι μαθητές ότι αυτή η διαδικασία «δεν θα τελειώσει ποτέ» και να οδηγηθούν στην ιδέα του αριθμού που μετά την υποδιαστολή έχει άπειρα ψηφία μη περιοδικά. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη φάση της διερεύνησης είναι να θέτει ερωτήματα που θα οδηγήσουν τις αναζητήσεις και τη συζήτηση στα παραπάνω. Μετά από τη διερεύνηση, θα χρειαστεί να αναλάβει ο ίδιος κάποιο μέρος από τη ρητή διατύπωση εννοιών (τετραγωνική ρίζα, άρρητος), των χαρακτηριστικών τους και των μαθηματικών συμβολισμών, αφού δεν μπορεί αυτά να αναμένονται εξ ολοκλήρου από τους μαθητές.]

§§2.2 και 2.3 (Να διατεθούν 4 ώρες)

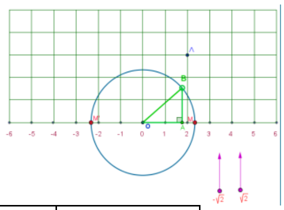
Προτείνεται να συζητηθούν στην τάξη θέματα σχετικά με βασικές ιδιότητες συνέχειας των πραγματικών και της ευθείας, με απλά ερωτήματα όπως: «Ποιος είναι ο μικρότερος θετικός πραγματικός;», «Ποιος είναι ο ‘επόμενος’ πραγματικός του 1;», «Μπορούμε πάντα να βρίσκουμε έναν ρητό/άρρητο ανάμεσα σε δύο άλλους;». Η παράγραφος 2.3 δεν θα διδαχτεί αυτόνομα, αλλά τα προβλήματα που περιέχονται στην 2.3 είναι χρήσιμο να αποτελέσουν δραστηριότητες κατά τη διδασκαλία της παρούσας παραγράφου 2.2 αλλά και του πυθαγορείου θεωρήματος.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Τα ουσιώδη σημεία των παραγράφων είναι:
  - Η αναφορά ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί.
  - Η προσέγγιση του $\sqrt{2}$ στη σελίδα 45.
  - Η συμπλήρωση της ευθείας των ρητών με άρρητους αριθμούς στην εφαρμογή 3 σ. 45.
- Μετά την πραγμάτευση των παραπάνω μπορούν να γίνουν οι ερωτήσεις κατανόησης της σ. 48 και το πρόβλημα 4 της σ. 50.
- Ασκήσεις 4 σ. 48 (αφού προηγηθεί στην τάξη η επίλυση της x^2=16) και 1, 4, 6 σ. 51.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η εφαρμογή 4 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να διερευνηθεί με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, με το μικροπείραμα «Η θέση άρρητων αριθμών στον άξονα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:



πλευρές πολυγώνου βάσης (ν)	3	4	5	6
αριθμός κορυφών (Κ)				
αριθμός ακμών (Α)				
αριθμός εδρών (Ε)				

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5496

Κεφάλαιο 3ο (Να διατεθούν 18 ώρες)

Παρά το ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί τα ανάλογα και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά στο δημοτικό σχολείο, η έννοια της συνάρτησης, και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της (λεκτική διατύπωση, γραφική παράσταση, αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών) δεν έχουν γίνει μέχρι τώρα αντικείμενο συστηματικής διαπραγμάτευσης.

§3.1 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Η χρήση γράμματος ως μεταβλητής και όχι μόνο ως άγνωστου σε μια εξίσωση είναι κάτι που δεν έχει γίνει επαρκώς αντικείμενο συζήτησης μέχρι τώρα. Για το σκοπό αυτό είναι χρήσιμη τόσο η δημιουργία αλγεβρικών τύπων συναρτήσεων από λεκτικές διατυπώσεις ποσοτήτων, όσο και η συμπλήρωση τιμών σε πίνακα (με αντικατάσταση αριθμητικών τιμών στον τύπο). Έμφαση θα πρέπει να δοθεί στη συμμεταβολή μεγεθών που οδηγεί στην έννοια της συνάρτησης, μέσα από παραδείγματα διαφορετικών συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

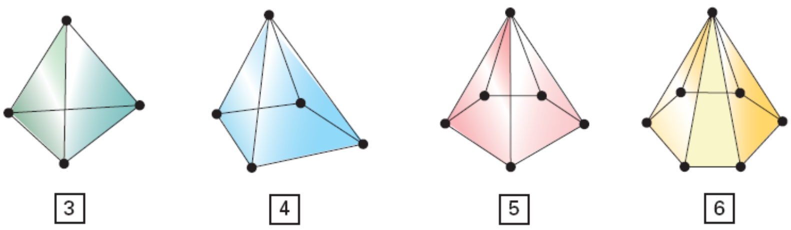
- Να ξεκινήσει η διδασκαλία της παραγράφου με την εφαρμογή 2 σ. 56 όπου θα εξηγηθούν οι έννοιες *συνάρτηση*, *πίνακας τιμών*.
- Στη συνέχεια μπορεί να γίνει η εφαρμογή 1 σ. 56 και να συζητηθεί η ερώτηση κατανόησης 3 της σελίδας 56.
- Ασκήσεις: 5, 6 σ. 57.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Τα σχήματα απεικονίζουν πυραμίδες με βάση τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο και εξάγωνο. Φανταστείτε ότι συνεχίζουμε να αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών της βάσης των πυραμίδων. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς Κ, Α και Ε για μια πυραμίδα που έχει ως βάση:

α) 7-γωνο, β) 10–γωνο, γ) 27–γωνο;



Βρείτε τον αριθμό Κ+Ε–Α για καθεμιά από τις πυραμίδες. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

[Σχόλιο: Μέσα από το γεωμετρικό πλαίσιο του προβλήματος δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν κανονικότητες (ακολουθίες), να βρουν το γενικό όρο και να δικαιολογήσουν τα συμπεράσματά τους. Επιπλέον, δίνεται η αφορμή για δημιουργία απλών αλγεβρικών παραστάσεων και αναγωγές ομοίων όρων (στο τελευταίο ερώτημα). Ενώ η εύρεση των Κ, Α και Ε για 7–γωνο και 10–γωνο είναι εύκολες αριθμητικές διαδικασίες που εξοικειώνουν με το πρόβλημα, τα υπόλοιπα ερωτήματα βοηθούν στην ανάδειξη της αξίας της άλγεβρας και ειδικότερα των συναρτήσεων. Επειδή το πεδίο ορισμού είναι οι φυσικοί, δηλαδή το πλαίσιο είναι διακριτό και όχι συνεχές, είναι πιο οικείο για τους μαθητές, συνεπώς μπορεί να αξιοποιηθεί για την εισαγωγή στις συναρτήσεις.]

§3.2 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Είναι η πρώτη φορά στην τυπική εκπαίδευση που οι μαθητές έρχονται σε επαφή με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και καλό είναι να υπάρξει μια εισαγωγική συζήτηση γι' αυτό ως τρόπου προσδιορισμού της θέσης.

Η έμφαση κατά τη διδασκαλία της παραγράφου θα πρέπει να δοθεί στις πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης: λεκτική, γεωμετρική (γραφική παράσταση), αριθμητική (πίνακας τιμών) και αλγεβρική (τύπος). Η εστίαση μόνο στον τύπο και τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς του δεν συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Αντίθετα, η εμπλοκή όλων των αναπαραστάσεων και η ανάπτυξη της ικανότητας μεταφράσεων μεταξύ τους είναι σημαντικός στόχος. Έτσι, καλό είναι να δοθούν ασκήσεις και προβλήματα με γραφικές παραστάσεις τις οποίες θα πρέπει οι μαθητές να "διαβάσουν" για να βρουν ποιες τιμές του y αντιστοιχούν σε δεδομένες τιμές του x και αντιστρόφως. Τέτοιες είναι η ερώτηση 5, η καμπύλη θερμοκρασίας ενός τόπου (βλ. παρακάτω ενδεικτική δραστηριότητα) και άλλες που μπορούν να αναζητηθούν στο διαδίκτυο.

Επίσης, επειδή μια συχνή παρανόηση είναι ότι όλα τα συμμεταβαλλόμενα ποσά είναι ανάλογα (ή και αντιστρόφως ανάλογα), είναι σημαντική η ανάδειξη συναρτήσεων (και αντίστοιχων συμμεταβαλλόμενων ποσών) που δεν αντιστοιχούν σε ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθεί η άσκηση 10 κατάλληλα εμπλουτισμένη ώστε να φανεί η περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης (θα μπορούσε να ζητηθεί η απόσταση για 5 και 10 s και μετά ο τύπος της για να συζητηθεί η γραφική παράσταση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- *Στην παράγραφο αυτή συνιστάται η χρήση χιλιοστομετρικού χαρτιού.*

Προτείνονται τα ακόλουθα περιεχόμενα κατά σειρά:

- Δραστηριότητα 1.
- Εφαρμογές 1, 2, 3 σ. 63. Στην εφαρμογή 3 ο τύπος της απόστασης δύο σημείων δεν χρειάζεται να απομνημονευτεί. Οι εφαρμογές 2, 3 νοηματοδοτούν γεωμετρικά τις συντεταγμένες και τις συνδέουν με βασικές έννοιες (συμμετρία, απόσταση, Πυθαγόρειο θεώρημα).
- Δραστηριότητα 2 σ. 60. Επισημαίνεται ότι μπορεί να αξιοποιηθεί η συμμετρία για την επιλογή τιμών και οικονομία στους υπολογισμούς.
- Με καθοδήγηση-συντονισμό του διδάσκοντος μπορούν να γίνουν στην τάξη οι ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3, 4 σ. 65.
- Δραστηριότητα 4 της σ. 63.
- Για να μη μείνουν οι μαθητές με την εσφαλμένη εντύπωση ότι μερικές τιμές μπορούν, χωρίς άλλες πληροφορίες να οδηγήσουν στον προσδιορισμό μιας συνάρτησης και της γραφικής της παράστασης μπορεί να γίνει η ακόλουθη δραστηριότητα: Οι τιμές μια συνάρτησης δίνονται από τον πίνακα:

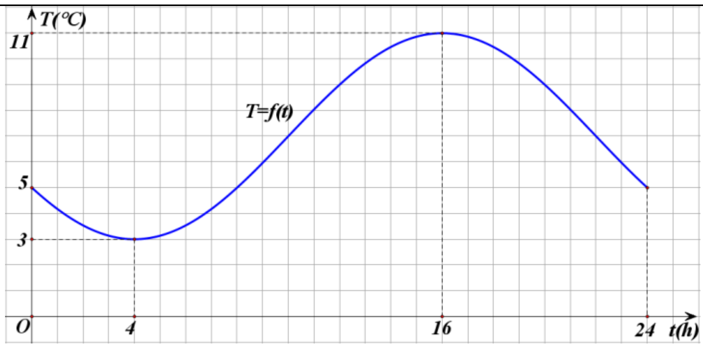
x	1	2	3
y	1	2	3

Α) Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Β) Ποια είναι η τιμή του y για $x=4$. Επαληθεύει η συνάρτηση $y=x$ τον παραπάνω πίνακα τιμών; Μπορούμε να πούμε το ίδιο για την συνάρτηση y=x+(x-1)(x-2)(x-3);

Ενδεικτική δραστηριότητα 1^{η}:

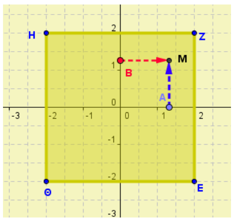
Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) ενός τόπου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.



α) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν; Ποια σημεία της γραφικής παράστασης δείχνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία;
β) Ποια είναι η θερμοκρασία στις 2 τη νύχτα, στις 2 το μεσημέρι και στις 11 το βράδυ; Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι 6^{o}C;
γ) Τι εκφράζει με βάση το πρόβλημα το σημείο (20,9) της γραφικής παράστασης;
δ) Ποιες άλλες πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;
[Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η ερμηνεία της γραφικής παράστασης. Το πρόβλημα και η εξοικείωση των μαθητών με τέτοιου είδους εικόνες από την καθημερινή και τη σχολική τους ζωή, αναμένεται να διαμορφώσουν ένα πρόσφορο πλαίσιο για τη διερεύνηση εννοιών όπως γραφική παράσταση, ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, διατεταγμένο ζεύγος και (χωρίς τη χρήση της ορολογίας) πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2^{η}:
Για τις συναρτήσεις με τύπους: $y_1 = 5+2x$, $y_2 = x^2$ και $y_3 = 2^x$, κατασκευάστε πίνακες τιμών για τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 του x. Εξετάστε τον τρόπο που αυξάνεται το y_1 όταν το x αυξάνεται κατά μια μονάδα (από το 0 στο 1, από το 1 στο 2, από το 2 στο 3 κοκ). Κάνετε το ίδιο για το y_2 και το y_3. Τι παρατηρείτε;
Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων. Με ποιον τρόπο οι προηγούμενες παρατηρήσεις σας (για τον «ρυθμό αύξησης» των y) φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις;
[Σχόλιο: Μέσα από τη σύγκριση διαφορετικών συναρτήσεων οι μαθητές μπορούν να αντλήσουν συμπεράσματα για το ρυθμό μεταβολής (σταθερός για την ευθεία και μη σταθερός για την τετραγωνική και την εκθετική συνάρτηση) και να συνδέσουν αυτά τα συμπεράσματα με τη μορφή των γραφικών παραστάσεων (ευθεία ή καμπύλη).]

Ενδεικτική δραστηριότητα 3^{η}:
Η εισαγωγή στην έννοια της απεικόνισης σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο προτείνεται να μελετηθεί με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως με το μικροπείραμα «Δραστηριότητες με συντεταγμένες» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2024



§3.3 (Να διατεθούν 4 ώρες)
Το σχόλιο 1 της §2.1 του Β΄ Μέρους (σελ. 137) να αναφερθεί στη διδασκαλία της παραγράφου αυτής.

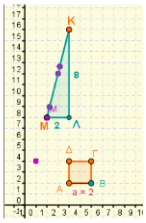
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Δραστηριότητα 1 σ. 67.
- Να αναδειχθεί για τα ανάλογα ποσά το κριτήριο y/x=σταθ.
- Δραστηριότητα 2 σ. 68.
- Εφαρμογές 1, 2, 3, 4 σ. 69.
- Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 8 σ. 71.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1^{η}:
Το 60% της μάζας του μοσχαρίσιου κρέατος είναι νερό. Με βάση αυτή την πληροφορία συμπληρώστε τον πίνακα:

μάζα κρέατος σε Kg (x)	2	6	8		20	
μάζα νερού σε Kg (y)				6		

Είναι η "μάζα κρέατος" (x) και η "μάζα νερού" (y) ποσά ανάλογα; Ποια σχέση συνδέει τα δύο ποσά; Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x; Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, περιγράψτε και εξηγήστε τα χαρακτηριστικά της (πχ. το σχήμα της, κάποια σημεία της κλπ).

[Σχόλιο: Μέσα από ένα ρεαλιστικό πλαίσιο εισάγεται η γραμμική συνάρτηση και συζητούνται τα χαρακτηριστικά της.]



Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

Η δραστηριότητα 1 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να διερευνηθεί με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, με το μικροπείραμα «Συναρτησιακή σχέση πλευράς τετραγώνου και περιμέτρου του» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2178

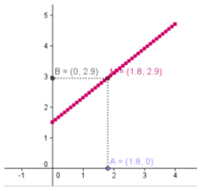
§3.4 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Να μη διδαχθούν οι υποπαράγραφοι «η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$» και «σημεία τομής της ευθείας $\alpha x+\beta y=\gamma$ με τους άξονες» και οι αντίστοιχες ερωτήσεις κατανόησης και ασκήσεις.

Να δοθεί έμφαση σε προβλήματα που μοντελοποιούνται με γραμμικές συναρτήσεις και σε ερωτήματα που οδηγούν σε εξίσωση και ανίσωση και μπορούν να λυθούν μέσω αναπαραστάσεων της συνάρτησης (δηλαδή είτε με πίνακα τιμών, είτε με γραφική ή γραφικές παραστάσεις, είτε με τους τύπους που οδηγούν σε εξίσωση ή ανίσωση). Επειδή η αλγεβρική επίλυση ανίσωσης διδάσκεται στην Γ΄ Γυμνασίου, μέσα από τις συναρτήσεις μπορεί να αναδειχθεί η γραφική επίλυση ανισώσεων.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 72
- Δραστηριότητα 2. σ. 73.
- Εφαρμογή 1 σ. 74.
- Εφαρμογή 2 σ. 75.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1-5 σ. 76-77.
- Ασκήσεις 3, 4, 2, 9 (οι ασκήσεις 2 & 9 μας προετοιμάζουν για συναρτήσεις όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή *x* δεν παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές).



Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η άσκηση 5 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να διερευνηθεί με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, με το μικροπείραμα «Κόστος χρήσης του ταξί» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2121

§3.5 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Να δοθεί έμφαση σε προβλήματα που μοντελοποιούνται με τη συνάρτηση $y=\frac{\alpha}{x}$ και σε ερωτήματα που οδηγούν σε εξίσωση και ανίσωση οι οποίες μπορούν να λυθούν μέσω αναπαραστάσεων της συνάρτησης (δηλαδή είτε με πίνακα τιμών, είτε με γραφική ή γραφικές παραστάσεις, είτε με τους τύπους που οδηγούν σε εξίσωση ή ανίσωση). Τέτοια προβλήματα είναι οι ασκήσεις 4, 5.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 79.
- Δραστηριότητα 2 σ. 80.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 3 σ. 81.
- Άσκηση 5. σ. 82.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Για ένα ορθογώνιο οικόπεδο γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδόν 240m^2, αλλά δεν γνωρίζουμε τις διαστάσεις του.

Αν το μήκος είναι 20m, πόσο είναι το πλάτος του; Πόσο μεγάλο και πόσο μικρό μπορεί να είναι το μήκος; Να εξετάσετε αν οι διαστάσεις του είναι ανάλογα ποσά.
Αν το μήκος είναι x και το πλάτος ψ μπορείτε να εκφράσετε το ψ ως συνάρτηση του x;
Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Από τη γραφική παράσταση μπορείτε να προσδιορίσετε τις διαστάσεις, ώστε το οικόπεδο να είναι τετράγωνο;
[Σχόλιο: Με το πρόβλημα αυτό γίνεται εισαγωγή στην υπερβολή και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά μέσα από αριθμητικά δεδομένα, τον τύπο και τη γραφικά παράσταση συγχρόνως. Αναμένεται οι μαθητές μέσα από τη διερεύνησή τους να καταλήξουν στα κυριότερα συμπεράσματα σχετικά με την υπερβολή.]

Κεφάλαιο 4^{ο} (Να διατεθούν 8 ώρες)

Οι μαθητές έχουν, ήδη, επεξεργαστεί στο Δημοτικό σχολείο δεδομένα (ταξινόμηση, αναπαράσταση δεδομένων και υπολογισμό του μέσου όρου) και έχουν εμπειρίες από γραφικές αναπαραστάσεις δεδομένων. Το νέο στο κεφάλαιο αυτό είναι οι έννοιες του πληθυσμού, του δείγματος και της διαμέσου. Στο κεφάλαιο αυτό θα μπορούσαν οι ίδιοι οι μαθητές να εμπλακούν στη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων καθώς και στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων αναφορικά με θέματα που ενδιαφέρουν τους ίδιους.

§§4.1, 4.2 και 4.5 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Να μη διδαχθεί η υποπαράγραφος «μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής» και οι ασκήσεις 6, 7 και 8. Επιπλέον, επειδή οι κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη, πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή των ασκήσεων.
Αντίθετα, πρέπει να δοθεί έμφαση στην ερμηνεία της μέσης τιμής και της διαμέσου καθώς και στη σύγκριση μεταξύ των δύο αυτών μέτρων θέσης.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- *Τονίζεται ότι τι κεφάλαιο της Στατιστικής προσφέρεται για:*
    - *εφαρμογές ομαδοσυνεργατικής μεθόδου.*
    - *εκπόνηση συνθετικών δημιουργικών εργασιών.*
    - *ως εργαλείο για συνθετικές δημιουργικές εργασίες άλλων μαθημάτων.*
- Δραστηριότητα 1 σ. 85. Με αφορμή το ερώτημα γ0 μπορεί να συζητηθεί η σημασία επιλογής του δείγματος.
- Οι έννοιες πληθυσμός, μεταβλητή, δείγμα, δειγματοληψία, δημοσκόπηση, μέγεθος δείγματος, αντιπροσωπευτικότητα μπορούν να εξηγηθούν αλλά δεν αποτελούν ορισμούς για γραπτή η προφορική εξέταση.
- Άσκηση 9 σ. 88. Μπορεί να αποτελέσει την βάση για μια μικροέρευνα στην διεξαγωγή της οποίας μετέχει όλο το τμήμα. Μπορεί επίσης να αξιοποιηθεί για την διδασκαλία της παραγράφου 4.2.
- Δραστηριότητα 1 σ. 89.
- Αφού πραγματευτούν τα διαγράμματα μπορεί εφ' όσον υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί και λογιστικό φύλλο για την κατασκευή κάποιων από αυτά.
- Ερώτηση κατανόησης 2 σ. 93 (η οποία υποδεικνύει την ανάκτηση πληροφορίας από διαγράμματα και ανακαλεί την έννοια της αναλογίας).
- Δραστηριότητα 1 σ. 104.
- Στη συνέχεια να γίνει η δραστηριότητα 2 της σ. 104 αφού αναδιατυπωθεί ως εξής:

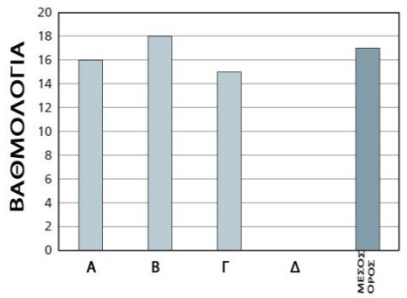
Οι μηνιαίες αποδοχές εννέα εργαζομένων μιας επιχείρησης είναι (σε ευρώ):
700, 600, 2900, 950, 700, 800, 700, 2100, 900
α) Να βρείτε τη μέση τιμή των αποδοχών των εργαζομένων.
β) Να διατάξετε τους μισθούς (αποδοχές) κατά αύξουσα σειρά.
γ) Να βρείτε το «μεσαίο» μισθό.
δ) Να συγκρίνετε τον «μεσαίο» μισθό με την μέση τιμή. Να συζητηθεί το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

- Άσκηση 4. σ. 109.
- Επίσης να δοθεί σαν άσκηση η εύρεση της μέσης τιμής και της διαμέσου των παρακάτω δειγμάτων:
    - 2., 2, 6, 10, 10

- 2, 4, 6, 8, 10

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

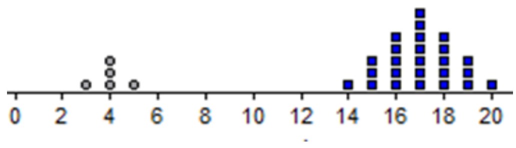
Η Μαρία έχει γράψει στα Μαθηματικά τέσσερα τεστ. Το ραβδόγραμμα παρουσιάζει την βαθμολογία της στα τεστ Α, Β και Γ καθώς επίσης και τον μέσο όρο όλων των τεστ (η τελευταία σκούρα ράβδος).



α) Να σχεδιάσετε πάνω στο ίδιο διάγραμμα και δίπλα στη βαθμολογία της Μαρίας, τη βαθμολογία που έχει σε κάθε τεστ ένας άλλος μαθητής ο Γιάννης, αν γνωρίζετε ότι: οι βαθμοί του και στα τέσσερα τεστ ήταν ίσοι μεταξύ τους και ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τον ίδιο μέσο όρο.
β) Με βάση το νέο διάγραμμα που φτιάξατε, μπορείτε να σχεδιάσετε την βαθμολογία που έχει η Μαρία στο τεστ Δ; Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.
[Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η ανάδειξη της έννοιας της μέσης τιμής ως «δίκαιη μοιρασιά». Δεν είναι η αλγεβρική εύρεση της μέσης τιμής, εξάλλου αυτή η δραστηριότητα θα μπορούσε να γίνει ως εισαγωγή στη μέση τιμή. Αρκετές πληροφορίες για τη διδασκαλία των στοχαστικών μαθηματικών στο γυμνάσιο μπορούν να αντληθούν από τον οδηγό του εκπαιδευτικού των προγραμμάτων σπουδών που είναι συμπληρωματικά προς τα ισχύοντα (στην ιστοσελίδα http://ebooks.edu.gr/new/ps.php).]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

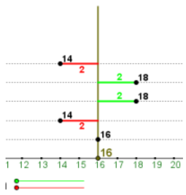
Σε μία τάξη 30 μαθητών οι μαθητές έχουν γράψει τεστ και οι βαθμολογίες τους είναι όπως δείχνει το παρακάτω σημειόγραμμα. Για παράδειγμα, τρεις μαθητές απ' όλη την τάξη έχουν γράψει 15 και ένας μαθητής μόνον έχει γράψει 20.



α) Προτείνετε τρόπους με τους οποίους θα προσδιοριστεί η μέση τιμή της βαθμολογίας της ομάδας Α (γκρι κυκλάκια στο διάγραμμα), που για διάφορους λόγους είχε χαμηλή βαθμολογία στο τεστ. Ομοίως για την μέση τιμή της βαθμολογίας της ομάδας Β (μπλε τετραγωνάκια στο διάγραμμα)
β) Προτείνετε τρόπους για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής της βαθμολογίας για όλη την τάξη στο τεστ αυτό.
[Σχόλιο: Οι μαθητές διερευνούν το παρακάτω πρόβλημα και προσπαθούν να το αντιμετωπίσουν με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Ο στόχος είναι η διαμόρφωση καλύτερης κατανόησης της μέσης τιμής, του τι εκφράζει και των τρόπων που μπορεί να υπολογιστεί.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 3η:

Για εμβάθυνση στις έννοιες της μέσης τιμής και της διαμέσου, προτείνεται να διερευνηθούν μέσω αναπαραστάσεών τους, με το μικροπείραμα «Ο βαθμός της Έλενας» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5329



ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφάλαιο 1ο (Να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

§1.1 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Η συγκεκριμένη ενότητα έχει μεγάλη σημασία για την ανάπτυξη των εννοιών που ακολουθούν στις επόμενες παραγράφους.
Απαραίτητα στοιχεία που πρέπει να κατανοηθούν από τους μαθητές πριν περάσουν αργότερα στους τύπους υπολογισμού των εμβαδών γεωμετρικών σχημάτων καθώς και στις μετατροπές μονάδων είναι τα εξής:

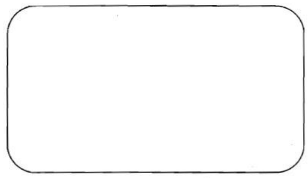
✓ Η σύγκριση επιφανειών (πολυγωνικών και μη) μέσα από διαφορετικές διαδικασίες

(επικάλυψη, διαίρεση, σύνθεση κ.λ.π.)

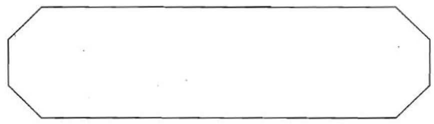
- ✓ Η έννοια της διατήρησης της επιφάνειας.
- ✓ Η διαφοροποίηση ανάμεσα στο γεωμετρικό μέγεθος (επιφάνεια) και στη μέτρησή του (εμβαδόν).
- ✓ Η έννοια της μονάδας μέτρησης (άτυπη ή τυποποιημένη), η επιλογή της κατάλληλης μονάδας, η χρήση της για την επικάλυψη μιας επιφάνειας και η σύμβαση της χρήσης της τετραγωνικής μονάδας.
- ✓ Η διάκριση ανάμεσα στη μέτρηση της επιφάνειας (εμβαδόν) από τις μετρήσεις άλλων μεγεθών (π.χ. τμήματα και τα μήκη τους ή η περίμετρος και το μήκος της)
- ✓ Η προσεγγιστική φύση της διαδικασίας της μέτρησης.
- ✓ Ο τρόπος μεταβολής του εμβαδού όταν χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια μιας αρχικής μονάδας.

Για παράδειγμα: Η σύγκριση των επιφανειών των διπλανών σχημάτων, η εύρεση διαφορετικών τρόπων σύγκρισης, η προσπάθεια υπολογισμού της σχέσης που έχουν (π.χ. πόσο μεγαλύτερη είναι η μία σε σχέση με την άλλη) κτλ., συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση κάποιων εννοιών.

ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2



Για τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια της μέτρησης, βλέπε http://ebooks.edu.gr/new/ps.php , στο 2. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣ ΤΑ ΙΣΧΥΟΝΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ/ Β. Οδηγοί για τον Εκπαιδευτικό/ Επιστημονικό Πεδίο: Μαθηματικά/ Σελ 103.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 113. Με την ευκαιρία της δραστηριότητας αυτής να τονιστεί:
    - Η προσθετική ιδιότητα του εμβαδού (το εμβαδόν της ένωσης δύο ή περισσοτέρων μη επικαλυπτόμενων χωρίων είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών τους).
    - Η τιμή του εμβαδού ενός σχήματος εξαρτάται από την επιλεγόμενη μονάδα μέτρησης.
- Μπορούν ακόμη να γίνουν τα παρακάτω παραδείγματα με τα οποία φαίνεται ότι γενικά το εμβαδόν δεν εξαρτάται από την περίμετρο.

- Εφαρμογή 1 σ. 114.
- Εφαρμογή 2 σ. 114.
- Άσκηση 3 σ. 116.
- Για Διασκέδαση σ. 116

§1.2 (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές γνωρίζουν από το Δημοτικό τις δεκαδικές μονάδες μέτρησης των επιφανειών και το νέο στοιχείο είναι ο διεθνής συμβολισμός τους. Η αισθητοποίηση της τυπικής μονάδας, των υποδιαιρέσεων και των πολλαπλάσιων αυτής, οι μεταξύ τους σχέσεις, καθώς επίσης η επιλογή της κατάλληλης μονάδας ανάλογα με την επιφάνεια που θέλουμε να μετρήσουμε (άσκηση 6 σελ 118), συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση, απ' ό,τι μόνον η συνεχής εξάσκηση με ασκήσεις μετατροπής από την μία μονάδα μέτρησης σε άλλη.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Εφαρμογή 1 σ. 118.
- Εφαρμογή 2 σ. 118.
- Ερώτηση κατανόησης 1.
- Ασκήσεις 1, 2, 6, σ. 118.

§1.3 (Να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Το περιεχόμενο της ενότητας δεν είναι νέο για τους μαθητές.

Χρησιμοποιώντας ως βάση το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου αναπτύσσονται μέσα από μετασχηματισμούς το εμβαδόν των άλλων γεωμετρικών σχημάτων. Ο υπολογισμός του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου γίνεται μέσα από τη μέτρηση των τετραγωνικών μονάδων που το επικαλύπτουν όπου το πλήθος τους εκφράζεται από το γινόμενο των διαστάσεων του ορθογωνίου.

Θα πρέπει να αντιμετωπιστούν επίσης δυσκολίες που έχουν οι μαθητές[3], όπως ότι:

- ✓ Σχήματα με μεγαλύτερη περίμετρο έχουν μεγαλύτερο εμβαδό
- ✓ Ο διπλασιασμός, τριπλασιασμός κτλ. των διαστάσεων διπλασιάζει, τριπλασιάζει κλπ. το εμβαδόν.
- ✓ Βάση (ή βάσεις) στα σχήματα, είναι μόνον η πλευρά (ή οι πλευρές) που έχει (ή έχουν) οριζόντιο προσανατολισμό.
- ✓ Ύψος του παραλληλογράμμου ή του τραπεζίου είναι μόνον αυτό που άγεται από μία κορυφή του ή αυτό που έχει κατακόρυφο προσανατολισμό.[4]

Ο υπολογισμός του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων με την εφαρμογή των τύπων υπολογισμού είναι σημαντικό να συνδέεται με το γεωμετρικό χειρισμό της έννοιας του εμβαδού (π.χ. μέσα από τη διαμέριση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων). Γενικότερα η γεωμετρική συλλογιστική και η παράλληλη μετάφραση σε αλγεβρικές σχέσεις μπορεί να δώσει νόημα στις αλγεβρικές έννοιες και διαδικασίες.

Κατάλληλες δραστηριότητες με λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας ή applets που υπάρχουν στο διαδίκτυο, μπορεί να βοηθήσουν στην κατάκτηση των παραπάνω στόχων.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

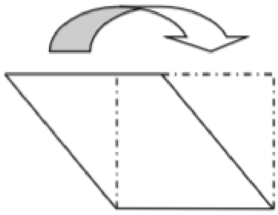
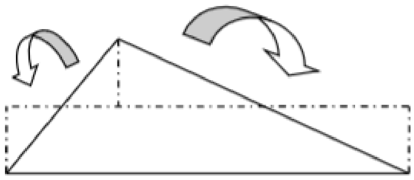
- Εφαρμογή 1 σ. 121.
- Εφαρμογή 2 σ. 121. (Η εφαρμογή αυτή εφ' όσον το επιτρέπουν οι συνθήκες μπορεί να γίνει ως εφαρμογή εύρεσης εμβαδού μιας πραγματικής σχολικής αίθουσας).
- Εφαρμογές 4 , 5, 6 σ. 122.
- Ερώτηση κατανόησης σ. 123.
- Ασκήσεις 3, 5 σ. 124.
- Ασκήσεις 9, 10 σ. 125.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1^{η}</u>:

Προτείνεται να δοθούν στους μαθητές σχήματα όπως τα παρακάτω και με μετασχηματισμούς, που θα κάνουν με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων, να διατυπώσουν και να αιτιολογήσουν τους αντίστοιχους τύπους εμβαδού. Παρακάτω φαίνεται και ένας από τους πολλούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος.

3 Η άρση των δυσκολιών των μαθητών είναι μια αργή και δύσκολη διαδικασία. Μπορεί να προκληθεί μέσα από την ενεργητική συμμετοχή τους σε ένα κατάλληλο διδακτικό περιβάλλον, το οποίο θα τους οδηγεί στις απαραίτητες γνωστικές συγκρούσεις και όχι μόνον μέσα από την παράθεση της ορθής άποψης – γνώσης.

4 Ο προσανατολισμός με τον οποίο παρουσιάζονται τα σχήματα στα βιβλία, αλλά και οι παραστάσεις που έχουν από το περιβάλλον στην καθημερινή τους ζωή, συμβάλουν σε αυτές τις δυσκολίες. Η έκθεσή τους σε σχήματα με ασυνήθιστο προσανατολισμό ή σχήματα «μακρόστενα» (π.χ. τρίγωνα με σημαντικά μικρότερη την μία πλευρά σε σχέση με τις άλλες) κλπ. μπορεί να συμβάλλει, κατά ένα μέρος, στην κατεύθυνση αντιμετώπισης αυτών των δυσκολιών.

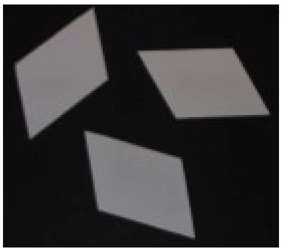
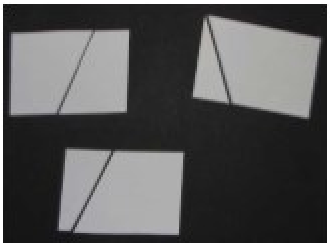
 

<u>Εναλλακτικά</u>, η δραστηριότητα αυτή μπορεί να γίνει:

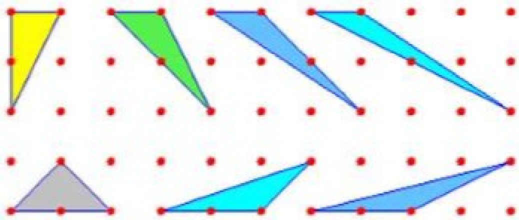
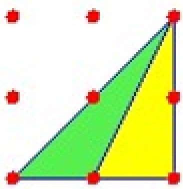
• Με τους μαθητές να δουλεύουν σε ομάδες: Ο εκπαιδευτικός μοιράζει σε κάθε ομάδα 2-3 ίσα μη ορθογώνια παραλληλόγραμμα από χαρτί. Οι μαθητές προσπαθούν να βρουν τρόπο να κόψουν, με ψαλίδι, τα παραλληλόγραμμα και να τα μετασχηματίσουν σε ορθογώνια με το ίδιο εμβαδόν με τα αρχικά παραλληλόγραμμα. Στόχος είναι η συνειδητοποίηση από τους μαθητές της ανάγκης χάραξης κάθετης προς το ένα ζεύγος παράλληλων πλευρών (βλέπε την παρακάτω εικόνα).

✓ Με χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού, που τα τετραγωνάκια να παίξουν το ρόλο άτυπων μονάδων μέτρησης εμβαδού.

✓ Με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα $2^{η}$</u>: Οι μαθητές χρησιμοποιούν χαρτί με διάστικτους καμβάδες που το έχουν χωρίσει σε περιοχές 5 Χ 5 σημείων. Σχεδιάζουν όσο το δυνατόν περισσότερα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές είναι σημεία του καμβά, εμβαδού 1 τ.μ., τα οποία να μην είναι ίσα μεταξύ τους και δικαιολογούν γιατί τα τρίγωνα που σχεδίασαν ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος (οι αιτιολογήσεις τους για την διαφορετικότητα των τριγώνων μπορούν να βασίζονται στους μετασχηματισμούς των σχημάτων, που τους είναι γνωστοί από το Δημοτικό, βλέπε τις παρακάτω εικόνες).

✓ Αναζητούν ανάμεσα στα τρίγωνα αυτό που έχει την μικρότερη και την μεγαλύτερη περίμετρο και δικαιολογούν την επιλογή τους.

✓ Συζητούν για τις μεθόδους που ακολούθησαν για να προσδιορίσουν όλα τα τρίγωνα, αν θα μπορούσε η μέθοδός τους να επεκταθεί σε έναν μεγαλύτερο καμβά και τι θα συνέβαινε τότε με την περίμετρο και το εμβαδό των τριγώνων.

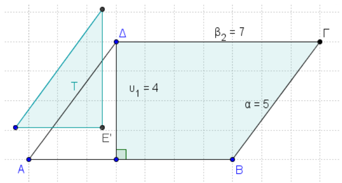
✓ Επίσης συζητούν για το που θα κινείται η τρίτη κορυφή του τριγώνου (χωρίς τους περιορισμούς να είναι σημείο του καμβά ή τα τρίγωνα να είναι διαφορετικά), όταν τα τρίγωνα τοποθετηθούν έτσι ώστε να έχουν κοινή βάση.

✓ Με αφορμή τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα τους γενικεύουν για τρίγωνα που έχουν κοινή βάση (ή ίσες βάσεις) και η τρίτη κορυφή κινείται σε ευθεία παράλληλη προς την βάση.

✓ Επίσης με κατάλληλη τοποθέτηση των τριγώνων, κατά τη σύγκριση των περιμέτρων και αντίστοιχες διερευνήσεις, μπορούν να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τον χωρισμό ενός τρίγωνου σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα από την διάμεσο.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα $3^{η}$</u>:

Για καλύτερη κατανόηση των εννοιών, προτείνεται να χρησιμοποιηθούν ψηφιακά εργαλεία, όπως το μικροπείραμα «Εμβαδόν παραλληλογράμμου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5573



§1.4 (Να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να γίνει κατάλληλος προγραμματισμός ώστε μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ενότητας να ακολουθήσει η διδασκαλία της §2.1 της Άλγεβρας (τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού). Να δοθεί έμφαση και στη σχέση εμβαδών και όχι μόνο πλευρών που εκφράζει το θεώρημα (ασκήσεις 1, 4, 5 και ενδεικτική δραστηριότητα 1).

Επισημαίνονται τρεις διαφορετικές οπτικές-χρήσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του αντίστροφού του, που είναι σκόπιμο οι μαθητές να αναγνωρίζουν:

- ✓ Η ανάδειξη της σχέσης εμβαδών τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.
- ✓ Ο υπολογισμός αποστάσεων.
- ✓ Ο έλεγχος αν μια γωνία είναι ορθή.

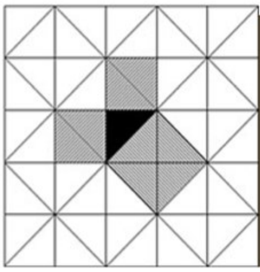
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

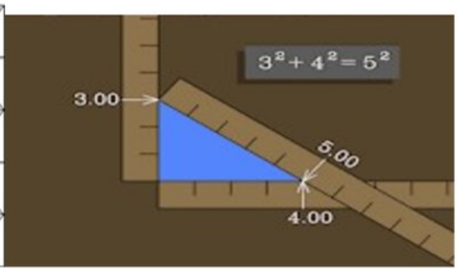
- Δραστηριότητα 1 σ. 127.
- Εφαρμογή 1 σ. 128
- Εφαρμογές 2, 3, 4, σ. 129.
- Άσκηση 3 σ. 130.
- Ασκήσεις 7, 8 σ. 131.

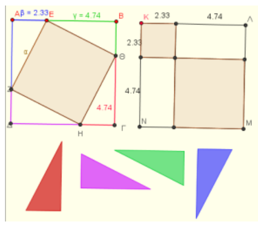
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1η</u>:

Οι μαθητές κατασκευάζουν τετράγωνα στις πλευρές ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου (βλ. το διακοσμητικό μοτίβο στο σχήμα αριστερά) και χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού το ίδιο το ορθογώνιο τρίγωνο επαληθεύουν τη σχέση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Στη συνέχεια επαληθεύουν τη σχέση αυτή στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 3cm και 4cm και υποτείνουσα μήκους 5cm.







<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</u>:Για την απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος προτείνεται να χρησιμοποιηθούν ψηφιακά εργαλεία, όπως το μικροπείραμα «Μία απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2019

Κεφάλαιο 2ο (Να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.1 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Προτείνεται η διδασκαλία να γίνει με αφετηρία την ερμηνεία των πινακίδων οδικής κυκλοφορίας για την κλίση δρόμου και να γίνει μια πρώτη, εποπτική αναφορά στην έννοια της ομοιότητας τριγώνων και στην ανάγκη εισαγωγής τριγωνομετρικών αριθμών (βλ. ενδεικτική δραστηριότητα 1).

Το σχόλιο 1 (σελ. 137) που αναφέρεται στην κλίση μιας ευθείας, να αναφερθεί κατά τη διδασκαλία της §3.3 της Άλγεβρας.

Στην εφαρμογή 2, να επισημανθεί ότι για την κατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθούν οποιαδήποτε μήκη πλευρών αρκεί ο λόγος να είναι 1/5, και όχι μόνο τα μήκη 1 και 5.

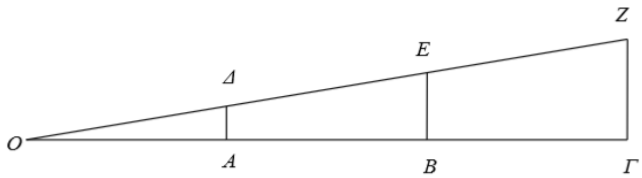
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

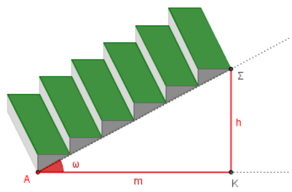
- Δραστηριότητα 1 σ. 136.
- Εφαρμογές 1 & 2 σ. 138.
- Εφαρμογή 3 σ. 139.
- Ερώτηση κατανόησης σ. 65 του κεφαλαίου 3.2. της Άλγεβρας. Με αυτή είναι δυνατόν να συνδεθούν οι έννοιες της εφαπτομένης γωνίας, των συντεταγμένων και της κλίσης.
- Ερώτηση κατανόησης σ. 140
- Ασκήσεις 1, 3, 5 σ. 140.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

Στο παρακάτω σχήμα, ζητείται από τους μαθητές να υπολογίζουν τους λόγους $\frac{ΑΔ}{ΟΑ}, \frac{ΒΕ}{ΟΒ}, \frac{ΓΖ}{ΟΓ}$.

Οι μαθητές διαπιστώνουν την ισότητα των λόγων και των γωνιών των τριών τριγώνων ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ, εξετάζουν τη μορφή τους και αναζητούν ένα όρο για να εκφράσουν αυτή τη σχέση (μεγέθυνση, ομοιότητα).





Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

Για την κατανόηση των εννοιών της κλίσης και της εφαπτομένης γωνίας προτείνεται να χρησιμοποιηθούν ψηφιακά εργαλεία, όπως το μικροπείραμα «Εφαπτομένη οξείας γωνίας» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2004

§2.2 (Να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να μην διδαχθεί η παρατήρηση β, σελ. 143 ($εφω = \frac{ημω}{συνω}$) και η άσκηση κατανόησης 4, γιατί είναι εκτός των στόχων του αναλυτικού προγράμματος και επιπλέον οι σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών της ίδιας γωνίας αναπτύσσονται διεξοδικά στην Γ΄ Γυμνασίου.

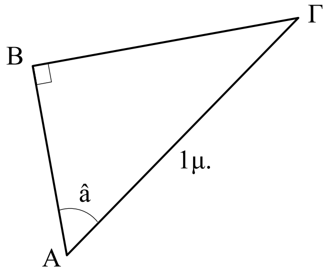
Η άσκηση 3γ της σελίδας 146 να παραλειφθεί, διότι χρησιμοποιεί μια άγνωστη για τους μαθητές ιδιότητα (πρόσθεση κατά μέλη ανισοτήτων).

Προτείνεται η χρήση υπολογιστή τσέπης (επιστημονικού ή απλού), κατά την λύση προβλημάτων ώστε να γίνει καλύτερη διαπραγμάτευση των εννοιών.

Στην εφαρμογή 2, να επισημανθεί ότι για την κατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθούν οποιαδήποτε μήκη πλευρών αρκεί ο λόγος να είναι $\frac{3}{5}$ και όχι μόνο τα μήκη 3 και 5. Επίσης προτείνεται να γίνει επιλογή ασκήσεων από την παράγραφο 2.3 και να αντιμετωπιστούν από τους μαθητές με χρήση του πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών, που είναι στο τέλος του βιβλίου.

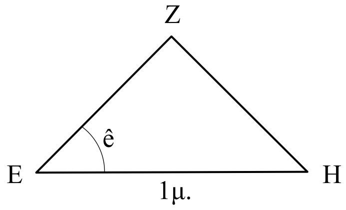
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 142.
- Εφαρμογή 1 σ. 143.
- Εφαρμογή 2 σ. 144.
- Επίσης προτείνονται οι ακόλουθες εφαρμογές Α, Β, Γ:

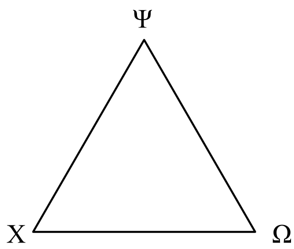


Α - Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, δίνεται ότι η υποτείνουσα ΑΓ έχει μήκος 1μ.

- Αν ημâ = $\frac{3}{5}$, τότε πόσο είναι το μήκος της πλευράς ΒΓ;
- Αν ημâ = $\frac{3}{5}$, τότε πόσο είναι το μήκος της πλευράς ΒΑ;
- Αν ημâ = $\frac{3}{5}$, τότε πόσο είναι το συνâ;
- Αν ημâ = $\frac{1}{3}$, τότε πόσο είναι το μήκος της πλευράς ΒΓ;
- Αν συνâ = $\frac{1}{3}$, τότε πόσο είναι το ημâ;



Β- Για το ισοσκελές τρίγωνο ΕΖΗ, του σχήματος με ΕΖ=ΖΗ, δίνεται ότι ê = 45^o και ΕΗ = 1μ. Μπορείτε να υπολογίσετε το ημ45^o; Μπορείτε να υπολογίσετε το συν45^o;



Γ Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΧΨΩ, που όλες οι γωνίες του είναι ίσες με 60^o, το μήκος κάθε πλευράς είναι 1μ. Μπορείτε να υπολογίσετε το ημ60^o και το συν60^o; Σας βοηθά η απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα να υπολογίσετε τα ημ30^o και συν30^o; Προσπαθήστε το!

- Ασκήσεις 2 & 4 σ. 146.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Με βάση μια φωτογραφία οι μαθητές χαράσσουν γραμμές, μετρούν μήκη πάνω σε αντίγραφο της φωτογραφίας και κάνουν υπολογισμούς για να προσδιορίσουν προσεγγιστικά την κλίση του δρόμου. Μοντελοποιούν την κατάσταση για να βρουν το ύψος που κερδίζει ένας πεζός που ανεβαίνει την ανηφόρα για κάθε μέτρο που διανύει πάνω σ' αυτήν.

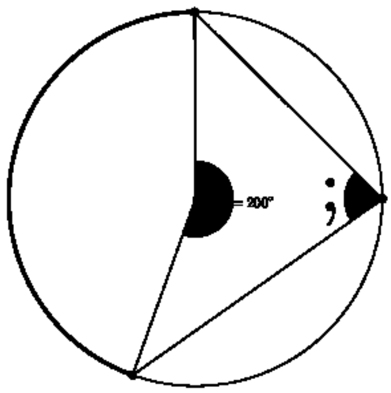
Κεφάλαιο 3^o (Να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)

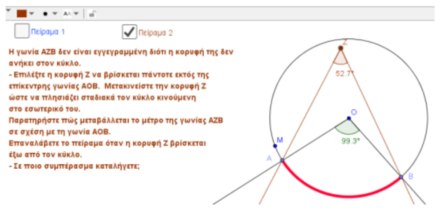
§3.1 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Λόγω της εξαίρεσης από την διδακτέα ύλη της Α΄ Γυμνασίου της §1.12 (επίκεντρη γωνία, σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου, μέτρηση τόξου) να δοθεί ο ορισμός της επίκεντρης γωνίας, του αντίστοιχου τόξου αυτής και η μεταξύ τους σχέση.

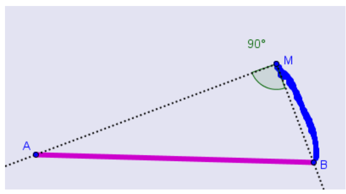
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Λόγω της εξαίρεσης από την διδακτέα ύλη της Α΄ Γυμνασίου της §1.12 (επίκεντρη γωνία, σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου, μέτρηση τόξου) να δοθεί ο ορισμός της επίκεντρης γωνίας, του αντίστοιχου τόξου αυτής και η μεταξύ τους σχέση.
- Θα διδαχθεί μόνο η δραστηριότητα 1 της σελίδας 175 και τα συμπεράσματα της σ. 176.
- Να δοθεί και ένα παράδειγμα μη κυρτής επίκεντρης και να ζητηθεί το μέτρο της αντίστοιχης εγγεγραμμένης.





Ενδεικτική δραστηριότητα 1^{η}:
Για την διερεύνηση της σχέσης του μέτρου επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας προτείνεται το μικροπείραμα «Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας σε ένα κύκλο», από το Φωτόδεντρο.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1986



Ενδεικτική δραστηριότητα 2^{η}: Για την κατανόηση της έννοιας της εγγεγραμμένης γωνίας προτείνεται να χρησιμοποιηθούν ψηφιακά εργαλεία, όπως το μικροπείραμα «Γωνίες στο αμφιθέατρο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2015

§3.2 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Να αναφερθεί το θεώρημα ότι στον ίδιο κύκλο σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές και αντιστρόφως, διότι αυτό δεν αποτελεί προηγούμενη γνώση και είναι απαραίτητη για ορισμένες αιτιολογήσεις.

Προτείνεται να γίνεται επιλογή ανάμεσα στις ερωτήσεις κατανόησης 1α), β), γ), 2α), β), γ), 3α), β), γ), ε) και στην άσκηση 1, λόγω του επαναληπτικού χαρακτήρα τους.

Προτείνεται, οι μαθητές μέσω κατασκευής να αναγνωρίσουν την ιδιότητα της κεντρικής γωνίας κανονικού πολυγώνου (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα), να γίνουν κατασκευές κανονικών πολυγώνων (με χειραπτικά μέσα) από τους μαθητές και, επιπλέον αν υπάρχει χρόνος και δεν έχει γίνει στην Α' γυμνασίου, να ζητηθεί, μέσω διερευνητικής δραστηριότητας η κατασκευή κύκλου που να διέρχεται από τρία σημεία (με χρήση της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και των ιδιοτήτων του κύκλου).

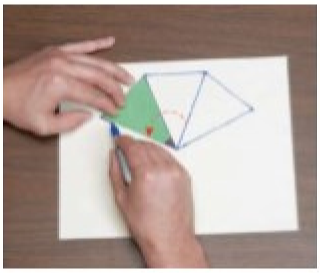
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 181. Σημειώνεται ότι κατά την πραγμάτευση της δραστηριότητας αυτής το ερώτημα γ) μπορεί να απαντηθεί χωρίς την επίκληση της σχέσης εγγεγραμμένης-επίκεντρης αλλά με την χρήση του γεγονότος ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΔΕ, ΟΕΖ είναι ισόπλευρα.
- Εφαρμογές 2&3 σ. 183.
- Ασκήσεις 1, 8.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Οι μαθητές σχεδιάζουν ισοσκελές τρίγωνο σε χαρτόνι και το κόβουν. Το χρησιμοποιούν ως πατρόν για να το αναπαράγουν άλλες επτά φορές, περιστρέφοντάς το γύρω από την μια κορυφή του, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Συζητούν, γιατί το σχήμα που κατασκεύασαν δεν είναι οκτάγωνο και τι θα έπρεπε να κάνουν, ώστε με αυτόν τον τρόπο να κατασκευάσουν οκτάγωνο.

[Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να κάνουν εικασίες για την κεντρική γωνία του κανονικού οκταγώνου, να διαπιστώσουν την ισχύ των εικασιών τους και, αν είναι δυνατόν να τις γενικεύσουν. Τελικά μπορεί να προκύψει, από τη διερεύνηση, τρόπος κατασκευής κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο.]

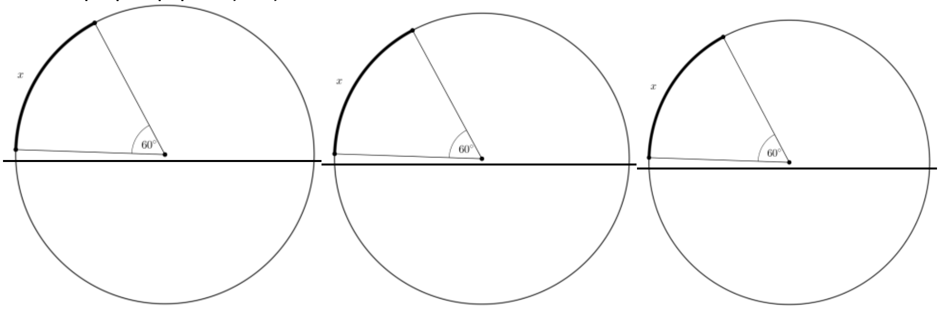


§3.3 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στην αναλογία των μεγεθών L και δ ή L και ρ και να γίνει σύνδεση με τις γνώσεις που έχουν από τη διδασκαλία της §3.3 της Άλγεβρας (η συνάρτηση y=αx), μέσα από τους πίνακες τιμών και την γραφική παράσταση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 186.
- Εφαρμογές 1 & 3 σ. 187.
- Επίσης ως εφαρμογές των αναλόγων ποσών προτείνεται να γίνουν οι παρακάτω υπολογισμοί μήκους τόξου:



- Ασκήσεις 2, 4, 7 σ. 192.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

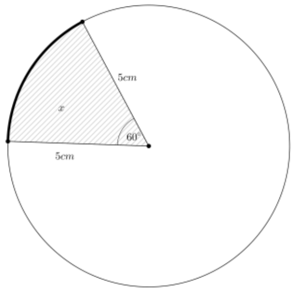
Το μικροπείραμα από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία «Ο αριθμός π» μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή στην έννοια του αριθμού π. Με τη βοήθεια του λογισμικού, σε μία προσομοίωση μέτρησης του μήκους ενός κύκλου με δυναμικά μεταβαλλόμενη διάμετρο, οι μαθητές μετρούν το μήκος του κύκλου, υπολογίζουν σε πολλές περιπτώσεις το πηλίκο της περιφέρειας με τη διάμετρό του και γενικεύουν. http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/4380?locale=el

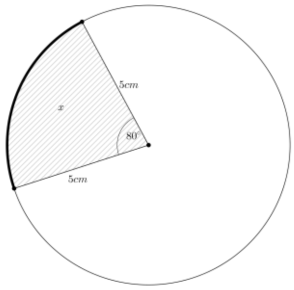
§3.5 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στο ότι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και η ακτίνα του δεν είναι ανάλογα μεγέθη.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Εφαρμογές 1 & 2 σ. 193.
- Εφαρμογή 3 σ. 194.
- Επίσης ως εφαρμογές των αναλόγων ποσών προτείνεται να γίνουν οι παρακάτω υπολογισμοί εμβαδού τομέα:





- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 3 & 5 σ. 194.
- Ασκήσεις 1, 3, 4, 6 σ. 195.

Κεφάλαιο 4ο **(Να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)**

Η αντίληψη και η γνώση του χώρου παίζουν κρίσιμο ρόλο ακόμα και στις πιο συνηθισμένες ανθρώπινες δραστηριότητες. Η κατανόηση και η γνώση των εννοιών του κεφαλαίου αυτού είναι πολύ σημαντική για όλους τους μαθητές, αφού σχετίζονται με την καθημερινή ζωή, αλλά και τις εφαρμογές της Γεωμετρίας του χώρου σε άλλες επιστήμες (όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται στο εισαγωγικό σημείωμα του κεφαλαίου στο βιβλίο του μαθητή).

Παρόλο που οι μαθητές γνωρίζουν από το Δημοτικό την έννοια του κύβου, του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, του κυλίνδρου, τους τρόπους υπολογισμού του εμβαδού των επιφανειών τους και του όγκου τους και διακρίνουν την έννοια της χωρητικότητας από την έννοια του όγκου, εντούτοις μπορεί να αντιμετωπίζουν δυσκολίες, ιδιαίτερα με την έννοια της μέτρησης.

Μερικές ενδεικτικές δυσκολίες των μαθητών που πρέπει να αντιμετωπιστούν είναι:

- ✓ Η μεταβολή κατά ανάλογο τρόπο των διαστάσεων ενός στερεού επιφέρει ανάλογη μεταβολή στον όγκο του.
- ✓ Στερεά με μεγαλύτερη επιφάνεια έχουν μεγαλύτερο όγκο.
- ✓ Στερεά με ίσο όγκο, έχουν ίση επιφάνεια.

Για τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια της μέτρησης, βλέπε http://ebooks.edu.gr/new/ps.php , στο 2. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣ ΤΑ ΙΣΧΥΟΝΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ/ Β. Οδηγοί για τον Εκπαιδευτικό/ Επιστημονικό Πεδίο: Μαθηματικά/ Σελ 103.

Οι δυσκολίες προέρχονται από το γεγονός ότι απαιτούνται από τους μαθητές ικανότητες κατανόησης του χώρου και συστηματική οργάνωση των οπτικών πληροφοριών, ώστε να είναι σε θέση να κατανοήσουν τις αφηρημένες γεωμετρικές έννοιες της Στερεομετρίας.

Αν και τα τρισδιάστατα αντικείμενα είναι μέρος της καθημερινής τους εμπειρίας, η αναπαράστασή τους από δισδιάστατα σχήματα είναι πηγή δυσκολίας. Η χρήση διάφορων μέσων, όπως τρισδιάστατα μοντέλα, η σύνδεση των δισδιάστατων αναπαραστάσεων με αντικείμενα από την καθημερινή τους εμπειρία, η σχεδίαση στο χαρτί τρισδιάστατων αντικειμένων, η εξερεύνηση των αναπτυγμάτων των επιφανειών πραγματικών αντικειμένων, ο σχεδιασμός σε χαρτόνι του αναπτύγματος των επιφανειών κάποιων στερεών και κατόπιν η δημιουργία αυτών των στερεών, όπως επίσης προγράμματα τρισδιάστατης γεωμετρίας που επιτρέπουν την περιστροφή των σχεδιασμένων στερεών και παρέχουν την δυνατότητα θέασής τους από διαφορετικές οπτικές γωνίες κτλ. μπορούν να τους βοηθήσουν στην κατανόηση των εννοιών.

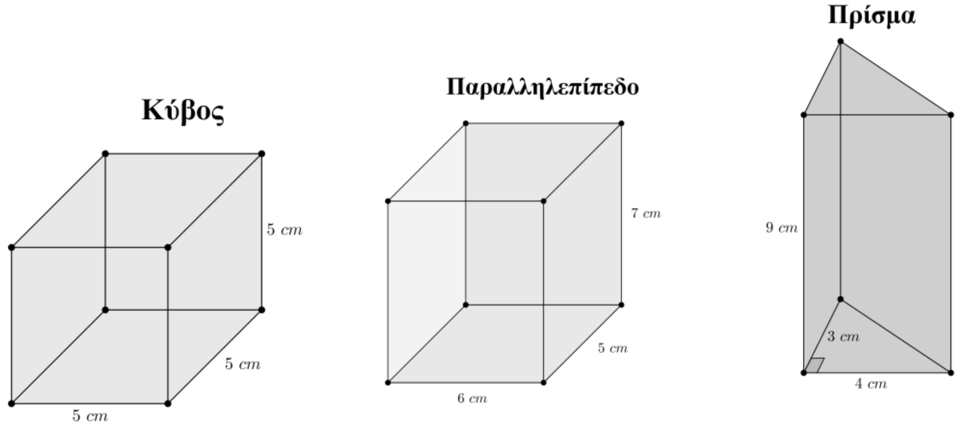
Στην Β΄ Γυμνασίου, προτείνεται να δοθεί βάρος, κυρίως στις μετρήσεις και στους τύπους υπολογισμού του όγκου στερεών σχημάτων.

§4.2 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Για την κατανόηση των εννοιών και των τύπων υπολογισμού του εμβαδού του πρίσματος και του κυλίνδρου προτείνεται να δοθούν στους μαθητές κατάλληλες δραστηριότητες, π.χ. μελέτη του αναπτύγματος της επιφάνειας ενός πρίσματος ή ενός κυλίνδρου ή αντίστροφα, η σχεδίαση σε χαρτόνι του αναπτύγματος της επιφάνειας ενός ορθού τριγωνικού πρίσματος και ενός κυλίνδρου με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και η κατασκευή του στερεού.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

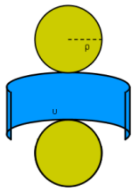
- Ανάλογα με τις γνώσεις της τάξης μπορεί ο διδάσκων χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα πρίσματα (κατά προτίμηση πραγματικά στερεά) να αναφερθεί εν συντομία στις έννοιες της παραγράφου 4.1.
- Ως δραστηριότητα και χωρίς αναφορά στους τύπους των σελίδων 207, 208 μπορεί να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας των παρακάτω στερεών:



- Στη συνέχεια με την βοήθεια των αποτελεσμάτων των παραδειγμάτων μπορούν να δοθούν οι σχετικοί τύποι.
- Εφαρμογή 1 σ. 208.
- Ασκήσεις 3 σ. 210 & 6, 9 σ. 211.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα</u>:

Η εφαρμογή 3 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να διερευνηθεί με το μικροπείραμα «Υπολογίστε το κόστος μιας δεξαμενής καυσίμων» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2038

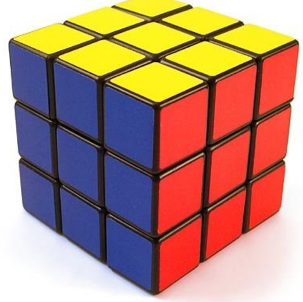


§4.3 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

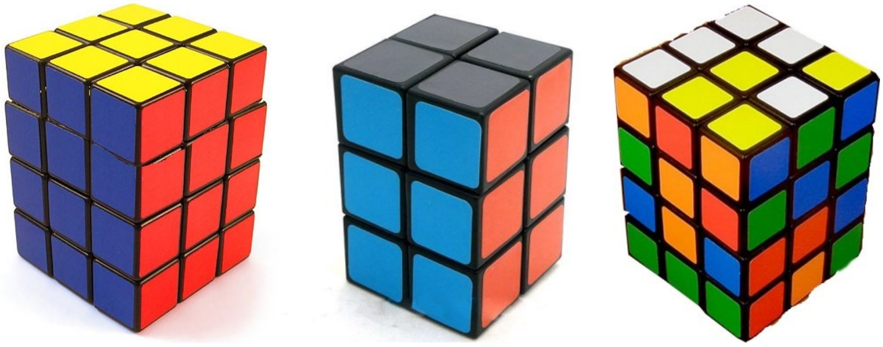
Στο Δημοτικό οι μαθητές έχουν διδαχτεί τις έννοιες του όγκου και τις μονάδες μέτρησης αυτού, εκτός από τον διεθνή συμβολισμό τους.
Επισημαίνεται ότι οι μαθητές συχνά πιστεύουν ότι ο διπλασιασμός, τριπλασιασμός κτλ. όλων των διαστάσεων ενός στερεού οδηγεί στον διπλασιασμό, τριπλασιασμό κτλ. του όγκου.
Να ζητείται από τους μαθητές ο σχεδιασμός σχημάτων που αντιπροσωπεύουν τα στερεά των ασκήσεων που δίνονται για λύση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Ως δραστηριότητα να γίνει ο υπολογισμός των όγκων των τριών στερεών που υπάρχουν στην σελίδα 212 με μονάδα μέτρησης τον μικρό κύβο.
- Στη συνέχεια μπορεί να υπολογιστεί ο όγκος του παρακάτω κύβου του Rubik με μονάδα μέτρησης ένα από τα (ίδια) κυβάκια που τον απαρτίζουν:



Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα για τα στερεά:



- Η βασική ιδέα που πρέπει να αναδειχθεί είναι ότι ο όγκος ενός πρίσματος προκύπτει από το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του και κατ΄αναλογία αυτό ισχύει και για τον όγκο κυλίνδρου.
- Αφού δοθούν οι τύποι της σελίδας 213 μπορούν να γίνουν οι εφαρμογές 1,2 της σελίδας 213 και η εφαρμογή 3 της σελίδας 214.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Οι μαθητές χρησιμοποιούν δύο φύλλα χαρτί Α4. Το ένα το διπλώνουν κατά μήκος και το άλλο κατά πλάτος για να σχηματίσουν δύο κυλίνδρους (χωρίς τις βάσεις). Διερευνούν σε ποια περίπτωση ο όγκος είναι μεγαλύτερος και δικαιολογούν σχετικά. Συζητούν για τα χαρακτηριστικά των δύο κυλίνδρων (ίσες παράπλευρες επιφάνειες – διαφορετικοί όγκοι).

§§4.4, 4.5 και 4.6 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Αυτές οι παράγραφοι δεν αποτελούν διδακτέα/εξεταστέα ύλη. Για λόγους πληρότητας και κατά την κρίση του διδάσκοντα μπορεί να γίνει μια γνωριμία με τα στερεά αυτά μέσω εικόνων ή επιλεγμένων βίντεο.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Οι μαθητές, χωρισμένοι σε ομάδες κατασκευάζουν από χαρτόνι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και μια πυραμίδα που έχουν το ίδιο εμβαδόν βάσης, την γεμίζουν με ρευστό υλικό (ρύζι ή άμμο) και συγκρίνουν τη χωρητικότητά της με αυτή του παραλληλεπιπέδου, αδειάζοντας κάθε φορά το περιεχόμενό της στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και συνεχίζοντας, μέχρι να γεμίσει αυτό. Συζητούν πάλι για τα αποτελέσματα και γενικεύουν κάνοντας εικασίες για τον τρόπο υπολογισμού του όγκου της πυραμίδας.
[Σχόλιο: Το ίδιο πείραμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη σύγκριση όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και πρίσματος με το ίδιο εμβαδόν βάσης.]

Σημείωση: Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό.
Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε, αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb, κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.
Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή MozillaFirefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flashplayer από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception sitelist στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit sitelist και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

<u>Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γυμνασίου</u>

Διδακτικό Έτος 2017-2018

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου» των Δημητρίου Αργυράκη, Παναγιώτη Βουργάνα, Κωνσταντίνου Μεντή, Σταματούλας Τσικοπούλου, Μιχαήλ Χρυσοβέργη.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφ. 1ο: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)
- Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών
- Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα
- Α. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα
- Β. Πράξεις με μονώνυμα

1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες [χωρίς τις υποπαραγράφους: ε) «Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων»]

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων [(χωρίς την υποπαράγραφο: «δ) Διαφορά – άθροισμα κύβων») και στ) «Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ »].

1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων
- Α. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων
- Β. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Κεφ. 2ο: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού
- Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων
- Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου.

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις μ' έναν άγνωστο
- Β. Ιδιότητες της διάταξης
- Γ. Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Κεφ. 3ο: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Κεφ. 5ο: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

5.1 Σύνολα (χωρίς την υποπαράγραφο: «Πράξεις με σύνολα», και την εφαρμογή 2))

5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα (χωρίς την υποπαράγραφο: «Πράξεις με ενδεχόμενα» και χωρίς τα «ασυμβίβαστα ενδεχόμενα»)).

5.3 Έννοια της πιθανότητας (χωρίς την υποπαράγραφο: «Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων»)

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφ. 1ο: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1 Ισότητα τριγώνων

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

1.3 Θεώρημα Θαλή.
1.5 Ομοιότητα
Α. Όμοια πολύγωνα
Β. Όμοια τρίγωνα (χωρίς την αιτιολόγηση του κριτηρίου ομοιότητας δύο τριγώνων στη σελίδα 220).

Κεφ. 2^{o}: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^o \le \omega \le 180^o$.
2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών
2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας
2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων.

ΙΙ. Διαχείριση Διδακτέας ύλης

Οι παρακάτω οδηγίες έχουν στόχο να παρουσιάσουν κάποιες σημαντικές πλευρές για κάθε ενότητα και έτσι να υποστηρίξουν τον εκπαιδευτικό ώστε να σχεδιάσει τη διδασκαλία του και να επιλέξει υλικό. Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που περιέχονται είναι ενδεικτικές και προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το γυμνάσιο και τον οδηγό του εκπαιδευτικού τα οποία είναι συμπληρωματικά προς τα ισχύοντα και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ψηφιακού σχολείου:
http://ebooks.edu.gr/new/ps.php.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 1^{o} (Να διατεθούν 31 ώρες)

Με τις επιμέρους προτάσεις ανά ενότητα γίνεται προσπάθεια να αποφευχθεί ο υπερβολικά δύσκολος αλγεβρικός χειρισμός σε βάρος της κατανόησης.

§1.1 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Ο χαρακτήρας της παραγράφου είναι επαναληπτικός. Προτεραιότητα πρέπει να δοθεί σε ερωτήσεις κατανόησης και ασκήσεις εννοιολογικού και υπολογιστικού περιεχομένου και όχι σε ασκήσεις αλγοριθμικού προσανατολισμού με αυξημένη δυσκολία.
Επειδή ο λογισμός με ρίζες δεν είναι αυτοσκοπός, να μη διδαχθούν η εφαρμογή 1 (όσον αφορά τη γενίκευση της $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$), η εφαρμογή 3 (σελ. 21) (μετατροπή κλάσματος σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή). και οι ασκήσεις 6 και 8 (σελ. 24). Επιπλέον προτείνεται η αποφυγή ασκήσεων που απαιτούν ευχέρεια στο λογισμό με ρίζες, όπως οι 2δ), 3 και 7 (σελ. 23 ,24)

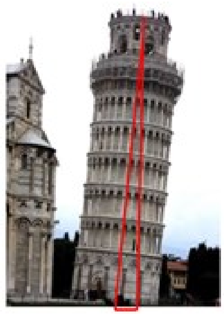
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Παραδείγματα 1 & 2 σ. 14.
- Ερώτηση κατανόησης 3 σ. 15.
- Άσκηση 1 σ. 15 και 4 σ. 16.
- Παραδείγματα 1 & 2 σ. 17.
- Παράδειγμα 3 σ. 18.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1 & 2 σ. 18.
- Ασκήσεις: Να δοθούν επιλεκτικά ερωτήματα από τις ασκήσεις 1, 1, 3 σ. 19.
- Δραστηριότητα 1 σ. 20.
- Παράδειγμα 2 σ. 21.
- Παράδειγμα 4 σ. 22.
- Ερωτήσεις κατανόησης 4 σ. 22 & 4 σ. 23.
- Άσκηση 2 α0 β) σ. 23 &
- Ασκήσεις 7 & 11 σ. 244 (η άσκηση 11 συνδέει γεωμετρικές και αλγεβρικές έννοιες).

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η Μαρία υπολόγισε το γινόμενο $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$ και το βρήκε 15. Ο Γιάννης ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Γιάννης σε αυτό συμπέρασμα; Συμφωνείτε με το Γιάννη ή με τη Μαρία και γιατί;

[Σχόλιο: Μια πιθανή πορεία της διερεύνησης των μαθητών περιλαμβάνει: αναζήτηση από τους μαθητές ερμηνειών για τις απόψεις που περιγράφονται στο σενάριο, εικασία για την ιδιότητα που ίσως ισχύει και διερεύνηση με παραδείγματα, ανάδειξη της ανάγκης μιας γενικής απόδειξης της ιδιότητας και δημιουργία της απόδειξης. Προτείνεται ο εκπαιδευτικός να επιλέξει το ρόλο του συντονιστή της συζήτησης, αφήνοντας χρόνο στους μαθητές να αναπτύξουν πρωτοβουλίες. Επεκτάσεις αυτής της πορείας θα μπορούσε να είναι η διερεύνηση του αν ισχύουν αντίστοιχες ιδιότητες για το άθροισμα, τη διαφορά και το πηλίκο αριθμών. Αυτή η διερεύνηση δίνει τη δυνατότητα να συζητηθούν η έννοια και ο ρόλος της αλγεβρικής απόδειξης και του αντιπαραδείγματος. Με αφορμή αυτό το πρόβλημα μπορούν να αναδειχθούν τα μειονεκτήματα της χρήσης υπολογιστή τσέπης και η αξία των ιδιοτήτων των ριζών (αφού, ο πολλαπλασιασμός $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$ με το κομπιουτεράκι μπορεί να μη δώσει το σωστό αποτέλεσμα 15, λόγω προσεγγίσεων)]

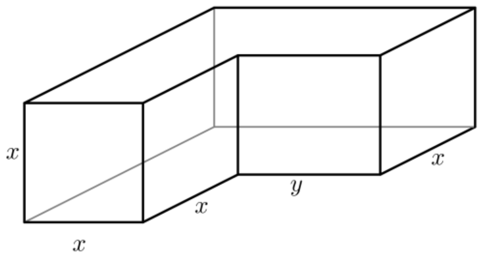


§§1.2, 1.3 και 1.4 (Να διατεθούν 6 ώρες)

Κατά την διδασκαλία των παραγράφων αυτών οι έννοιες θα προσεγγιστούν περιγραφικά και με παραδείγματα.

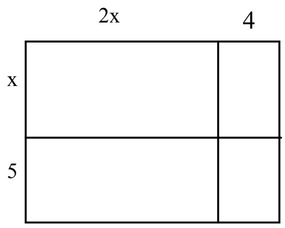
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

Δραστηριότητα 1 η οποία μπορεί να εμπλουτιστεί με την έκφραση του όγκου στο παρακάτω στερεό:



- Παράδειγμα 1 σ. 26.
- Εφαρμογή 3 σ. 27.
- Ερώτηση κατανόησης 3 σ. 28.
- Ασκήσεις 6 & 7 σ. 29.
- Παραδείγματα 1 & 3 σ. σ. 31.
- Ασκήσεις 1, 5 & 6 σ. 32.
- Παραδείγματα 1 σ. 34 και 3 σ. 35. Σημειώνεται ότι η έννοια της ισότητας πολυωνύμων διδάσκεται για λόγους πληρότητας και δεν προσφέρεται για επίλυση ασκήσεων πέραν του παραδείγματος 3 σ. 35.
- Ερώτηση κατανόησης 3 σ. 36.
- Ασκήσεις 3 σ. 36 & 5, 6 σ. 37.
- Παράδειγμα 1 σ. 39.
- Ασκήσεις 1, 4 & 7 σ. 41.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>



Υπολογίστε το γινόμενο (2x+4)(x+5),
α) χρησιμοποιώντας το διπλανό σχήμα,
β) χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.
Πώς σχετίζονται μεταξύ τους τα βήματα των δύο διαδικασιών;
[Σχόλιο: Το γεωμετρικό πλαίσιο μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση της χρήσης της επιμεριστικής ιδιότητας στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η δημιουργία συνδέσεων μεταξύ της επιμεριστικής ιδιότητας και εικονικών (γεωμετρικών) αναπαραστάσεων.]

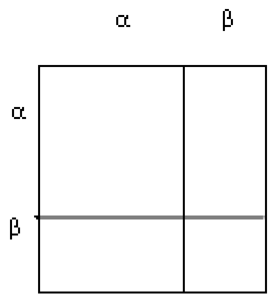
§1.5 (Να διατεθούν 7 ώρες)

Δεν θα διδαχθεί η υποπαράγραφος ε) της σ. 44.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Παραδείγματα 1 & 3 σ, 45.
- Η διδασκαλία ή μη του παραδείγματος 7 σ. 47 επαφίεται στην κρίση του διδάσκοντος.
- Ασκήσεις 2 & 6 σ. 4. Επίσης προτείνεται να γίνει επιλογή τις ασκήσεις 13, 15 & 16 της σ. 50.
- Το τρίγωνο του Pascal (σ. 51) μπορεί να γίνει ως δραστηριότητα στην τάξη.

Ενδεικτική δραστηριότητα $1^{η}$:



α) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχουν οι παραστάσεις $(α+β)^2$ και $α^2+β^2$; Είναι ίσες ή άνισες; Με ποιο τρόπο μπορείτε να το διαπιστώσετε;

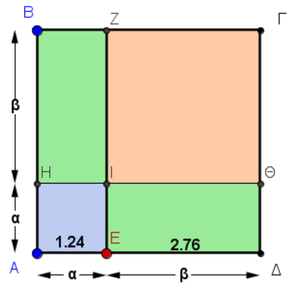
β) Χρησιμοποιήστε το διπλανό σχήμα, για να υπολογίσετε το $(α+β)^2$.

γ) Διερευνήστε αν μπορεί ποτέ να ισχύει ο ισχυρισμός που κάνατε στο πρώτο ερώτημα.

[Σχόλιο: Η πρώτη ερώτηση, με αναμενόμενη την απάντηση $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$ έχει στόχο τη δημιουργία σύγκρουσης ανάμεσα σε αυτό που ίσως φαίνεται λογικό στους μαθητές και στα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη δοκιμή συγκεκριμένων αριθμών (για να γίνει αυτό, το σχήμα δεν πρέπει να δίνεται στο α ερώτημα). Η ώθηση των μαθητών σε τέτοιου είδους συγκρούσεις είναι συχνά χρήσιμη για το πέρασμα από τις διαισθητικές αντιλήψεις σε πιο συστηματικές διερευνήσεις και επιχειρηματολογίες. Η αναγνώριση της εικασίας ως εσφαλμένης, ακολουθείται με ένα πλαίσιο (γεωμετρικό) για τη βελτίωσή της και συγχρόνως την παροχή μιας απόδειξης, έστω κι αν αυτή περιορίζεται σε θετικές τιμές των μεταβλητών. Η διερεύνηση του τρίτου ερωτήματος (με δεδομένη την απάντηση του α ερωτήματος όπως περιγράφεται παραπάνω) μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση του λάθους αλλά και σε μια διερεύνηση των συνθηκών κάτω από τις οποίες αυτό γίνεται σωστό. Επέκταση της δραστηριότητας θα μπορούσε να είναι η ανάδειξη των περιορισμών της γεωμετρικής απόδειξης και η αναζήτηση κάποιου τρόπου να αποφανθούμε για την ισχύ της σχέσης για κάθε αριθμό (θετικό ή αρνητικό). Αυτή η γενίκευση οδηγεί στην έννοια της ταυτότητας και στην αλγεβρική απόδειξή της.]

Ενδεικτική δραστηριότητα $2^{η}$:

Το μικροπείραμα «Το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(α+β)^2$» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη γεωμετρική και αλγεβρική απόδειξη της ταυτότητας $(α+β)^2$ μέσω της σύνδεσης αλγεβρικών και γεωμετρικών οντοτήτων. Οι μαθητές ανακαλύπτουν σταδιακά το αλγεβρικά ισοδύναμο ανάπτυγμα του τετραγώνου του αθροίσματος δυο όρων με τη βοήθεια δυναμικού χειρισμού κατάλληλων σχημάτων, επαληθεύουν με αριθμητικά παραδείγματα την εικασία τους και την αποδεικνύουν αλγεβρικά. http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1890



§1.6 (Να διατεθούν 7 ώρες)

Εξαιρούνται από την διδασκαλία η υποπαράγραφος δ) σ. 56 , το πρώτο παράδειγμα αυτής της σελίδας και η υποπαράγραφος στ της σελίδας 57.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Να γίνει αναφορά στην ιδιότητα ότι το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι μηδέν αν και μόνο αν κάποιος από αυτούς (ή και οι δύο) είναι μηδέν.
  Στη συνέχεια ως δραστηριότητα να δοθεί για επίλυση η εξίσωση $x(x+1)(x-2)=0$
  Κατόπιν να ζητηθεί η απόδειξη της $x(x+1)(x-2)=x^3-x^2-2x$
  και τέλος να ζητηθεί η επίλυση της εξίσωσης $x^3-x^2-2x=0$
  Στη συνέχεια να τονιστεί ότι σκοπός του της παραγράφου είναι η μετατροπή αθροισμάτων

όπως το x^3-x^2-2x σε γινόμενα.

- Παράδειγμα σ. 54
- Παράδειγμα σ. 55
- Παράδειγμα σ. 56
- Παράδειγμα σ. 57
- Να γίνει ως εφαρμογή η παραγοντοποίηση της x^3-x^2-2x.
- Παραδείγματα 1 σ. 58 εκτός της ερώτησης δ) και 3, 4 σ. 58.
- Ερωτήσεις κατανόησης 5 σ. 59 & 10 σ. 60. Δεν θα γίνουν οι 6 σ. 59 & 7 σ. 60.
- Από τις ασκήσεις των σ. 59-60 εξαιρούνται οι 12, 13, 14 και προτείνεται να γίνει από τον διδάσκοντα επιλογή κάποιων ερωτημάτων από τις υπόλοιπες.

§§1.8 και 1.9 (Να διατεθούν 3 ώρες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Από την 1.8 θα διδαχθεί μόνο η έννοια του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου μέσω της δραστηριότητας της σελίδας 68 και των παραδειγμάτων 1, 2 σ. 69. Προτείνεται να μην γίνουν άλλες ασκήσεις στο ΕΚΠ.
- Σημειώνεται ότι η διδασκαλία της έννοιας του μέγιστου κοινού διαιρέτη μπορεί να παραλειφθεί χωρίς να δημιουργήσει προβλήματα αφού οι απλοποιήσεις μπορούν να γίνονται με παραγοντοποίηση. Σε κάθε περίπτωση η έννοια του ΜΚΔ δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης .
- Δραστηριότητα σ. 71
- Εφαρμογές 1 & 2 (μόνο τα ερωτήματα α) β) και όχι το γ)) σ. 72.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1 & 2 σ. 73.
- Ασκήσεις 1, 2, 3 (χωρίς το ερώτημα η) σ. 74.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 60 και 225 και να βρείτε το ΕΚΠ τους.

β) Με τον ίδιο τρόπο, να βρείτε το ΕΚΠ:

Ι) των μονωνύμων $6x^2y$ και $9xy^3$ ΙΙ) των πολυωνύμων x^2-1 και x^2+x.

[Σχόλιο: Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα επιδιώκεται η διερεύνηση της έννοιας του ΕΚΠ μονώνυμων και απλών πολυωνύμων και ανάπτυξη στρατηγικών υπολογισμού του. Η ανάδειξη των αναλογιών με την ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και το ΕΚΠ φυσικών έχει στόχο την απόδοση νοήματος στους αλγόριθμους της παραγοντοποίησης και του ΕΚΠ πολυωνύμων. Οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν στη διατύπωση του κανόνα εύρεσης του ΕΚΠ μέσα από προσπάθειες και βελτιώσεις. Η αναζήτηση αιτιολογήσεων του κανόνα είναι χρήσιμη και μπορεί να γίνει πρώτα για τους φυσικούς και να επεκταθεί στα μονώνυμα και στα πολυώνυμα.]

§1.10 (Να διατεθούν 5 ώρες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 75.
- Παραδείγματα 1 &2 (μόνο το ερώτημα β)) σ. 76.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1 & 2 σ. 77.
- Από τις ασκήσεις της σ. 77 προτείνονται οι 1 (β), δ), στ)) , 2 (α) β)) 3 (α), β) , 4 (α) β)) .
- Δραστηριότητα σ. 78
- Παράδειγμα 1 σ. 79.
- Ερώτηση κατανόησης 1 σ. 80.
- Από τις ασκήσεις σ. 80 προτείνονται οι 1 (α) γ) δ)), 2 (α) , γ)), 3 (α) , δ)) 4 α) (η β) δεν θα διδαχθεί).

Κεφάλαιο 2^{ο} (Να διατεθούν 15 ώρες)

Οι μαθητές έχουν διδαχθεί τις εξισώσεις 1^{ου} βαθμού και τις έχουν χρησιμοποιήσει στη λύση προβλημάτων. Επίσης έχουν αντιμετωπίσει εξισώσεις της μορφής $x^2=\alpha$ στο 2^{ο} κεφάλαιο της Β΄ Γυμνασίου. Το υπόλοιπο περιεχόμενο του κεφαλαίου είναι νέο και συνδέεται με το προηγούμενο κεφάλαιο.

§§2.1 και 2.2 (Να διατεθούν 8 ώρες)
Η υπενθύμιση των εξισώσεων 1ου βαθμού θα γίνει μέσω παραδειγμάτων.
Σκοπός της διδασκαλίας των παραγράφων είναι
A) Υπενθύμιση των πρωτοβαθμίων εξισώσεων.
B) Η σύνδεση τους με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις μέσω της παραγοντοποίησης και η τελική τους επίλυση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

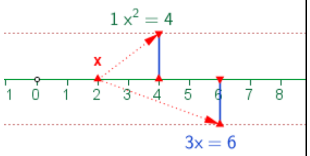
- Από την παράγραφο 2.1 θα διδαχθούν τα παραδείγματα 1 &2 σ. 86 και οι τύποι της σ. 86.
- Για σύνδεση των εννοιών που έχουν προηγηθεί και όσων θα ακολουθήσουν προτείνεται να γίνει στην τάξη η παρακάτω επέκταση του ερωτήματος β) της εφαρμογής 2 σ. 72:

  Βρείτε τα x για τα οποία ισχύει $\frac{2x^2-8x+6}{x-3}=0$!
- Δεν χρειάζεται να γίνουν ασκήσεις στην επίλυση πρωτοβαθμίων εξισώσεων και η παράγραφος δεν αποτελεί μεμονωμένα αντικείμενο εξέτασης.
- Δεδομένου ότι έχει διδαχθεί επαρκώς η παραγοντοποίηση η διδασκαλία της επίλυσης εξίσωσης 2ου βαθμού μπορεί να ξεκινήσει από την παράγραφο 2.2 β σ.94. Η απόδειξη του τύπου για την δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να γίνει κατά την κρίση του διδάσκοντα χωρίς φυσικά να αποτελεί αντικείμενο εξέτασης.
- Θα γίνουν τα παραδείγματα 1 ,2, 3 σ. 95. Ειδικά για τα ερωτήματα α) β) του παραδείγματος 1 προτείνεται να είναι να συζητηθεί και η δυνατότητα επίλυσης με παραγοντοποίηση και να συγκριθούν οι μέθοδοι. Στο παράδειγμα 2 α) να επισημανθεί ότι η χρήση της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων δεν μπορεί να δώσει απάντηση. Τέλος, στο παράδειγμα 3 να προστεθεί η ερώτηση: Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2x^2-8x+6}{x-3}=0$!

  Μέσω αυτής επιδιώκεται να αναδειχθεί η λειτουργικότητα της παραγοντοποίησης πολυωνύμων.
- Στην υποπαράγραφο παραγοντοποίηση τριωνύμου να χρησιμοποιηθεί το παράδειγμα της σ. 96
- Ασκήσεις 3,4 σ. 97.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:
Παρατηρήστε ότι $1^3=1$, δηλαδή ότι ο κύβος του 1 ισούται με το 1. Μπορείτε να βρείτε όλους τους αριθμούς που έχουν αυτή την ιδιότητα, δηλαδή ο κύβος του αριθμού να είναι ίσος με τον ίδιο τον αριθμό; Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;
[Σχόλιο: Είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα που οδηγεί στη διατύπωση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης και την επίλυσή της με παραγοντοποίηση. Μια διερεύνηση των μαθητών με δοκιμές είναι πιθανόν να οδηγήσει σε κάποιες λύσεις (πχ. στο 0 και το 1) αλλά όχι σε όλες. Αυτή η δυσκολία μπορεί να λειτουργήσει ως αφορμή ώστε να αναδειχτεί η σημασία της επίλυσης μιας εξίσωσης μέσω αλγεβρικού μετασχηματισμού για την εύρεση όλων των λύσεών της.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:
Η επίλυση της εξίσωσης $αχ^2+βχ=0$ μπορεί να υποστηριχτεί και με το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων της μορφής $αχ^2+βχ=0$, με $α\neq0$» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση και εξάσκηση αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού (ειδική μορφή: y=0).
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2130



Ενδεικτική δραστηριότητα 3η:
Σχεδιάστε με λογισμικό (πχ. Geogebra) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^3+2x^2$ και $y=2x^2+x$. Σημειώστε στη γραφική παράσταση το ή τα κοινά σημεία τους. Αν υποθέσουμε ότι ένα κοινό σημείο είναι το Α, να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του σε σχέση με τους τύπους των δύο συναρτήσεων. Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του κοινού ή των κοινών τους σημείων (α) από τις γραφικές παραστάσεις και (β) αλγεβρικά με χρήση των τύπων των δύο

συναρτήσεων.

[Σχόλιο: Οι στόχοι της δραστηριότητας είναι α) η σύνδεση των πολυωνυμικών εξισώσεων και των αλγεβρικών μεθόδων επίλυσής τους με την γραφική αναπαράστασή τους και β) η αναγνώριση της λύσης της εξίσωσης ως τετμημένης του κοινού σημείου (ή των κοινών σημείων).]

§2.3 (Να διατεθεί 1 ώρα)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Παράδειγμα 1 σ. 99.
- Ως παράδειγμα να γίνει η άσκηση 12 σ. 102.

§2.5 (Να διατεθούν 4 ώρες)

- Η §2.5.Α (διάταξη) δεν θα διδαχτεί.
- Από την §2.5.Β θα διδαχτούν μόνο εκείνες οι ιδιότητες που χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού (δηλαδή η α, η β και η γ). Αυτές οι ιδιότητες θα πρέπει να συζητηθούν διαισθητικά και χωρίς την απόδειξη του σχολικού βιβλίου.
- Η §2.5.Γ θα διδαχτεί εξολοκλήρου.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, ότι η διδασκαλία της §2.5 περιορίζεται μόνο στις ανισώσεις πρώτου βαθμού. Η έννοια της διάταξης και οι ασκήσεις που αναφέρονται στη διάταξη και τις ιδιότητές της δεν περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη. Εξάλλου, αυτές οι έννοιες θα διαπραγματευθούν διεξοδικά στην επόμενη τάξη.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΝΑ ΥΠΟΠΑΡΑΓΡΑΦΟ

2.5 Β: Θα διδαχθούν οι ιδιότητες των ανισοτήτων με παραδείγματα. Στη συνέχεια μπορούν να συζητηθούν στην τάξη με αιτιολόγηση τα παρακάτω:

Αν έχουμε:	Προκύπτει ότι:
$α>2$	$2α>4$
$α>3$	$α-2>1$
$t>7$	$t>6$
$t>7$	$t>8$
$ω\geq 7$	$ω>7$
$m>7$	$m\geq 7$
$ξ<2$	$2ξ<4$
$λ>-1$	$λ+1>0$
$1<x<3$ $2<y<5$	$-3<x-y<1$
$1<x<3$ $2<y<5$	$-7<x-y<4$

2.5 Γ:

- Να γίνει το παράδειγμα της σ. 113.
- Ασκήσεις 16 α) β) γ) σ. 117.

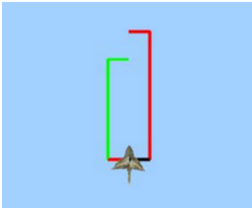
Ενδεικτική δραστηριότητα 1^{η}:

Το εισιτήριο εισόδου σε ένα χιονοδρομικό κέντρο στοιχίζει €7 και συμπεριλαμβάνει την ενοικίαση του εξοπλισμού. Στην περίπτωση που ο επισκέπτης χρησιμοποιήσει δικό του εξοπλισμό, τότε το εισιτήριο εισόδου είναι €4. Αν το κόστος αγοράς του εξοπλισμού είναι €75, πόσες φορές θα πρέπει να επισκεφθεί το ίδιο άτομο το χιονοδρομικό κέντρο, ώστε να είναι συμφέρουσα η αγορά του εξοπλισμού;

[Σχόλιο: Πρόκειται για ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που κάποιος εξοικειωμένος λύτης πιθανόν να το λύσει χρησιμοποιώντας ανίσωση πρώτου βαθμού. Ωστόσο, μπορεί να επιλεγούν από τους μαθητές άλλοι ισοδύναμοι τρόποι λύσης (αριθμητικά με πίνακες τιμών ή γραφικά με χρήση δύο συναρτήσεων). Ακόμη και μια λύση με δοκιμές θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για να οδηγηθούν οι μαθητές σε περισσότερο συστηματικές μεθόδους διερεύνησης, όπως έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση. Ο στόχος σε κάθε περίπτωση είναι η μοντελοποίηση του προβλήματος και η ανάδειξη των πλεονεκτημάτων κάθε μεθόδου επίλυσης.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί το μικροπείραμα «Γεωμετρική επίλυση ανίσωσης» από το Φωτόδεντρο, για την εισαγωγή και εξάσκηση στην έννοια της ανίσωσης και τη γεωμετρική και αλγεβρική επίλυσή της με τη βοήθεια ενός γεωμετρικού μοντέλου, που απεικονίζει ένα κουτί. Το μικροπείραμα έχει δημιουργηθεί με χρήση εργαλείων συμβολικής έκφρασης μέσω του προγραμματισμού (Χελωνόσφαιρα).



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/9626

Κεφάλαιο 3ο (Να διατεθούν 11 ώρες)

Το περιεχόμενο του κεφαλαίου είναι εξολοκλήρου νέο για τους μαθητές.
Γενικά για τα συστήματα προτείνεται: α) να χρησιμοποιούνται τόσο οι γραφικές όσο και οι αλγεβρικές μέθοδοι, β) να δίνεται έμφαση σε προβλήματα.
Όλα τα παραπάνω (και όχι μόνο οι αλγεβρικές μέθοδοι) συνιστάται να αποτελούν αντικείμενο εξέτασης.

§3.1 (Να διατεθούν 3 ώρες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

Οι μαθητές γνωρίζουν από την Β΄ τάξη ότι η εξίσωση y=αx+β, στην οποία θα στηριχθεί ή διδασκαλία της παραγράφου, παριστάνει ευθεία.

- Δραστηριότητα σ. 122.
- Παράδειγμα 1 σ. 125.
- Παράδειγμα 2 σ. 125 (που περιλαμβάνει αξιοποίηση της ιδιότητα ένα σημείο να ανήκει σε ευθεία και κατάστρωση-επίλυση εξίσωσης).
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3, 4, 5 σ. 126.
- Ασκήσεις 1, 3, 8.

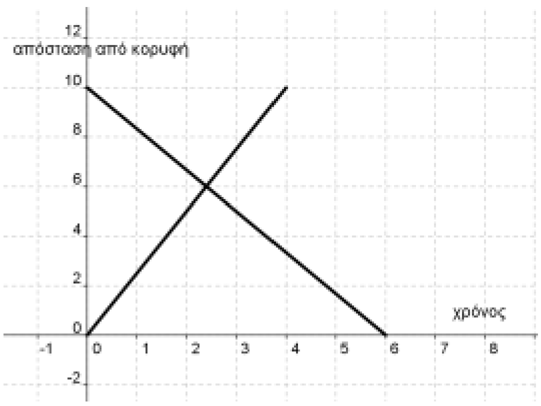
§3.2 (Να διατεθούν 2 ώρες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 128.
- Στην τάξη να γίνουν οι ασκήσεις 3, 4 σ, 132.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

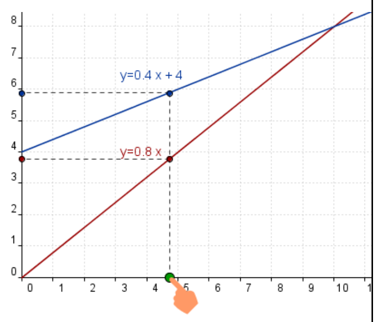
Η Μαρία ξεκινάει το πρωί από τη βάση της κατασκήνωσης, για να ανέβει στην κορυφή του Ολύμπου, η οποία απέχει 10 χιλιόμετρα. Η Έλενα ξεκινάει την ίδια ώρα από την κορυφή, για να επιστρέψει στην κατασκήνωση από την ίδια διαδρομή. Τα γραφήματα που περιγράφουν την απόσταση κάθε ορειβάτισσας από την κορυφή του βουνού είναι σχεδιασμένα στο σχήμα. Ποια γραμμή αντιστοιχεί στη Μαρία και ποια στην Έλενα; Τι εκφράζει το σημείο τομής των δύο γραμμών; Σε πόση ώρα θα συναντήσει η Μαρία την Έλενα; Πώς μπορούμε να περιγράψουμε αλγεβρικά τη συνάντησή τους και να βρούμε την ώρα συνάντησης;



[Σχόλιο: Η δραστηριότητα μπορεί να αξιοποιηθεί και στην 3.1 και στην 3.3. Προσφέρει αρκετές ευκαιρίες να συζητηθούν στην τάξη η γραμμική εξίσωση, η γραφική και η αλγεβρική επίλυση, ακόμα και το πόσο τα μαθηματικά μοντέλα εκφράζουν πιστά την πραγματικότητα.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

Η άσκηση 4 του σχολικού βιβλίου μπορεί να γίνει πιο διερευνητικά με το μικροπείραμα «Γραφική επίλυση συστήματος και επιλογή πακέτου κινητής τηλεφωνίας» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος και της λύσης του, με τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος με δραστηριότητες.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2052



§3.3 (Να διατεθούν 4 ώρες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 133.
- Να διδαχθούν οι μέθοδοι α) β) των σελίδων 133 & 134. Προτείνεται να συζητηθούν μέσω παραδειγμάτων τα πλεονεκτήματα κάθε μεθόδου αλλά να αφεθούν ελεύθεροι οι μαθητές να επιλέγουν μέθοδο.
- Παράδειγμα 2 σ.135.
- Παράδειγμα 4 σ.136.
- Ασκήσεις 1, 2, 8, 10, 11, 13 σ. 137-138.

Κεφάλαιο 5ο (Να διατεθούν 8 ώρες)

Το περιεχόμενο είναι εξολοκλήρου νέο. Η διδασκαλία του κρίνεται απαραίτητη κυρίως λόγω των εφαρμογών σε δραστηριότητες εκτός των μαθηματικών και του διαφορετικού «τρόπου σκέψης» που απαιτεί (σε σχέση με την υπόλοιπη ύλη των μαθηματικών αυτής της τάξης). Με την εξαίρεση από τη διδακτέα ύλη των πράξεων με σύνολα και του λογισμού πιθανοτήτων, ο στόχος είναι να δοθεί έμφαση στην εμπλοκή των μαθητών με απλά προβλήματα που θα αναδεικνύουν την έννοια της πιθανότητας και θα αποφεύγεται η "αλγεβροποίηση" της διδασκαλίας των πιθανοτήτων.

§5.1 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Να μην διδαχθεί η υποπαράγραφος «πράξεις με σύνολα», η εφαρμογή 2, οι ερωτήσεις κατανόησης 2ε), 2στ), 3, 4, 5 και οι ασκήσεις 6, 7, 8 και 9.

§5.2 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Να μη διδαχθούν οι πράξεις με ενδεχόμενα και τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα. Να εξαιρεθούν η ερώτηση 8 και η άσκηση 6.

§5.3 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Να μη διδαχθούν η υποπαράγραφος «βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων», η εφαρμογή 2, οι ερωτήσεις κατανόησης 4, 5 και οι ασκήσεις 9, 10, 11, 12, 13.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

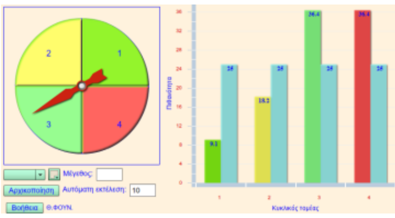
Ρίχνοντας δυο ζάρια τι πιθανότητα έχουμε να φέρουμε δυο 6άρια και τι πιθανότητα να φέρουμε ένα 6 κι ένα 5; Τι είναι πιο εύκολο να φέρουμε: ζαριά με άθροισμα μεγαλύτερο από 7 ή ζαριά με γινόμενο μικρότερο από 7;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

Έχουμε ένα ερωτηματολόγιο με 2 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου σε κάθε ερώτηση υπάρχουν τέσσερεις απαντήσεις, εκ των οποίων μόνο μια σωστή. Οι ερωτήσεις είναι τέτοιες, ώστε αναγκαζόμαστε να τις απαντήσουμε στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα να απαντήσουμε όλες τις ερωτήσεις σωστά; Τι είναι πιθανότερο, να απαντήσουμε μία τουλάχιστον σωστά ή να τις απαντήσουμε και τις δύο λάθος;

[Σχόλιο: Τα προβλήματα είναι σχετικά δύσκολα, αλλά το οικείο πλαίσιο (ζάρι, ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής) αναμένεται να λειτουργήσει προκλητικά ώστε να εμπλακούν οι μαθητές με τη διερεύνησή τους. Προσδοκούμε να κατανοηθεί η ανάγκη συστηματικής καταγραφής των δυνατών αποτελεσμάτων, που θα οδηγήσει σε πίνακα διπλής εισόδου (στην 1) και σε δεντροδιάγραμμα (στη 2)]

Ενδεικτική δραστηριότητα 3η:



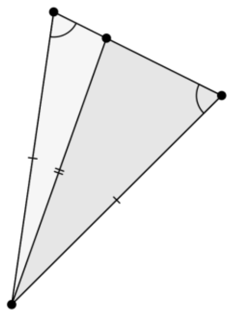
Με το μικροπείραμα «Δραστηριότητα με περιστρεφόμενη σβούρα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές μπορούν να περιστρέψουν μια σβούρα, την οποία προηγουμένως έχουν χωρίσει σε κυκλικούς τομείς. Τα αποτελέσματα της περιστροφής παριστάνονται με ραβδόγραμμα. Παίζοντας με τη σβούρα οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν την έννοια της πιθανότητας καθώς και τη σχέση μεταξύ θεωρητικής και πειραματικής πιθανότητας.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2009

Β' ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 1ο (Να διατεθούν 21 διδακτικές ώρες)

§1.1 (Να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

Η ενότητα προσφέρεται για επαφή των μαθητών με πτυχές της μαθηματικής αποδεικτικής διαδικασίας (ευθεία απόδειξη, αναλυτική μέθοδος, αντιπαραδείγματα, απαγωγή σε άτοπο). Προτείνεται στο εισαγωγικό κομμάτι της ενότητας, πριν από την έννοια της ισότητας των τριγώνων, να γίνει επανάληψη των απαραίτητων γνώσεων που θα χρειαστούν (π.χ. οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, οι παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες κτλ.)
Επίσης προτείνεται, όπου είναι δυνατόν να χρησιμοποιείται η συμμετρία ως προς άξονα ή κέντρο, ως επιχείρημα αιτιολόγησης ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 1).
Συνιστάται κατά την διδασκαλία του κεφαλαίου , συμπληρωματικά, να χρησιμοποιείται ρυζόχαρτο για την επαλήθευση της ισότητας σχημάτων.

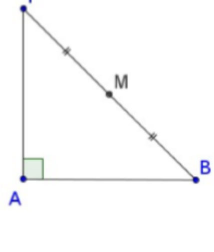


Μετά την υπενθύμιση όρων και αποτελεσμάτων των σελίδων 186-187 να επισημανθεί στην εισαγωγή της έννοιας της ισότητας τριγώνων ότι κατ΄ αρχάς απαιτείται ισότητα 6 στοιχείων τα οποία μειώνονται χάρη στα κριτήρια και στην ιδιότητα που αφορά το άθροισμα γωνιών τριγώνου.
Επίσης προτείνεται να γίνουν κατασκευές τριγώνων από 3 στοιχεία και να γίνει επαλήθευση της σύμπτωσης ως ένδειξη ισχύος των κριτηρίων.
Να τονιστεί στην τάξη με κατάλληλο παράδειγμα ότι η διάταξη ισότητας στοιχείων Π-Π-Γ δεν αποτελεί κριτήριο ισότητας τριγώνων:

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

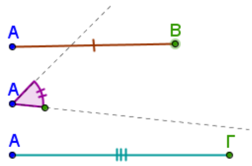
- Εφαρμογές 1-4 σ 191-192.
- Ερωτήσεις κατανόησης 2.1-11 σ. 194.
- Ασκήσεις 1, 2, 3, 4 σ. 194 & 5, 9, 11 σ. 195

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:



Η ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.
α) Να σχεδιάσετε το συμμετρικό τρίγωνο του ΑΒΓ ως προς κέντρο Μ.
β) Τι είδους τετράπλευρο προκύπτει και γιατί;
γ) Να εξετάσετε αν η διάμεσος ΑΜ είναι το μισό της υποτείνουσας ΒΓ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
[Σχόλιο: Η παραπάνω δραστηριότητα έχει ως στόχο να αναδειχθεί η σημασία ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού (κεντρική συμμετρία) στην ανακάλυψη και αιτιολόγηση μιας ιδιότητας του ορθογωνίου τριγώνου (ιδιότητα της διαμέσου προς την υποτείνουσα) χρησιμοποιείται το πρόβλημα]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:
Το μικροπείραμα «Κατασκευή τριγώνου-1ο κριτήριο ισότητας» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά για την κατασκευή τριγώνου με το 1ο κριτήριο ισότητας.http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2160



§§1.2 και 1.3 (Να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)
Θα διδαχθεί το θεώρημα του Θαλή για να φανεί η δυνατότητα μεταφοράς λόγων μέσω παραλλήλων ευθειών και να προετοιμαστεί διδακτικά η ομοιότητα.

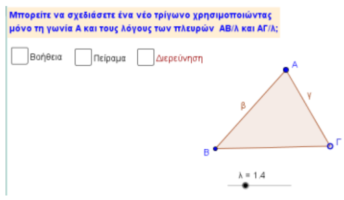
ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
§1.2
- Δραστηριότητα σ. 198.
- Παραδείγματα 1, 2, 3, σ. 202 & 4 σ. 203.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 3, 4, σ. 203 & 5, 7 σ. 204.
- Ασκήσεις 5, 6 σ. 205.

§1.3
- Δραστηριότητα της σ. 206 με σκοπό να διατυπωθεί το συμπέρασμα.
- Παράδειγμα 1 της σ. 207
- Ερώτηση κατανόησης 1 σ 208.

§1.5Α (Να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)
Δεν θα γίνει αναφορά στην ομοιοθεσία. Η έννοια της ομοιότητας θα οριστεί με βάση τον κανόνα : «Γενικά. Αν δύο πολύγωνα…» που υπάρχει στο τέλος της σελίδας 215 και θα επέχει θέση ορισμού.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Παραδείγματα 1 σ. 216 & 2 σ. 217.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1-4 σ. 218.
- Ασκήσεις 1 σ. 218 & 2, 5, 6 σ. 219.
- Σημειώνεται ότι η επίλυση της άσκ. 5 μπορεί να στηριχθεί στην εφαρμογή 1 σ. 2017.

Ενδεικτική δραστηριότητα:
Με το μικροπείραμα «Κριτήριο ομοιότητας 3» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν όμοια τρίγωνα δοσμένου τριγώνου, με συγκεκριμένο λόγο ομοιότητας.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5476



§1.5Β. (Να διατεθούν 4 ώρες)
Το κριτήριο ομοιότητας της (από ισότητα γωνιών) της σ. 220 θα δοθεί χωρίς αιτιολόγηση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:
- Παράδειγμα 1 σ. 220 & 2 σ. 221.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1 σ. 221 & 3, 4 σ. 222.
- Ασκήσεις 1 σ. 222 & 2, 4, 6, 8 σ. 222.

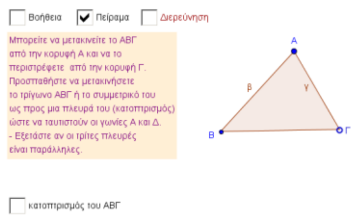
Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:
Ένα ζωγράφος δοκιμάζει να ζωγραφίσει τον κεκλιμένο πύργο της Πίζας. Το ύψος του πύργου είναι 60 m και το ύψος που έχει τώρα, λόγω της απόκλισης από την κατακόρυφη, είναι 59,8m. Στο σχέδιό του το ύψος του πύργου θέλει να είναι 30 cm. Αν εσύ ήσουν ο ζωγράφος πόσο θα σχεδίαζες το κατακόρυφο ύψος; Πώς θα ήσουν σίγουρος ότι με αυτές τις διαστάσεις ο πύργος της ζωγραφιάς θα γέρνει όπως ο πύργος της Πίζας;
[Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν το λόγο ομοιότητας

σχημάτων]

Ενδεικτική δραστηριότητα $2^η$:

Το μικροπείραμα «Κριτήριο ομοιότητας 3» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στα κριτήρια ομοιότητας και την κατασκευή γεωμετρικών αντικειμένων στο Geogebra

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5474



§1.6 (Να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Γενικές ασκήσεις κεφαλαίου (ισχύει για τις γενικές ασκήσεις όλων των κεφαλαίων): Απευθύνονται σε μαθητές με ιδιαίτερες δεξιότητες και ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Δεν πρέπει να ζητείται η διαπραγμάτευσή τους από όλους τους μαθητές. Αν ο διδάσκων εκτιμά ότι είναι χρήσιμο, μπορεί κάποια από αυτά τα θέματα να τα προτείνει σε κάποιους μαθητές.

Κεφάλαιο $2^ο$ (Να διατεθούν 13 διδακτικές ώρες)

§2.1 (Να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Ως σύνδεση με την τριγωνομετρία της προηγούμενης τάξης, οι μαθητές υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $30^ο$, $45^ο$ και $60^ο$.

Επίσης, θεωρείται χρήσιμη η σύνδεση της τριγωνομετρίας με την ομοιότητα τριγώνων. Η διατήρηση του λόγου δύο πλευρών σε ένα τρίγωνο διατηρείται όταν μεταβαίνουμε σε ένα όμοιό του τρίγωνο. Αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί για να αναδείξει ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί κατά κάποιον τρόπο «μετρούν» μία γωνία.

Οι μαθητές επεκτείνουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών γωνιών σε αμβλείες γωνίες. Για την περίπτωση της εφαπτομένης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη γνώση της κλίσης της ευθείας της μορφής $y = \alpha x$, όταν αυτή σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Κατά την κρίση του διδάσκοντα μπορεί πλέον (με χρήση ομοιότητας) να τεκμηριωθεί ότι το ημίτονο (αλλά και οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί) μιας οξείας γωνίας παραμένει το ίδιο ανεξάρτητα από το επιλεγόμενο ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο θα υπολογιστεί και εξαρτάται μόνο από την γωνία. Για τον σκοπό αυτό προσφέρεται η εφαρμογή 3β σ. 234.
- Για τον πίνακα της σ. 234 συνιστάται να γίνει υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος με χρήση ορθογωνίου ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου.
- Εφαρμογή 1 σ. 224.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1 σ. 234 & 2, 4 σ, 235.
- Ασκήσεις 3 σ. 235 &, 4, 7 σ. 236.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Δίνεται στους μαθητές ένα μη-ορθογώνιο τρίγωνο και ζητούνται να υπολογιστούν τα στοιχεία του. Από την περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου, αναδεικνύεται η ανάγκη επέκτασης των τριγωνομετρικών αριθμών σε αμβλείες γωνίες.

§2.2 (Να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 237.
- Παράδειγμα 1 σ. 38.
- Ερώτηση κατανόησης 3 σ. 239.
- Ασκήσεις 1, 5 α) β) γ) (όπου να τονιστεί ότι αναζητούμε γωνία μεταξύ 0 και 18 μοιρών), 6, 8 σ.239.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για τη σχέση τριγωνομετρικών αριθμών παραπληρωματικών γωνιών

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2105

§2.3 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Ένας από τους στόχους είναι οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις βασικές ταυτότητες για την απόδειξη απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Έτσι, προτείνουμε να εξαιρεθούν από την διδασκαλία οι ασκήσεις 5, 7, 8, 9 και 10 γιατί είναι εκτός στόχων του αναλυτικού προγράμματος και δεν είναι σε θέση να τις διαπραγματευτούν μόνοι τους οι περισσότεροι μαθητές.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα σ. 240
- Παραδείγματα 1, 2 σ. 241.

§2.4 (Να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Η παράγραφος αυτή αποτελεί επιστέγασμα προηγουμένων γνώσεων και δεξιοτήτων (αναλογίες, Πυθαγόρειο Θεώρημα, τριγωνομετρία, αλγεβρικός λογισμός) τις οποίες ενοποιεί επεκτείνοντας προς σημαντικά αποτελέσματα τα οποία βρίσκουν άμεσες και ενδιαφέρουσες πρακτικές εφαρμογές. Καταδεικνύουν έτσι την αξία των Μαθηματικών.

Η διδασκαλία των αποδείξεων των νόμων ημιτόνων – συνημιτόνων υπηρετεί τους παραπάνω μορφωτικούς στόχους αλλά η εξέταση (γραπτή ή προφορική) των αποδείξεων τους υπερβαίνει γι αυτό οι αποδείξεις δεν αποτελούν αντικείμενο γραπτής ή προφορικής εξέτασης. Για τον ίδιο λόγο δεν επιλέγονται ασκήσεις με υπολογιστική δυσκολία που να υπερβαίνει τις προτεινόμενες παρακάτω.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ:

- Δραστηριότητα 1 σ. 24. Αντί αυτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί συγκεκριμένο τρίγωνο του οποίου να μετρηθούν πλευρές – γωνίες, να βρεθούν τα ημίτονα τους και να επαληθευεί η ισότητα $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Geogebra.
- Παραδείγματα 1, 2 σ. 284 & 4 σ. 247.
- Ασκήσεις 1 α, 2 α, 5, 6, 8 (να διδαχθεί στην τάξη).

<u>Οι διδάσκοντες/ουσες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.</u>

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΓΑΒΡΟΓΛΟΥ

Εσωτ. Διανομή

- Γραφείο Υπουργού
- Γραφείο Αναπλ. Γενικού Γραμματέα
- Δ/νση Σπουδών, Προγρ/των & Οργάνωσης Δ.Ε., Τμ. Α΄
- Αυτ. Δ/νση Παιδείας, Ομογ., Διαπολ. Εκπ/σης, Ξένων και Μειον. Σχολείων
- Διεύθυνση Θρησκευτικής Εκπ/σης
- Δ/νση Ειδικής Αγωγής και Εκπ/σης
- Δ/νση Ιδιωτικής Εκπ/σης

Ψηφιακά υπογεγραμμένο από ANASTASIA PASCHALIDOU
Ημερομηνία: 2017.10.03 09:24:01 EEST

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ
Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Α΄

Ταχ. Δ/νση: Ανδρέα Παπανδρέου 37
Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι
Ιστοσελίδα: www.minedu.gov.gr
Πληροφορίες: Αν. Πασχαλίδου
Β. Πελώνη
Τηλέφωνο: 210-3443422
210-3442238

Βαθμός Ασφαλείας:
Να διατηρηθεί μέχρι:
Βαθ. Προτεραιότητας:

Αθήνα, 02-10-2017
Αρ. Πρωτ. 163561/Δ2

ΠΡΟΣ :

- **Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης**
- **Σχολ. Συμβούλους Δ.Ε. (μέσω των Περιφερειακών Δ/νσεων Εκπ/σης)**
- **Δ/νσεις Δ.Ε.**
- **Γενικά Λύκεια (μέσω των Δ/νσεων Δ.Ε.)**

ΚΟΙΝ.:

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.)
info@iep.edu.gr

ΘΕΜΑ: Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕ.Λ και Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το σχολ. έτος 2017 – 2018

Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. ΥΠ.Π.Ε.Θ. 156911/20-09-2017 έγγραφο

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 36/14-09-2017 του Δ.Σ) σας αποστέλλουμε τις παρακάτω οδηγίες για τη διδασκαλία των **Μαθηματικών** για το σχολικό έτος 2017-2018:

1. Άλγεβρα (Τάξεις: Α΄, Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ, Α΄, Β΄, Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)
2. Γεωμετρία (Τάξεις: Α΄, Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ, Α΄, Β΄, Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)
3. Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών (Τάξεις: Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ και Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)

Άλγεβρα Α΄ Τάξης Ημερήσιου Γενικού Λυκείου

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Ι. Εισαγωγή

Το μάθημα «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.ά., οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Οι μαθητές έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσω της ανάπτυξης και σύνδεσης πολλαπλών αναπαραστάσεών τους και στη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η σύνδεσή τους μπορούν υποστηριχθούν από ψηφιακά περιβάλλοντα, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

ΙΙ. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου»

Εισαγωγικό κεφάλαιο

Ε.2 Σύνολα

Κεφ.2^{ο}: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4)

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (εκτός των ιδιοτήτων 3 και 4)

Κεφ.3^{ο}: Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

3.2 Η Εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$

3.3 Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Κεφ.4^{ο}: Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} Βαθμού

4.2 Ανισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Κεφ.5^{ο}: Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

5.2 Αριθμητική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου)

5.3 Γεωμετρική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου)

Κεφ.6^{ο}: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

6.3 Η Συνάρτηση f(x)= αx+β (εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής)

Κεφ.7^{ο}: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης*:* f(x)= αx^2

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης*:* f(x)= αx^2+βx+γ

ΙΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8–6–2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php]

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων. Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην **§Ε.1,** αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$ της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

§Ε.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

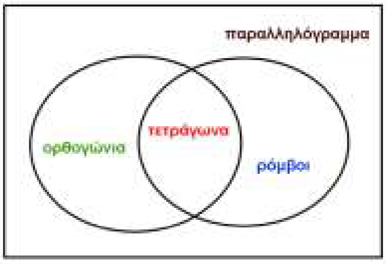
Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονισθούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους μαθητές της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου.

Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του. Οι δραστηριότητες Δ.1, Δ.2 και Δ.3 του ΑΠΣ είναι ενδεικτικές για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Χρησιμοποιείστε τα διαγράμματα Venn για να αναπαραστήσετε τις σχέσεις μεταξύ παραλληλογράμμων, ορθογωνίων, τετραγώνων και ρόμβων.



[Σχόλιο: Από το διάγραμμα μπορούν οι μαθητές να διαπιστώσουν ακόμα ότι:

- Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, ενώ όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.
- Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι, αλλά όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.
- Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα, αλλά όλα τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ρόμβοι ...

Κεφάλαιο 2^{o}

(Προτείνεται να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Η επανάληψη και περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό (αλγεβρικές πράξεις, παραγοντοποίηση, ταυτότητες κ.λ.π.) δεν αποτελεί τον κύριο στόχο αυτού του κεφαλαίου. Ειδικότερα:

§2.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί $\frac{4}{3}$, 1.333…, 1,010101…, 1,1010010001…, καθώς και στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως $\frac{4}{2}$,$\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\frac{\pi}{6}$,-1.333 κ.ά.). Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες: $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$, $\alpha\cdot\beta\neq0 \Leftrightarrow \alpha\neq0$ και $\beta\neq0$.

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη του ισχυρισμού: $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$. Η δραστηριότητα Δ9 του ΑΠΣ μπορεί να αξιοποιηθεί προς αυτή την κατεύθυνση.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

Η Ελένη και ο Κώστας παρατηρούν ότι το άθροισμα 3+11 είναι άρτιος και το γινόμενο 3×11 είναι περιττός. Κατόπιν αυτών:

Η Ελένη ισχυρίζεται ότι: αν το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιος, τότε το γινόμενό τους είναι περιττός

Ο Κώστας ισχυρίζεται ότι: αν το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι περιττός, τότε το άθροισμά τους είναι άρτιος.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) οι ισχυρισμοί της Ελένης και του Κώστα λένε το ίδιο πράγμα;

β) Το γινόμενο δύο φυσικών είναι 1271. Αν υποθέσουμε ότι έχει δίκιο ο Κώστας ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστή;

i. το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα άρτιος

ii. το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα περιττός

iii. δεν είναι σίγουρο αν το άθροισμα είναι περιττός ή άρτιος μέχρι να μάθουμε ποιοι είναι οι αριθμοί.

γ) είναι σωστός ο ισχυρισμός της Ελένης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) είναι σωστός ο ισχυρισμός του Κώστα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

§2.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.9 του ΑΠΣ) καθώς και στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες: $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ **και** $\beta=0$, ενώ $\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ **ή** $\beta\neq 0$ και στα σχόλια 1 και 2 της σελ. 56 .

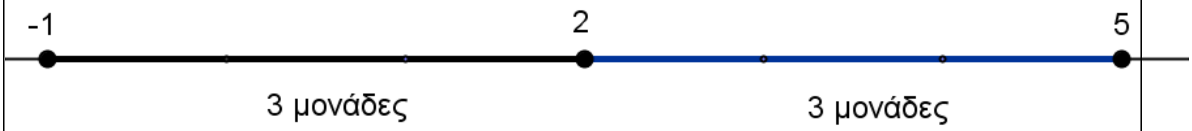
§2.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να επισημανθεί η μέθοδος απόδειξης των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής) και να συζητηθεί η αναγκαιότητα του «πρέπει» (⍰) και του «αρκεί» (⍰) σε αυτές.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους μαθητές και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Με αυτή την έννοια προτείνεται να μη διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

$|x-x_0|<\rho \Leftrightarrow x \in(x_0-\rho,\ x_0+\rho) \Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho$ καθώς και $|x-x_0|>\rho \Leftrightarrow x\in(-\infty,\ x_0-\rho)\cup(x_0+\rho,\ +\infty) \Leftrightarrow x<x_0-\rho$ ή $x>x_0+\rho$ καθώς και η γεωμετρική ερμηνεία αυτών, επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Ομοίως να μη διδαχθεί η έννοια του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Αντίθετα, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση $|x-2|<3$ σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ. $|x-2|<3$⍰$d(x, 2)<3$ ⍰$-1<x<5$).



Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$ και $|x|>\rho \Leftrightarrow x<-\rho$ ή $x>\rho$. Η δραστηριότητα Δ.10 του ΑΠΣ υποστηρίζει την παραπάνω προσέγγιση.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 <x< 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: i. $|x+2|$ ii. $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

§2.4 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες

Οι μαθητές έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα και στη δύναμη με ρητό εκθέτη. Να μη διδαχθούν οι ιδιότητες 3 και 4 (δηλαδή οι $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$ και $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$) εφόσον καλύπτονται πλήρως από τη χρήση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και μάλιστα με μικρότερες δυσκολίες χειρισμών.

Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων. Για να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα των αλγεβρικών μεθόδων έναντι της χρήσης του υπολογιστή τσέπης, προτείνεται μια δραστηριότητα σαν τη Δ.11 του ΑΠΣ.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$ δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις. Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

1η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{2\cdot\frac{1}{4}}\right]^2 = \left[[(-2)^2]^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

2η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = (-2)^{\frac{2}{4}\cdot 2} = (-2)^1 = -2$

Κεφάλαιο 3ο

(Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$. Ειδικότερα:

§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής αx+β=0, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Συναντούν δυσκολίες στη μετάβαση από την επίλυση μιας τέτοιας μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής αx+β=0, για δυο κυρίως λόγους: α) είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της έννοιας της παραμέτρου από την έννοια της μεταβλητής και β) δεν είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της διερεύνησης γενικά.

Για το λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου (σχολικό βιβλίο, σελ. 80). Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του λ (π.χ. λ=2, λ=5, λ=1, λ=-1) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου λ. Προτείνεται, επίσης, προς διαπραγμάτευση η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ καθώς και η επίλυση απλών παραμετρικών εξισώσεων και απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού (όπως η άσκηση 10 της Α’ Ομάδας).

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε εξισώσεις, όπως η Ix-5I=-3, την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές από την αρχή ως αδύνατη.

§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής $x^{\nu}=\alpha$ να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες

Η επίλυση της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$, $α≠0$ στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία.

Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.13 και Δ.14 του ΑΠΣ).

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους μαθητές είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα S και γινόμενο P). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων. Πέραν των παραπάνω στόχων, η χρήση των τύπων του Vieta σε ασκήσεις με πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς ξεφεύγει από το πνεύμα της διδασκαλίας και δεν προσφέρει στη μαθηματική σκέψη των μαθητών.

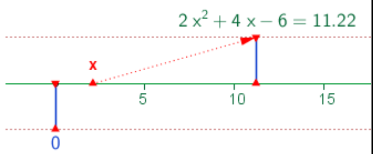
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m;

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.



<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

Το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού με τη βοήθεια τύπου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του τύπου.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132

Κεφάλαιο 4^o

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού Ειδικότερα:

§4.1 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων $1^{ου}$ βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών για την παραπάνω απεικόνιση, ως εφαρμογή της αντίστοιχης

υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.
Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους μαθητές και ανισώσεις όπως οι $|x-5|<-3$ ή $|x-5|>-3$, των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα οι μαθητές. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1ου βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α΄ Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η Ειρήνη παρατηρεί ότι κάθε φορά που ο σκύλος της γαβγίζει τη νύχτα ξυπνάει και χάνει 15 λεπτά ύπνου. Το προηγούμενο βράδυ κοιμήθηκε λιγότερο από 5 ώρες, ενώ συνήθως (αν δεν γαβγίσει ο σκύλος) κοιμάται 8 ώρες το βράδυ.

α) Πόσες φορές μπορεί να ξύπνησε το προηγούμενο βράδυ η Ειρήνη;

β) Μπορεί να την ξύπνησε το γάβγισμα 33 φορές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

§4.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2ου βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α΄ Λυκείου. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της παραγοντοποίησης του τριωνύμου, όπου γίνεται ξανά χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου», ώστε να μη δοθούν απευθείας τα συμπεράσματα αυτής. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν $\Delta<0$, θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).
Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα «τεχνάσματα» με τα σύμβολα «+» και «-», ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2ου βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δε συνδέονται με την κατανόηση του πότε ένα τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.
Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας προσδιορισμού του πρόσημου του τριωνύμου (π.χ. μέσα από τη μελέτη του προσήμου των παραγόντων του και του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, όταν αυτό παραγοντοποιείται) και στη συνέχεια στη χρήση των συμπερασμάτων για την επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 2ου βαθμού (π.χ. η δραστηριότητα Δ.15 του ΑΠΣ και η άσκηση 7 της Β′ Ομάδας) λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να λύσετε την ανίσωση: $X^2-5X-6<0$.

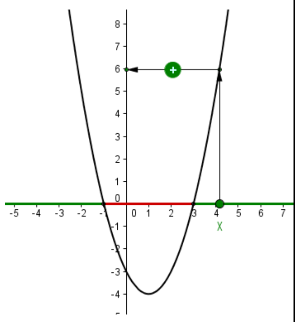
β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ και $M=\left(\sqrt{37}\right)^2-5\sqrt{37}-6$.
Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν α $\in(-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους; Ποιοι είναι μεγαλύτεροι κατά 1 από το τετράγωνό τους;

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:



Το μικροπείραμα «Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της περιοχής που πρέπει να κινείται η τιμή της μεταβλητής χ, ώστε το τριώνυμο να παίρνει θετική ή αρνητική τιμή. Παράλληλα μαθαίνει για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης αλγεβρικών σχέσεων.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1752

Κεφάλαιο 5^{ο}

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

§5.1 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών με το συμβολισμό (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας α, αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό $α_1$ που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής), δεδομένου ότι αυτός δυσκολεύει τους μαθητές (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ).

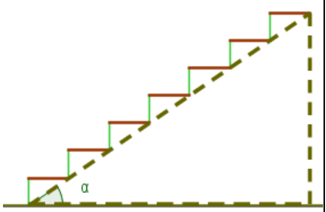
§5.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Αρχικά οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. η δραστηριότητα Δ.17 του ΑΠΣ). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το ν-οστό όρο με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν στα γενικά συμπεράσματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ χωρίς τα ερωτήματα γ και δ). Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως η άσκηση 12 της Α΄ Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου δεν θα διδαχθεί.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ας φτιάξουμε μια σκάλα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην κατανόηση των εννοιών της αριθμητικής προόδου.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5155

§5.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ' αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.19 (χωρίς τα ερωτήματα δ και ε) και Δ.21 (χωρίς το ερώτημα δ) του ΑΠΣ, που στόχο έχουν να αντιληφθούν οι μαθητές κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του ν-στού όρου γεωμετρικής προόδου. Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δεν θα διδαχθεί

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα 12α γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21αγενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσαρεστήθηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα 15α και στα 21α γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

Κεφάλαιο 6ο

(Προτείνεται να διατεθούν 11διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως)μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών. Η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών με επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων για την εύρεση του πεδίου ορισμού δεν βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Οι έννοιες «κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης», «μονοτονία – ακρότατα - συμμετρίες συνάρτησης», δεν συμπεριλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη, όπως αναπτύσσονται στις παραγράφους 6.4 και 6.5. Οι έννοιες αυτές θα μελετηθούν στις ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων της μορφής: $f(x)=αx+β$ (§6.3), $f(x)=αx^2$ (§7.1) και $f(x)=αx^2+βx+γ$ (§7.3). Ειδικότερα:

§6.1 - §6.2 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ.22, Δ.23 και Δ.24 του ΑΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση), στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) και στην ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος). Ο τυπικός ορισμός της μονοτονίας θα συζητηθεί στην Β τάξη. Μπορεί όμως κατά την κρίση του διδάσκοντα να εισαχθούν διαισθητικά οι έννοιες της μονοτονίας και ακρότατων και να γίνει η αναγνώριση τους σε γραφικές παραστάσεις. Οι έννοιες αυτές δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη.

Τονίζεται ότι ο τύπος της απόστασης δύο σημείων αποτελεί μία άλλη έκφραση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με όρους συντεταγμένων, ανακαλεί τις έννοιες των παραγράφων 2.3 και 2.4 . και προσφέρεται για υπολογισμούς. Επισημαίνεται ότι:

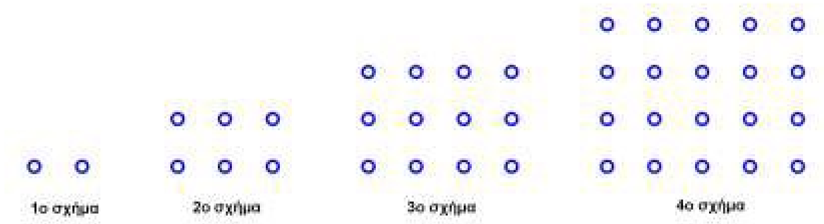
Α) Η απόδειξη του τύπου δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης και ως εφαρμογές του θα διδαχθούν οι ασκήσεις 4 και 5 .

Β) Δεν θα διδαχθεί η εφαρμογή της σελίδας 155

Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.15 και Δ.26 του ΑΠΣ

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

i) Ποιόν κανόνα πρέπει να εφαρμόσουμε



για να υπολογίσουμε από πόσα σημεία θα αποτελείται το 7ο σχήμα ;

ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το 27ο σχήμα **;**

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Αν με Δ παραστήσουμε μια δόση αμπικιλλίνης (η αμπικιλλίνη είναι μια χημική ουσία χρησιμοποιείται για τη θεραπεία αναπνευστικών λοιμώξεων) σε χιλιοστόγραμμα και με W παραστήσουμε το βάρος παιδιού σε κιλά, τότε η εξίσωση Δ = 50W δίνει έναν κανόνα για την εύρεση της μέγιστης ασφαλούς ημερήσιας δόσης του φαρμάκου της αμπικιλλίνης για παιδιά που ζυγίζουν λιγότερο από 10 κιλά.

α) Η εξίσωση εκφράζει συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Ποιες είναι οι λογικές επιλογές για ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή;

γ) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση.

§6.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας ψ=αx+β στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της f(x)=αx+β, ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα y'y στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να καταλήξουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία της συνάρτησης και να τα εκφράσουν συμβολικά, καθώς και να διερευνήσουν το ρόλο της παραμέτρου α σε σχέση με αυτά (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.27 του ΑΠΣ).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

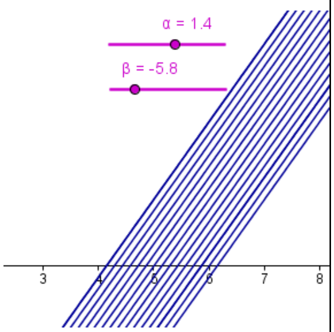
α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

βi) Αν *x* είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$

βii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος (βi), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Ο ρόλος των συντελεστών στην y=αx+β» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στη συνάρτηση f(x)= αx+β μέσω της διερεύνησης του ρόλου κάθε συντελεστή στο σχηματισμό της ευθείας y=αx+β και ερμηνείας της σχέσης των μελών της κάθε μιας από τις δυο οικογένειες ευθειών, για α σταθερό και β μεταβαλλόμενο και αντίστροφα.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1774

Κεφάλαιο 7ο

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν τη συνάρτηση $ψ=αx^2$ και τις ιδιότητές της. Επίσης, με αφετηρία την $ψ=αx^2$, κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx^2 + βx + γ$ την οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούν για να μελετήσουν ιδιότητες της f. Ειδικότερα:

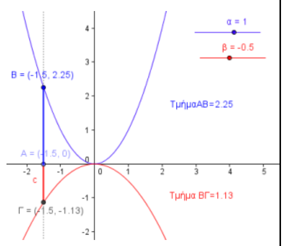
§7.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές χρησιμοποιούν πίνακες τιμών και λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $ψ=αx^2$. Μέσα από την παρατήρηση της γραφικής παράστασης και των τιμών διερευνούν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες των συναρτήσεων $g(x)=x^2$ και $h(x)=-x^2$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης γενικεύουν τα παραπάνω συμπεράσματα για τη συνάρτηση $f(x)=αx^2$ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ. 29 του ΑΠΣ ή η χρήση λογισμικού) και τα εκφράζουν συμβολικά.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Το μικροπείραμα « Οι μεταβολές της συνάρτησης $ψ=αx^2$» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά για τη μελέτη μονοτονίας της συνάρτησης $ψ=αx^2$ όταν $α>0$ ή $α<0$.

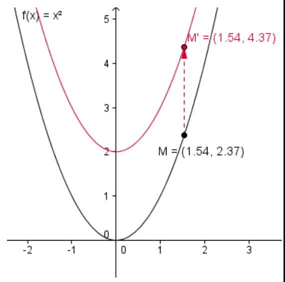
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1729



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Μετατοπίσεις της $ψ=αx^2$» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά από τους μαθητές για την οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της $ψ=αx^2$ αλλά και την εύρεση του τύπου της στη νέα θέση και να πειραματιστούν για τον συνδυασμό των δύο παραπάνω μετατοπίσεων.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1748



§7.3 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Να δοθεί έμφαση στη χάραξη και διερεύνηση της γραφικής παράστασης συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής $f(x)=αx^2+βx+γ$ και στη διαισθητική μελέτη της μονοτονίας, των ακρότατων και της συμμετρίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Η γενίκευση των παραπάνω εννοιών θα διδαχτούν στην Β Λυκείου.

Ειδικότερα, όσον αφορά στη χάραξη της γραφικής παράστασης και στη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$, η ιδέα που βρίσκεται και πίσω από τη δραστηριότητα Δ.30 του ΑΠΣ είναι η εξής: Οι μαθητές χρησιμοποιούν είτε πίνακες τιμών είτε λογισμικό για να χαράξουν τη γραφική παράσταση της $ψ=αx^2+κ$ και να την συγκρίνουν με την $ψ=αx^2$, ομοίως για την $ψ=α(x+λ)^2$ και τελικά για την $ψ=α(x+λ)^2+κ$. Με αυτόν τον τρόπο εισάγονται διαισθητικά στις μετατοπίσεις, τις οποίες θα γενικεύσουν στην Β Λυκείου. Αν χρησιμοποιηθεί λογισμικό, οι μαθητές μπορούν αφού χαράξουν τη γραφική παράσταση της $g(x)=αx^2$ για διάφορες τιμές του α να την μετατοπίσουν κ μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του κ (π.χ. κατά 3 μονάδες αριστερά, κατά 4 μονάδες δεξιά) και να παρατηρήσουν τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια να μετατοπίσουν λ μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του λ (π.χ. κατά 2 μονάδες κάτω, κατά 5 μονάδες πάνω) και να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα προκύψει θα είναι της μορφής $f(x)=α(x+κ)^2+λ$.

Τέλος, δίνονται στους μαθητές συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=αx^2+βx+γ$ και εκείνοι προσπαθούν, με κατάλληλες μετατοπίσεις της $g(x)=αx^2$, να οδηγηθούν στη γραφική παράσταση της f. Στη συνέχεια μελετούν, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, ιδιότητες της f και επεκτείνουν τα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της $g(x) = αx^2$ στην $f(x)=αx^2+βx+γ$.

Επίσης, να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων των §3.3 και §4.2(ρίζες και πρόσημο τριωνύμου) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.32 του ΑΠΣ). Διδακτικά έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να σχεδιαστούν οι έξι βασικές περιπτώσεις που αφορούν στις τιμές της διακρίνουσας ($Δ>0$, $Δ=0$ και $Δ<0$) συνδυαζόμενες με το πρόσημο του α (α>0, α<0) ώστε οι μαθητές να συνδέσουν τη γραφική παράσταση με τα αλγεβρικά συμπεράσματα που ήδη χρησιμοποιούν

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

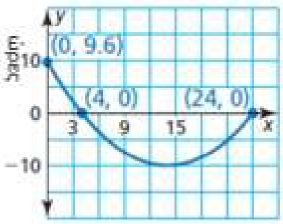
α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων: $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=(x-3)^2$, $g(x)=(x+3)^2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\varphi(x)=x^2$					0				
$f(x)=(x-3)^2$								0	
$g(x)=(x+3)^2$		0							

β) Με βάση τον παραπάνω πίνακα τιμών, να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *φ, f* και *g.*

γ)Ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της *φ*, δίνει τη γραφική παράσταση της *f* και ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της *φ* δίνει τη γραφική παράσταση της *g.*

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:



θερμοκρασία σε C^0

Ένας μετεωρολόγος δημιούργησε την διπλανή παραβολή για να παρουσιάσει τη θερμοκρασία μιας πόλης μια συγκεκριμένη ημέρα του έτους, όπου το x είναι ο αριθμός ωρών μετά τα μεσάνυχτα και το y είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου).

α) Βρείτε τη συνάρτηση f που αντιστοιχεί στην παραπάνω γραφική παράσταση.

β) Ποια είναι η πιο κρύα θερμοκρασία την ημέρα εκείνη;

Σημείωση: Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

Άλγεβρα Α΄ Τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου

1. **Η Διδακτέα ύλη ταυτίζεται με αυτή της Α΄ Τάξης του Ημερήσιου ΓΕΛ.**

2. **Η διαχείριση της ύλης είναι αυτή που προτείνεται για την Α΄ τάξη Ημερησίου ΓΕΛ με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.**

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου»

Εισαγωγικό Κεφάλαιο §Ε.2

(Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα

Κεφάλαιο 2ο

(Προτείνεται να διατεθούν 13 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 3ο

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 4ο

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 5ο

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 6ο

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 7ο

(Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

Για την προσαρμογή της διδασκαλίας στο διατιθέμενο χρόνο, προτείνεται να δίδεται έμφαση στα βασικά παραδείγματα - εφαρμογές και στην ανάδειξη, μέσω αυτών, του περιεχομένου, (εννοιών και μεθόδων) της κάθε παραγράφου

Γεωμετρία Α΄ Τάξης Ημερήσιου Γενικού Λυκείου

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Ι. Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου εστιάζει στο πέρασμα από τον εμπειρικό στο θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με στοιχεία θεωρητικής γεωμετρικής σκέψης και στο Γυμνάσιο, όπου έχουν αντιμετωπίσει ασκήσεις που απαιτούν θεωρητική απόδειξη. Στην Α΄ Λυκείου, πρέπει αυτή η εμπειρία των μαθητών να αξιοποιηθεί με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρητικής τους σκέψης. Η διατύπωση ορισμών γεωμετρικών εννοιών είναι κάτι δύσκολο για τους μαθητές, ακόμα και αυτής της τάξης, καθώς απαιτεί τη συνειδητοποίηση των κρίσιμων και ελάχιστων ιδιοτήτων που απαιτούνται για τον καθορισμό μιας έννοιας. Επίσης οι μαθητές χρειάζεται να διερευνούν ιδιότητες και σχέσεις των γεωμετρικών εννοιών και να δημιουργούν εικασίες τις οποίες να προσπαθούν να τεκμηριώσουν. Η αντιμετώπιση της μαθηματικής απόδειξης απλά ως περιγραφή μιας σειράς λογικών βημάτων που παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό, δεν είναι κατάλληλη ώστε να μυηθούν οι μαθητές στη σημασία και την κατασκευή μιας απόδειξης. Αντίθετα, είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές σε αποδεικτικές διαδικασίες, να προσπαθούν να εντοπίζουν τη βασική αποδεικτική ιδέα, μέσω πειραματισμού και διερεύνησης, και να χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς και αναπαραστάσεις, που υποστηρίζουν την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών. Η κατασκευή από τους μαθητές αντιπαραδειγμάτων και η συζήτηση για το ρόλο τους είναι μια σημαντική διαδικασία, ώστε να αρχίσουν να αποκτούν μια πρώτη αίσθηση της σημασίας του αντιπαραδείγματος στα Μαθηματικά. Η απαγωγή σε άτοπο είναι επίσης μια μέθοδος που συχνά συναντούν οι μαθητές στην απόδειξη αρκετών θεωρημάτων. Ο ρόλος του «άτοπου» στην τεκμηρίωση του αρχικού ισχυρισμού αλλά και το κατά πόσο η άρνηση του συμπεράσματος οδηγεί τελικά στην τεκμηρίωσή του, δημιουργούν ιδιαίτερη δυσκολία στους μαθητές. Σε όλα τα παραπάνω ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας.

ΙΙ. Διδακτέα Ύλη

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ., Σίδερη Π.

Κεφ.1ο: Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία
1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας
1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

Κεφ.3ο: Τρίγωνα
3.1. Είδη και στοιχεία τριγώνων
3.2. 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
3.3.2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
3.4. 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
3.6. Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων (εκτός της απόδειξης των θεωρημάτων Ι και ΙΙ).
3.7. Κύκλος - Μεσοκάθετος – Διχοτόμος
3.10. Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
3.11. Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
3.12. Τριγωνική ανισότητα (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
3.13. Κάθετες και πλάγιες (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος ΙΙ)
3.14. Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος Ι)
3.15. Εφαπτόμενα τμήματα
3.16. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων
3.17. Απλές γεωμετρικές κατασκευές
3.18. Βασικές κατασκευές τριγώνων

Κεφ.4ο: Παράλληλες ευθείες
4.1. Εισαγωγή
4.2. Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα (εκτός της απόδειξης του Πορίσματος ΙΙ της σελ. 81, και των προτάσεων Ι, ΙΙ, ΙΙΙ και ΙV)
4.4. Γωνίες με πλευρές παράλληλες
4.5. Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου
4.6. Άθροισμα γωνιών τριγώνου
4.8. Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου (Εκτός της απόδειξης του Πορίσματος)
Ιστορικό Σημείωμα

Κεφ.5ο: Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια
5.1. Εισαγωγή
5.2. Παραλληλόγραμμα
5.3. Ορθογώνιο
5.4. Ρόμβος
5.5. Τετράγωνο
5.6. Εφαρμογές στα τρίγωνα (εκτός της απόδειξης του Θεωρήματος ΙΙΙ)
5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
5.8. Το ορθόκεντρο τριγώνου (Χωρίς το Πόρισμα).
5.9. Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου
5.10. Τραπέζιο

5.11. Ισοσκελές τραπέζιο

Κεφ.6ο: Εγγεγραμμένα σχήματα
6.1. Εισαγωγικά – Ορισμοί
6.2. Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης (Εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
6.3. Γωνία χορδής και εφαπτομένης (Εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
6.4. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο –Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία.
6.5. Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο
6.6. Το εγγράψιμο τετράπλευρο (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

III. Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8–6–2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php]

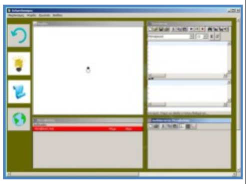
Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)
Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η διάκριση και επισήμανση των διαφορετικών χαρακτηριστικών της Πρακτικής Γεωμετρίας, που οι μαθητές διδάχθηκαν σε προηγούμενες τάξεις, και της Θεωρητικής Γεωμετρίας που θα διδαχθούν στο Λύκειο. Κάποια ζητήματα που θα μπορούσαν να συζητηθούν για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της Θεωρητικής Γεωμετρίας έναντι της Πρακτικής, είναι: Η αδυναμία ακριβούς μέτρησης, η ανάγκη μέτρησης αποστάσεων μεταξύ απρόσιτων σημείων, η αναξιοπιστία των εμπειρικών προσεγγίσεων (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο ΕΓ1 του ΑΠΣ).
Για να αποκτήσουν οι μαθητές μια πρώτη αίσθηση των βασικών αρχών της ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος, προτείνεται να εμπλακούν σε μια συζήτηση σχετικά με τη σημασία και το ρόλο των όρων «πρωταρχική έννοια», «ορισμός», «αξίωμα», «θεώρημα», «απόδειξη». Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης της Γεωμετρίας μπορούν να αποτελέσουν ένα πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θα αναδειχθούν τα παραπάνω ζητήματα.

Κεφάλαιο 3ο (Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

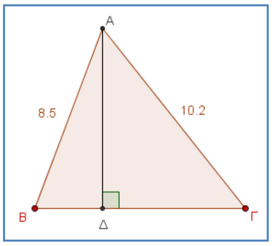
§3.1, §3.2 (Να διατεθούν 2 ώρες)
§3.3, §3.4 (Να διατεθούν 3 ώρες)
§3.5, §3.6 (Να διατεθούν 3 ώρες)
Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί το μεγαλύτερο μέρος του περιεχομένου των παραγράφων 3.1 έως 3.6 στο Γυμνάσιο. Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε κάποια νέα στοιχεία όπως:
α) Η σημασία της ισότητας των ομόλογων πλευρών στη σύγκριση τριγώνων.
β) Η διαπραγμάτευση παραδειγμάτων τριγώνων με τρία κύρια στοιχεία τους ίσα, τα οποία -τρίγωνα- δεν είναι ίσα (δυο τρίγωνα με ίσες δυο πλευρές και μια μη περιεχόμενη γωνία αντίστοιχα ίση, όπως στις δραστηριότητες Δ.5 και Δ.7 του ΑΠΣ).
γ) Ο σχεδιασμός σχημάτων με βάση τις λεκτικές διατυπώσεις των γεωμετρικών προτάσεων (ασκήσεων, θεωρημάτων) και αντίστροφα.
δ) Η διατύπωση των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών.
ε) Η ισότητα τριγώνων, ως μια στρατηγική απόδειξης ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών (σχόλιο σελ.43).
στ) Ο εντοπισμός κατάλληλων τριγώνων για σύγκριση σε «σύνθετα» σχήματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.6 του ΑΠΣ).
ζ) Η σημασία της «βοηθητικής γραμμής» στην αποδεικτική διαδικασία (πόρισμα Ι της §.3.2).
Προτείνεται να ενοποιηθούν σε μια πρόταση οι προτάσεις που ταυτίζουν τη διχοτόμο, τη διάμεσο

και το ύψος από τη κορυφή ισοσκελούς τριγώνου (πόρισμα I σελ.42, πόρισμα I σελ.45, πόρισμα I σελ.50).
Μαζί με την πρόταση αυτή προτείνεται να γίνει η διαπραγμάτευση της εφαρμογής 2 της σελ.61 για την απόδειξη της οποίας αρκούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
Επίσης, σαν μια ενιαία πρόταση, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να δείξουν ότι σε ίσα τρίγωνα τα δευτερεύοντα στοιχεία τους (διάμεσος, ύψος, διχοτόμος) που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι επίσης ίσα (π.χ. άσκηση 1i Εμπέδωσης σελ. 48, άσκηση 4 Εμπέδωσης σελ.54). Ενιαία μπορούν να αντιμετωπιστούν, ως αντίστροφες προτάσεις, τα πορίσματα IV της §3.2 και III, IV της §3.4 που αναφέρονται στις σχέσεις των χορδών και των αντίστοιχων τόξων.
Με στόχο την ανάδειξη της διδακτικής αξίας των γεωμετρικών τόπων προτείνεται τα πορίσματα III της §3.2 και II της §3.4, που αφορούν στη μεσοκάθετο τμήματος, καθώς και το θεώρημα IV της §3.6, που αφορά στη διχοτόμο γωνίας, να διδαχθούν ενιαία ως παραδείγματα βασικών γεωμετρικών τόπων. Συγκεκριμένα, προτείνεται οι μαθητές πρώτα να εικάσουν τους συγκεκριμένους γεωμετρικούς τόπους και στη συνέχεια να τους αποδείξουν (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.8, Δ.9 και Δ.10 του ΑΠΣ).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Με το μικροπείραμα «3ο κριτήριο ισότητας τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια της ισότητας των τριγώνων. Αναζητούν απαντήσεις, με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το κατασκευαστικό περιβάλλον του Χελωνόκοσμου.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5821



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:
Με το μικροπείραμα «Ύψος, Διάμεσος και διχοτόμος της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές οδηγούνται μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της σχέσης που συνδέει το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου. Παράλληλα μαθαίνουν για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2277



§3.7 (Να διατεθεί 1 ώρα)
§3.10 - §3.13 (Να διατεθούν 2 ώρες)
Η ύλη των παραγράφων αυτών είναι νέα για τους μαθητές. Να επισημανθεί στους μαθητές ότι η τριγωνική ανισότητα αποτελεί κριτήριο για το πότε τρία ευθύγραμμα τμήματα αποτελούν πλευρές τριγώνου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ). Στόχος είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν την αναγκαιότητά της, αλλά και τη λειτουργικότητά της, για την κατασκευή ενός τριγώνου.
Επίσης, προτείνονται οι ασκήσεις 4 και 6 (Αποδεικτικές), που διαπραγματεύονται την απόσταση σημείου από κύκλο και σχέσεις χορδών και τόξων αντίστοιχα.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Να εξετάσετε αν κατασκευάζονται τρίγωνα με μήκη πλευρών τις τιμές των α,β και γ για τις περιπτώσεις του παρακάτω πίνακα.

α	β	γ
5	6	7
10	3	4
8	9	10
12	3	5

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Αν δύο πλευρές τριγώνου έχουν μήκη 5 και 9:
α) Να δώσετε ενδεικτικές τιμές για την τρίτη πλευρά,
β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το μήκος της τρίτης πλευράς.

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:
Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ευθείας, για το οποίο:
α) Το άθροισμα ΑΜ+ΒΜ γίνεται ελάχιστο,
β) η διαφορά ΑΜ-ΜΒ γίνεται μέγιστη.
Να λύσετε το πρόβλημα στην περίπτωση που τα Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας και στην περίπτωση που βρίσκονται προς την ίδια μεριά.
Υπάρχει σημείο Μ, ώστε το άθροισμα να γίνει μέγιστο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
Υπάρχει σημείο Μ, ώστε η διαφορά να γίνει ελάχιστη; Αν ναι, ποιο;
[Σχόλιο-στόχος: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις ανισοτικές σχέσεις σε ένα τρίγωνο σε επίλυση προβλήματος]

§3.14 - §3.16 (Να διατεθούν 2 ώρες)
Τα συμπεράσματα της §3.14 είναι γνωστά στους μαθητές από το Γυμνάσιο. Οι αιτιολογήσεις, όμως, προέρχονται από τα θεωρήματα της §3.13. Το περιεχόμενο της §3.16 δεν είναι γνωστό στους μαθητές και χρειάζεται και για τις γεωμετρικές κατασκευές που ακολουθούν (προτείνονται οι Δ.14 και Δ.15 του ΑΠΣ).

§3.17, §3.18 (Να διατεθεί 1 ώρα)
Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών κατασκευών συμβάλλει στην κατανόηση των σχημάτων από τους μαθητές με βάση τις ιδιότητές τους καθώς και στην ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί και σε εξωμαθηματικές γνωστικές περιοχές. Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα τα προβλήματα 2 και 4 της §3.17 και τα προβλήματα 2 και 3 της §3.18.

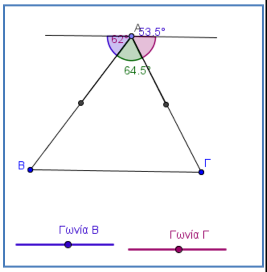
Κεφάλαιο 4ο (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

§4.1, §4.2, §4.3, §4.5 (Να διατεθούν 4 ώρες)
Το σημαντικότερο θέμα στις παραγράφους αυτές αποτελεί το «αίτημα παραλληλίας» το οποίο καθορίζει τη φύση της Γεωμετρίας στην οποία αναφερόμαστε. Η σημασία του «αιτήματος παραλληλίας», για τη Γεωμετρία την ίδια και για την ιστορική της εξέλιξη, μπορεί να διαφανεί από στοιχεία που παρέχονται στο ιστορικό σημείωμα της σελ. 96 καθώς επίσης και στη δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ. Οι μαθητές είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν την αδυναμία χρήσης του ορισμού και τη σημασία των προτάσεων της §4.2 (που προηγούνται του «αιτήματος παραλληλίας») ως εργαλεία για την απόδειξη της παραλληλίας δύο ευθειών. Προτείνεται να διερευνήσουν οι μαθητές τη σχέση του θεωρήματος της §4.2 και της Πρότασης Ι της σελ. 82 με στόχο να αναγνωρίσουν ότι το ένα είναι το αντίστροφο του άλλου.
Προτείνεται, πριν τη διαπραγμάτευση των θεωρημάτων της παραγράφου 4.5 να επισημανθεί η στρατηγική που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις των θεωρημάτων σχετικά με το πώς δείχνουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, γιατί δεν είναι οικεία στους μαθητές, διαδικασία η οποία αναδεικνύεται με τις αποδείξεις των θεωρημάτων της παραγράφου.

§4.6, §4.8 (Να διατεθούν 3 ώρες)
Προτείνεται το θεώρημα της §4.6 να συνδεθεί με τα πορίσματα της σελ. 59, ώστε οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι ισχυρότερο από τα πορίσματα και ότι αυτό οφείλεται στη χρήση του «αιτήματος παραλληλίας» στην απόδειξή του. Το ίδιο ισχύει και για το πόρισμα (i) της σελ. 89 σε σχέση με το Θεώρημα της σελ. 59.
Προτείνεται οι μαθητές, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών τριγώνου, να βρουν το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου, πενταγώνου κ.α., να εικάσουν το άθροισμα των γωνιών ν-γώνου και να αποδείξουν την αντίστοιχη σχέση (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο ΠΕ4 του ΑΠΣ). Δίνεται έτσι η δυνατότητα σύνδεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας. Να επισημανθεί, επίσης, η σταθερότητα του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών ν-γώνου.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Με το μικροπείραμα «Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές διερευνούν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και οδηγούνται σταδιακά από την διαίσθηση στην τυπική απόδειξη του σχετικού θεωρήματος.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2265



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα. Στη στήλη «Τρίγωνα» να συμπληρώσετε τον αριθμό των τριγώνων στα οποία χωρίζεται το πολύγωνο από διαγώνιους που άγονται από μία κορυφή του.

Αριθμός πλευρών	Τρίγωνα	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου
4		
5		
6		
…		
ν		

Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο του αθροίσματος των γωνιών κυρτού ν-γώνου;
[Σχόλιο: Αυτή η δραστηριότητα αποσκοπεί στην δημιουργία εικασίας, που θα οδηγήσει στην απόδειξη του τύπου.]

Ιστορικό Σημείωμα (Να διατεθούν 1 έως 2 ώρες)

Στο ιστορικό σημείωμα αναδεικνύεται η σημασία του 5ου αιτήματος στην δημιουργία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και παρουσιάζεται η συζήτηση και οι αναζητήσεις που προκάλεσε η διατύπωσή του, μέχρι τον 19ο αιώνα, και που τελικά οδήγησαν στη δημιουργία των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών. Προτείνεται, η θεματολογία του ιστορικού σημειώματος, να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν σχετικές εργασίες από τους μαθητές.

Σημείωση: Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε

Κεφάλαιο 5^{ο} (Προτείνεται να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες)

§5.1, §5.2 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Να επισημανθεί ότι καθένα από τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του παραλληλογράμμου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν αν ένα τετράπλευρο με τις δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και τις άλλες δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο. Για την εφαρμογή των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων μπορεί να αξιοποιηθεί η δραστηριότητα Δ.19 του ΑΠΣ.

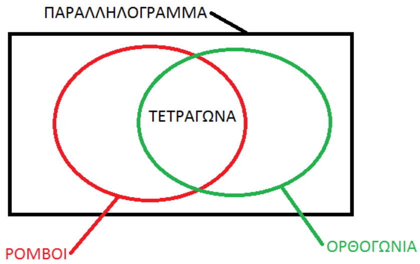
Προτεινόμενη εργασία:

Να επιλέξετε ένα από τα κριτήρια που καθιστούν ένα τετράπλευρο, παραλληλόγραμμο.
Θεωρώντας το κριτήριο που επιλέξατε ως ορισμό, να αποδείξετε τον παλιό ορισμό και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
[Σχόλιο: Με αυτή την εργασία, οι μαθητές διακρίνουν τον ορισμό από τις ιδιότητες και τα κριτήρια και εξετάζουν το ισοδύναμο μεταξύ ορισμού και κριτηρίου]

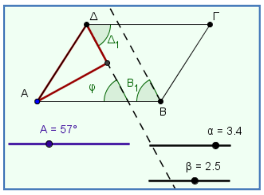
§5.3 - §5.5 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Να επισημανθεί ότι κάθε ένα από τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του ορθογωνίου ή του ρόμβου ή του τετραγώνου αντίστοιχα. Επιδιώκεται οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) με βάση τα αντίστοιχα κριτήρια και όχι με βάση κάποια πρότυπα σχήματα που συνδέονται με την οπτική γωνία που τα κοιτάμε. Να δοθεί έμφαση στην ταξινόμηση των παραλληλογράμμων με βάση τις ιδιότητές τους (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 1) στην άρση της παρανόησης που δημιουργείται σε μαθητές, ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν: αν ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο και αν ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος, καθώς και να αξιοποιήσουν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων (δραστηριότητες Δ.20, Δ.21 και Δ.22 του ΑΠΣ).

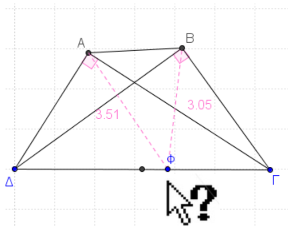
<ins>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</ins>:
Να δημιουργήσετε διαγραμματική αναπαράσταση της ταξινομίας των παραλληλογράμμων (π.χ. με χρήση εννοιολογικού χάρτη, διαγράμματος Venn).



<ins>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</ins>:
Η άσκηση εμπέδωσης 3 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να υλοποιηθεί πιο διερευνητικά με το μικροπείραμα «Τι σχήμα δημιουργούν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός παραλληλογράμμου;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. Με τη βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές μεταβάλλουν τις γωνίες και τις πλευρές ενός παραλληλογράμμου για να δημιουργήσουν την εικασία σχετικά με το σχήμα που δημιουργείται από τις διχοτόμους, ενώ στη συνέχεια αποδεικνύουν την εικασία αυτή. http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5825



§5.6 – §5.9 (Να διατεθούν 5 ώρες)
Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να εικάσουν σε ποια γραμμή ανήκουν τα σημεία που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι η μεσοπαράλληλή τους είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Προτείνεται, επίσης, η διαπραγμάτευση της Εφαρμογής 1 της σελ. 106. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν τα είδη των τριγώνων που το ορθόκεντρο είναι μέσα ή έξω από το τρίγωνο. Θα μπορούσαν να αναζητηθούν εναλλακτικές αποδείξεις για τα θεωρήματα που αφορούν στις ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου.
Προτείνεται η απόδειξη του θεωρήματος της παραγράφου 5.7 να αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην τάξη με στόχο την ανάδειξη των μεθοδολογικών στοιχείων της.



<ins>Ενδεικτική δραστηριότητα</ins>:
Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά το μικροπείραμα «Η σχέση της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με την διάμεσο που αντιστοιχεί σ’ αυτήν και επίλυση προβλημάτων με τη σχέση αυτή». http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5781

§5.10, §5.11 (Να διατεθούν 5 ώρες)
Εκτός από το συγκεκριμένο αντικείμενο των παραγράφων αυτών, προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων που συνδυάζουν γεωμετρικά θέματα από όλο το κεφάλαιο. Προτείνεται επίσης να συζητηθεί με τους μαθητές η ταξινόμηση των τετραπλεύρων του σχολικού βιβλίου (σελ. 125) και, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού, η συσχέτιση με άλλες ταξινομήσεις όπως αναφέρονται στο ιστορικό σημείωμα των σελ. 123, 124.

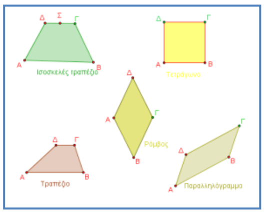
Κεφάλαιο 6ο (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§6.1 – §6.3 (Να διατεθούν 2 ώρες)
Στόχος είναι οι μαθητές να χρησιμοποιούν τη σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας σε επίλυση προβλημάτων, καθώς και να αναγνωρίζουν ως ορθές τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο. Επίσης να χρησιμοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος της §6.3 (γωνία χορδής και εφαπτομένης).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Να βρείτε το μέτρο της γωνίας δύο τεμνουσών ευθειών κύκλου, συναρτήσει των οριζομένων από αυτές τόξων κύκλου (προτείνεται η δραστηριότητα να υλοποιηθεί σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας).

§6.4 – §6.6 (Να διατεθούν 5 ώρες)
Να γίνει απλή αναφορά στην παράγραφο 6.4 (τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία).
Προτείνεται, ως εισαγωγή στο πρόβλημα εγγραψιμότητας ενός τετραπλεύρου σε κύκλο, οι μαθητές να διερευνήσουν ποια από τα γνωστά τετράπλευρα (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο) είναι εγγράψιμα, βασιζόμενοι στις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων (π.χ., ο ρόμβος δεν είναι εγγράψιμος σε κύκλο, γιατί αν ήταν εγγράψιμος θα έπρεπε να έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές). Η διερεύνηση θα μπορούσε να επεκταθεί και σε τυχαία τετράπλευρα (και με τη βοήθεια λογισμικού), ώστε οι μαθητές να εικάσουν τα κριτήρια εγγραψιμότητας.
Επίσης, στόχος είναι οι μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ των θεωρημάτων που ισχύουν για τα εγγράψιμα τετράπλευρα και στα κριτήρια, που πρέπει να ισχύουν, ώστε να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο (ενδεικτική δραστηριότητα 1).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Η. Σχεδιάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ, ΕΖ και ΖΔ.
(α) Να βρείτε τα εγγράψιμα τετράπλευρα που σχηματίζονται.
(β) Να αποδείξετε ότι τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ.



Ενδεικτική (ψηφιακή) δραστηριότητα 2:
Η ερώτηση κατανόησης 6 προτείνεται να διερευνηθεί με το μικροπείραμα «Εγγράψιμα τετράπλευρα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2264

και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.
Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

Γεωμετρία Α΄ Τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου

Η Διδακτέα ύλη καθώς και η διαχείριση της ταυτίζεται με αυτή της Α΄ Τάξης του Ημερήσιου ΓΕΛ .

Άλγεβρα Β΄ Τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου

Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου»

Κεφ.5ο: Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

5.2 Αριθμητική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου)

5.3 Γεωμετρική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου)

Κεφ.6ο: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

6.3 Η Συνάρτηση f(x)= αx+β (εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής)

Κεφ.7ο: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x)= \alpha x^2$

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x)= \alpha x^2+\beta x+\gamma$

ΙΙ, Διαχείριση διδακτέας ύλης

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8–6–2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php]

Κεφάλαιο 5ο

(Προτείνεται να διατεθούν 15 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

§5.1 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών με το συμβολισμό (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας α, αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό α_1 που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής), δεδομένου ότι αυτός δυσκολεύει τους μαθητές (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ).

§5.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

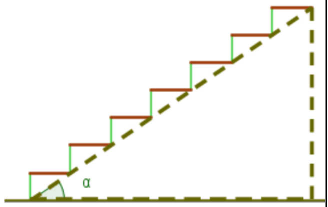
Αρχικά οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. η δραστηριότητα Δ.17 του ΑΠΣ). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το ν-οστό όρο με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν στα γενικά συμπεράσματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ χωρίς τα ερωτήματα γ και δ). Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως η άσκηση 12 της Α΄ Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου δεν θα διδαχθεί.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ας φτιάξουμε μια σκάλα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην κατανόηση των εννοιών της αριθμητικής προόδου.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5155



§5.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ' αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.19 (χωρίς τα ερωτήματα δ και ε) και Δ.21 (χωρίς το ερώτημα δ) του ΑΠΣ, που στόχο έχουν να αντιληφθούν οι μαθητές κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του ν-στού όρου γεωμετρικής προόδου. Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δεν θα διδαχθεί

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα 12α γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21αγενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσαρεστήθηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα 15α και στα 21α γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

Κεφάλαιο 6^{ο}

(Προτείνεται να διατεθούν 18 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως)μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών. Η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών με επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων για την εύρεση του πεδίου ορισμού δεν βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Οι έννοιες «κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης», «μονοτονία – ακρότατα - συμμετρίες συνάρτησης», δεν συμπεριλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη, όπως αναπτύσσονται στις παραγράφους 6.4 και 6.5. Οι έννοιες αυτές θα μελετηθούν στις ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων της μορφής: $f(x)=\alpha x+\beta$ (§6.3), $f(x)=\alpha x^2$ (§7.1) και $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (§7.3). Ειδικότερα:

§6.1 - §6.2 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ.22, Δ.23 και Δ.24 του ΑΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση), στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) και στην ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος). Ο τυπικός ορισμός της μονοτονίας θα συζητηθεί στην Β τάξη. Μπορεί όμως κατά την κρίση του διδάσκοντα να εισαχθούν διαισθητικά οι έννοιες της μονοτονίας και ακρότατων και να γίνει η αναγνώριση τους σε γραφικές παραστάσεις. Οι έννοιες αυτές δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη.

Τονίζεται ότι ο τύπος της απόστασης δύο σημείων αποτελεί μία άλλη έκφραση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με όρους συντεταγμένων, ανακαλεί τις έννοιες των παραγράφων 2.3 και 2.4 . και προσφέρεται για υπολογισμούς. Επισημαίνεται ότι:

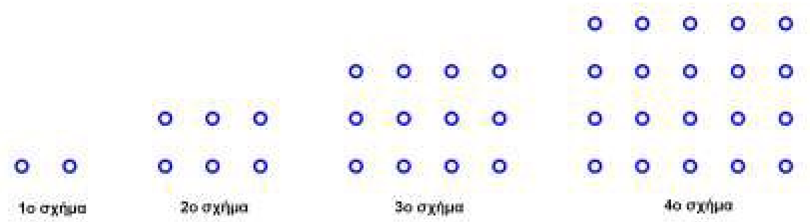
Α) Η απόδειξη του τύπου δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης και ως εφαρμογές του θα διδαχθούν οι ασκήσεις 4 και 5 .

Β) Δεν θα διδαχθεί η εφαρμογή της σελίδας 155

Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.15 και Δ.26 του ΑΠΣ

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

i) Ποιόν κανόνα πρέπει να εφαρμόσουμε για να υπολογίσουμε από πόσα σημεία θα αποτελείται το 7ο σχήμα ;



ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το 27ο σχήμα **;**

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

Αν με Δ παραστήσουμε μια δόση αμπικιλλίνης (η αμπικιλλίνη είναι μια χημική ουσία χρησιμοποιείται για τη θεραπεία αναπνευστικών λοιμώξεων) σε χιλιοστόγραμμα και με W παραστήσουμε το βάρος παιδιού σε κιλά, τότε η εξίσωση Δ = 50W δίνει έναν κανόνα για την εύρεση της μέγιστης ασφαλούς ημερήσιας δόσης του φαρμάκου της αμπικιλλίνης για παιδιά που ζυγίζουν λιγότερο από 10 κιλά.

α) Η εξίσωση εκφράζει συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Ποιες είναι οι λογικές επιλογές για ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή;

γ) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση.

§6.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας ψ=αx+β στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της f(x)=αx+β, ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα y'y στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να καταλήξουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία της συνάρτησης και να τα εκφράσουν συμβολικά, καθώς και να διερευνήσουν το ρόλο της παραμέτρου α σε σχέση με αυτά (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.27 του ΑΠΣ).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

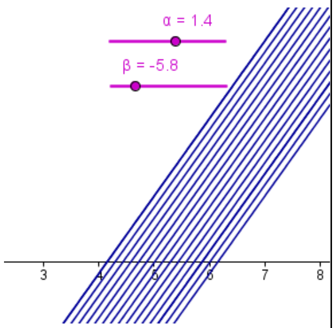
βi) Αν *x* είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$

βii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος (βi), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Ο ρόλος των συντελεστών στην y=αx+β» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στη συνάρτηση f(x)= αx+β μέσω της διερεύνησης του ρόλου κάθε συντελεστή στο σχηματισμό της ευθείας y=αx+β και ερμηνείας της σχέσης των μελών της κάθε μιας από τις δυο οικογένειες ευθειών, για α σταθερό και β μεταβαλλόμενο και αντίστροφα.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1774

Κεφάλαιο 7ο

(Προτείνεται να διατεθούν 17 διδακτικές ώρες)

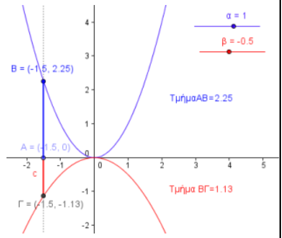
Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν τη συνάρτηση $ψ=αx^2$ και τις ιδιότητές της. Επίσης, με αφετηρία την $ψ=αx^2$, κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx^2 + βx + γ$ την οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούν για να μελετήσουν ιδιότητες της f. Ειδικότερα:

§7.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές χρησιμοποιούν πίνακες τιμών και λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $ψ=αx^2$. Μέσα από την παρατήρηση της γραφικής παράστασης και των τιμών διερευνούν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες των συναρτήσεων $g(x)=x^2$ και $h(x)=-x^2$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης γενικεύουν τα παραπάνω συμπεράσματα για τη συνάρτηση $f(x)=αx^2$ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ. 29 του ΑΠΣ ή η χρήση λογισμικού) και τα εκφράζουν συμβολικά.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

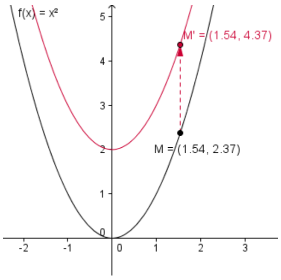
Το μικροπείραμα « Οι μεταβολές της συνάρτησης $ψ=αx^2$» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά για τη μελέτη μονοτονίας της συνάρτησης $ψ=αx^2$ όταν α>0 ή α<0.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1729

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Μετατοπίσεις της $ψ=αx^2$» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά από τους μαθητές για την οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της $ψ=αx^2$ αλλά και την εύρεση του τύπου της στη νέα θέση και να πειραματιστούν για τον συνδυασμό των δύο παραπάνω μετατοπίσεων.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1748

§7.3 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Να δοθεί έμφαση στη χάραξη και διερεύνηση της γραφικής παράστασης συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής $f(x)=αx^2+βx+γ$ και στη διαισθητική μελέτη της μονοτονίας, των ακρότατων και της συμμετρίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Η γενίκευση των παραπάνω εννοιών θα διδαχτούν στην Β Λυκείου.

Ειδικότερα, όσον αφορά στη χάραξη της γραφικής παράστασης και στη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$, η ιδέα που βρίσκεται και πίσω από τη δραστηριότητα Δ.30 του ΑΠΣ είναι η εξής: Οι μαθητές χρησιμοποιούν είτε πίνακες τιμών είτε λογισμικό για να χαράξουν τη γραφική παράσταση της $ψ=αx^2+κ$ και να την συγκρίνουν με την $ψ=αx^2$, ομοίως για την $ψ=α(x+λ)^2$ και τελικά για την $ψ=α(x+λ)^2+κ$. Με αυτόν τον τρόπο εισάγονται διαισθητικά στις μετατοπίσεις, τις οποίες θα γενικεύσουν στην Β Λυκείου. Αν χρησιμοποιηθεί λογισμικό, οι μαθητές μπορούν αφού χαράξουν τη γραφική παράσταση της $g(x)=αx^2$ για διάφορες τιμές του α να την μετατοπίσουν κ μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του κ (π.χ. κατά 3 μονάδες αριστερά, κατά 4 μονάδες δεξιά) και να παρατηρήσουν τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια να μετατοπίσουν λ μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του λ (π.χ. κατά 2 μονάδες κάτω, κατά 5 μονάδες πάνω) και να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα προκύψει θα είναι της μορφής $f(x)=\alpha(x+\kappa)^2+\lambda$.

Τέλος, δίνονται στους μαθητές συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και εκείνοι προσπαθούν, με κατάλληλες μετατοπίσεις της $g(x)=\alpha x^2$, να οδηγηθούν στη γραφική παράσταση της f. Στη συνέχεια μελετούν, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, ιδιότητες της f και επεκτείνουν τα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της $g(x) = \alpha x^2$ στην $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Επίσης, να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων των §3.3 και §4.2(ρίζες και πρόσημο τριωνύμου) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.32 του ΑΠΣ). Διδακτικά έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να σχεδιαστούν οι έξι βασικές περιπτώσεις που αφορούν στις τιμές της διακρίνουσας ($\Delta>0$, $\Delta=0$ και $\Delta<0$) συνδυαζόμενες με το πρόσημο του α ($\alpha>0$, $\alpha<0$) ώστε οι μαθητές να συνδέσουν τη γραφική παράσταση με τα αλγεβρικά συμπεράσματα που ήδη χρησιμοποιούν

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

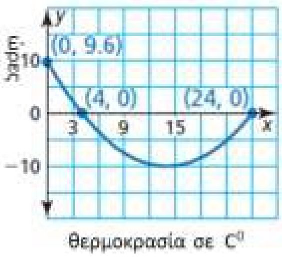
α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων: $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=(x-3)^2$, $g(x)=(x+3)^2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\varphi(x)=x^2$					0				
$f(x)=(x-3)^2$								0	
$g(x)=(x+3)^2$		0							

β) Με βάση τον παραπάνω πίνακα τιμών, να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *φ, f* και *g.*

γ)Ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της *φ*, δίνει τη γραφική παράσταση της *f* και ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της *φ* δίνει τη γραφική παράσταση της *g.*

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:



Ένας μετεωρολόγος δημιούργησε την διπλανή παραβολή για να παρουσιάσει τη θερμοκρασία μιας πόλης μια συγκεκριμένη ημέρα του έτους, όπου το x είναι ο αριθμός ωρών μετά τα μεσάνυχτα και το y είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου).

α) Βρείτε τη συνάρτηση f που αντιστοιχεί στην παραπάνω γραφική παράσταση.

β) Ποια είναι η πιο κρύα θερμοκρασία την ημέρα εκείνη;

Σημείωση: Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ Τάξη Εσπερινού ΓΕΛ

Ι. ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ., Σίδερη Π.

Κεφ.5ο: Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

5.1. Εισαγωγή
5.2. Παραλληλόγραμμα
5.3. Ορθογώνιο
5.4. Ρόμβος
5.5. Τετράγωνο
5.6. Εφαρμογές στα τρίγωνα (εκτός της απόδειξης του Θεωρήματος ΙΙΙ)
5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
5.8. Το ορθόκεντρο τριγώνου (Χωρίς το Πόρισμα).
5.9. Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου
5.10. Τραπέζιο
5.11. Ισοσκελές τραπέζιο

Κεφ.6ο: Εγγεγραμμένα σχήματα

6.1. Εισαγωγικά – Ορισμοί
6.2. Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης (Εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
6.3. Γωνία χορδής και εφαπτομένης (Εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
6.4. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο –Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία.
6.5. Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο
6.6. Το εγγράψιμο τετράπλευρο (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

ΙΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8–6–2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php]

Κεφάλαιο $5^{ο}$ (Προτείνεται να διατεθούν 35 διδακτικές ώρες)

§5.1, §5.2 (Να διατεθούν 4 ώρες)

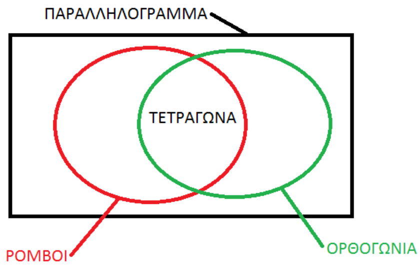
Να επισημανθεί ότι καθένα από τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του παραλληλογράμμου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν αν ένα τετράπλευρο με τις δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και τις άλλες δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο. Για την εφαρμογή των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων μπορεί να αξιοποιηθεί η δραστηριότητα Δ.19 του ΑΠΣ.

<u>Προτεινόμενη εργασία</u>:
Να επιλέξετε ένα από τα κριτήρια που καθιστούν ένα τετράπλευρο, παραλληλόγραμμο.
Θεωρώντας το κριτήριο που επιλέξατε ως ορισμό, να αποδείξετε τον παλιό ορισμό και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
[Σχόλιο: Με αυτή την εργασία, οι μαθητές διακρίνουν τον ορισμό από τις ιδιότητες και τα κριτήρια και εξετάζουν το ισοδύναμο μεταξύ ορισμού και κριτηρίου]

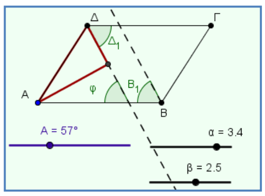
§5.3 - §5.5 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Να επισημανθεί ότι κάθε ένα από τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του ορθογωνίου ή του ρόμβου ή του τετραγώνου αντίστοιχα. Επιδιώκεται οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) με βάση τα αντίστοιχα κριτήρια και όχι με βάση κάποια πρότυπα σχήματα που συνδέονται με την οπτική γωνία που τα κοιτάμε. Να δοθεί έμφαση στην ταξινόμηση των παραλληλογράμμων με βάση τις ιδιότητές τους (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 1) στην άρση της παρανόησης που δημιουργείται σε μαθητές, ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν: αν ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο και αν ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος, καθώς και να αξιοποιήσουν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων (δραστηριότητες Δ.20, Δ.21 και Δ.22 του ΑΠΣ).

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</u>:
Να δημιουργήσετε διαγραμματική αναπαράσταση της ταξινομίας των παραλληλογράμμων (π.χ. με χρήση εννοιολογικού χάρτη, διαγράμματος Venn).

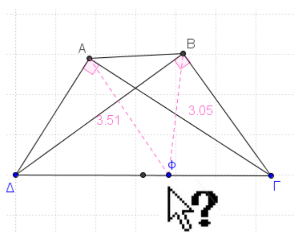


<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</u>:
Η άσκηση εμπέδωσης 3 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να υλοποιηθεί πιο διερευνητικά με το μικροπείραμα «Τι σχήμα δημιουργούν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός παραλληλογράμμου;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. Με τη βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές μεταβάλλουν τις γωνίες και τις πλευρές ενός παραλληλογράμμου για να δημιουργήσουν την εικασία σχετικά με το σχήμα που δημιουργείται από τις διχοτόμους, ενώ στη συνέχεια αποδεικνύουν την εικασία αυτή.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5825



§5.6 – §5.9 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να εικάσουν σε ποια γραμμή ανήκουν τα σημεία που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι η μεσοπαράλληλή τους είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Προτείνεται, επίσης, η διαπραγμάτευση της Εφαρμογής 1 της σελ. 106. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν τα είδη των τριγώνων που το ορθόκεντρο είναι μέσα ή έξω από το τρίγωνο. Θα μπορούσαν να αναζητηθούν εναλλακτικές αποδείξεις για τα θεωρήματα που αφορούν στις ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου.
Προτείνεται η απόδειξη του θεωρήματος της παραγράφου 5.7 να αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην τάξη με στόχο την ανάδειξη των μεθοδολογικών στοιχείων της.



Ενδεικτική δραστηριότητα:
Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά το μικροπείραμα «Η σχέση της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με την διάμεσο που αντιστοιχεί σ' αυτήν και επίλυση προβλημάτων με τη σχέση αυτή». http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5781

§5.10, §5.11 (Να διατεθούν 5 ώρες)
Εκτός από το συγκεκριμένο αντικείμενο των παραγράφων αυτών, προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων που συνδυάζουν γεωμετρικά θέματα από όλο το κεφάλαιο. Προτείνεται επίσης να συζητηθεί με τους μαθητές η ταξινόμηση των τετραπλεύρων του σχολικού βιβλίου (σελ. 125) και, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού, η συσχέτιση με άλλες ταξινομήσεις όπως αναφέρονται στο ιστορικό σημείωμα των σελ. 123, 124.

Κεφάλαιο 6^{ο} (Προτείνεται να διατεθούν 15 διδακτικές ώρες)

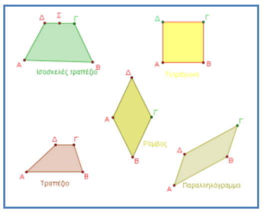
§6.1 – §6.3 (Να διατεθούν 2 ώρες)
Στόχος είναι οι μαθητές να χρησιμοποιούν τη σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας σε επίλυση προβλημάτων, καθώς και να αναγνωρίζουν ως ορθές τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο. Επίσης να χρησιμοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος της §6.3 (γωνία χορδής και εφαπτομένης).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Να βρείτε το μέτρο της γωνίας δύο τεμνουσών ευθειών κύκλου, συναρτήσει των οριζομένων από αυτές τόξων κύκλου (προτείνεται η δραστηριότητα να υλοποιηθεί σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας).

§6.4 – §6.6 (Να διατεθούν 5 ώρες)
Να γίνει απλή αναφορά στην παράγραφο 6.4 (τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία).
Προτείνεται, ως εισαγωγή στο πρόβλημα εγγραψιμότητας ενός τετραπλεύρου σε κύκλο, οι μαθητές να διερευνήσουν ποια από τα γνωστά τετράπλευρα (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο) είναι εγγράψιμα, βασιζόμενοι στις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων (π.χ., ο ρόμβος δεν είναι εγγράψιμος σε κύκλο, γιατί αν ήταν εγγράψιμος θα έπρεπε να έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές). Η διερεύνηση θα μπορούσε να επεκταθεί και σε τυχαία τετράπλευρα (και με τη βοήθεια λογισμικού), ώστε οι μαθητές να εικάσουν τα κριτήρια εγγραψιμότητας.
Επίσης, στόχος είναι οι μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ των θεωρημάτων που ισχύουν για τα εγγράψιμα τετράπλευρα και στα κριτήρια, που πρέπει να ισχύουν, ώστε να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο (ενδεικτική δραστηριότητα 1).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Η. Σχεδιάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ, ΕΖ και ΖΔ.
(α) Να βρείτε τα εγγράψιμα τετράπλευρα που σχηματίζονται.
(β) Να αποδείξετε ότι τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ.

Ενδεικτική (ψηφιακή) δραστηριότητα 2:
Η ερώτηση κατανόησης 6 προτείνεται να διερευνηθεί με το μικροπείραμα «Εγγράψιμα τετράπλευρα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2264



και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.
Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.

Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

Άλγεβρα Β΄ Τάξης Ημερήσιου και Γ΄τάξη Εσπερινού Γενικού Λυκείου

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου»

Κεφ. 1ο: Γραμμικά Συστήματα

1.1 Γραμμικά Συστήματα (χωρίς τις αποδείξεις των συμπερασμάτων της υποπαραγράφου « Λύση- Διερευνηση γραμμικού συστήματος 2χ2)

1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

Κεφ.2ο: Ιδιότητες Συναρτήσεων

2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης

2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

Κεφ. 3ο: Τριγωνομετρία

3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες (χωρίς την απόδειξη της ταυτότητας 4)

3.3 Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων)

3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων)

Κεφ. 4ο: Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις

4.1 Πολυώνυμα

4.2 Διαίρεση πολυωνύμων

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

Κεφ. 5ο: Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

5.1 Εκθετική συνάρτηση

5.2 Λογάριθμοι (χωρίς την απόδειξη του τύπου αλλαγής βάσης)

5.3 Λογαριθμική συνάρτηση (να διδαχθούν μόνο οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση το 10 και το e).

ΙΙ.Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php]

Πριν την έναρξη της διδασκαλίας της ύλης της Β Τάξης ΓΕΛ , προτείνεται να διατεθούν έως 5 διδακτικές ώρες για επανάληψη – ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης της Α΄ Λυκείου από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου».
Στη συνέχεια θα ακολουθήσει η διδασκαλία της ύλης της Β Λυκείου

Κεφάλαιο 1ο

(Προτείνεται να **διατεθούν 4 διδακτικές ώρες**)

§1.1. Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Από το γυμνάσιο είναι γνωστή η έννοια των γραμμικών συστημάτων 2Χ2, η γραφική επίλυσή τους και η αλγεβρική επίλυση με τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Με τη μέθοδο των οριζουσών να γίνουν μόνο αριθμητικά παραδείγματα.

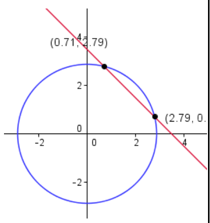
§1.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Προτείνεται η επίλυση απλών μη γραμμικών συστημάτων με 2 αγνώστους, καθώς και η έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις 4 και 5 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Εισαγωγή στα μη γραμμικά συστήματα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εισαχθούν στην έννοια του μη γραμμικού συστήματος και να πειραματιστούν με τις διάφορες τιμές των παραμέτρων του.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5281



Κεφάλαιο 2ο

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

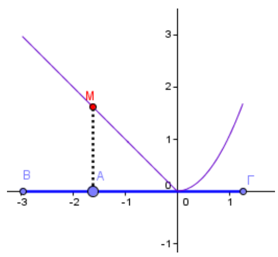
§2.1 και 2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές μελέτησαν την $f(x)=αx^2+βx+γ$, μέσω μετατοπίσεων της $g(x)=αx^2$ και εξέτασαν τη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής. Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται οι γενικοί ορισμοί των παραπάνω εννοιών και εξετάζονται αυτές και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών παραστάσεών τους. Η έμφαση πρέπει να δοθεί στη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών της μονοτονίας, των ακροτάτων και της άρτιας – περιττής και στη σύνδεση της γεωμετρικής ερμηνείας με την αλγεβρική έκφραση.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα « Συμμεταβολή σημείων - Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή σημείων και διερεύνηση των ιδιοτήτων της συμμεταβολής των δύο σημείων, της μονοτονίας και των ακρότατων.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5226



Κεφάλαιο 3ο

(Προτείνεται να διατεθούν 25 διδακτικές ώρες)

§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές στο γυμνάσιο έχουν συναντήσει και ασχοληθεί με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και αμβλείας γωνίας. Το καινούργιο εδώ είναι η εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών. Επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο στηρίζονται όλες οι έννοιες και οι ιδιότητες που μελετώνται στη συνέχεις, έμφαση πρέπει να δοθεί στην κατανόηση και συνεχή χρήση του. Επίσης, να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και στην «κατάληξη» της τελικής πλευράς μιας γωνίας πάνω σε αυτόν.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία, με $0° \leq \omega < 360°$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

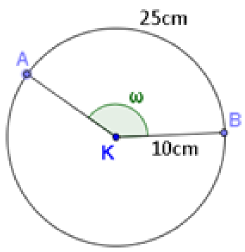
β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $0° \leq \varphi < 360°$, που ικανοποιούν τη σχέση $\eta\mu\varphi = -\frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Ενδεικτική δραστηριότητα2:

Δίνεται ο κύκλος του σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 25 cm και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.

α) Να βρείτε το μέτρο της ω σε rad.

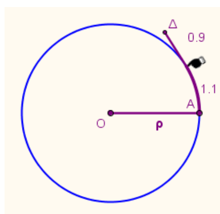
β) Να δικαιολογήσετε ότι το συνημίτονο της γωνίας ω είναι αρνητικό.



Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Τι είναι το ακτίνιο;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την κατανόηση της έννοιας του ακτινίου και τη σύνδεση μεταξύ της μέτρησης γωνιών σε μοίρες και ακτινίων στον τριγωνομετρικό κύκλο.

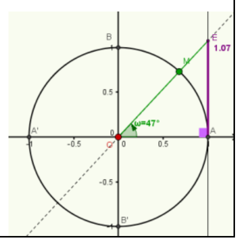
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5272



Ενδεικτική δραστηριότητα 4:

Με το μικροπείραμα «Ο τριγωνομετρικός κύκλος» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές εισάγονται στον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου και των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5140



§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Ο στόχος της παραγράφου είναι η κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών και για αυτό οι μαθητές θα πρέπει να εμπλακούν με απλές ασκήσεις υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών όταν είναι γνωστός ο ένας και απλές αποδείξεις σχέσεων. Να γίνει επιλογή από τις ασκήσεις 1-6 και από τις 10-13 της Α΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Υπάρχει γωνία ϑ με $\eta\mu\vartheta = \frac{1}{4}$ και $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{3}{4}$;

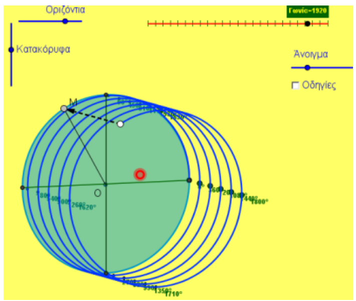
β) Υπάρχει γωνία ϑ με $\eta\mu\vartheta = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\vartheta = -\frac{4}{5}$;

Αν όχι, αιτιολογήστε. Αν ναι, να σχεδιάσετε μια τέτοια γωνία πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Πόσες τέτοιες γωνίες μεταξύ 0° και 360° υπάρχουν;

§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες

Η ανάδειξη του τριγωνομετρικού κύκλου σε (δηλαδή του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών) στο βασικό εργαλείο αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο μπορεί να αντικαταστήσει την απομνημόνευση τύπων και την αναπαραγωγή κανόνων χωρίς νόημα. Αυτό μπορεί να γίνει αν ενθαρρυνθούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις συμμετρίες σε νοητό τριγωνομετρικό κύκλο. Προτείνεται να μη δοθούν προς λύση οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας. Οι ερωτήσεις κατανόησης I και II μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συζητηθούν και να διευκρινιστούν πτυχές των προηγούμενων ενοτήτων της τριγωνομετρίας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:



Με το μικροπείραμα «Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που ανάγονται στο 2ο τεταρτημόριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές βρίσκουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που η προβολή τους στον πρώτο κύκλο είναι στο δεύτερο τεταρτημόριο. Με τη βοήθεια του λογισμικού μέσω πολλαπλών δυναμικά αλληλοσυνδεόμενων γεωμετρικών αναπαραστάσεων, οι μαθητές βρίσκουν στην αριθμογραμμής μια συγκεκριμένη γωνία που ξεπερνά τον πρώτο κύκλο και βλέπουν την γεωμετρική της αναπαράσταση πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Στη συνέχεια, μπορούν να δουν το τόξο αυτό στο χώρο, βρίσκουν την προβολή του στον πρώτο κύκλο και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής, αφού την αναγάγουν σε γωνία του πρώτου τεταρτημορίου. Τέλος, εφαρμόζουν τη στρατηγική αυτή και σε άλλες γωνίες.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5275

§3.4 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Η έννοια της περιοδικότητας, που συνδέεται άμεσα με φαινόμενα της καθημερινής ζωής, είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες που θα διδαχτούν οι μαθητές στη Β Λυκείου. Θα πρέπει λοιπόν να δοθεί έμφαση σε αυτή την ιδιότητα μέσα από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις. Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορεί να στηριχτεί στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Πρέπει να επισημανθεί ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εκφράζει τόξο μετρημένο σε ακτίνια και όχι σε μοίρες. Αφού συζητηθούν τα παραδείγματα του σχολικού βιβλίου, να τονισθούν τα συμπεράσματα που περιέχονται στο Σχόλιο της σελίδας 81.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1, 3, 4, 5, 6 και 7 της Α΄ Ομάδας και 1, 2 και 3 της Β΄ Ομάδας.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

Μία ρόδα ακτίνας 1 περιστρέφεται με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού έτσι ώστε, κάθε σημείο της περιφέρειάς της, να διαγράφει σε ένα δευτερόλεπτο τόξο ενός ακτινίου. Τοποθετούμε τη ρόδα σε ένα σύστημα αξόνων με αρχή στο κέντρο της O και θεωρούμε ένα σημείο της *P*, το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στο σημείο (1,0).

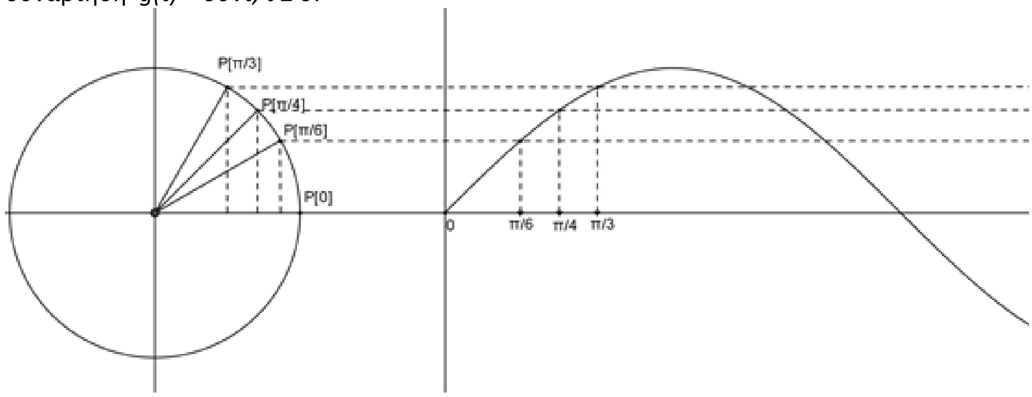
α) Να εξηγήσετε γιατί, το ύψος του σημείου *P* σε σχέση με τον άξονα *x'x*κάθε χρονική στιγμή *t* (σε sec) , $t \geq 0$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = ημt,\ t \geq 0$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t)$ στο διάστημα [0, 4π].

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές *t* με $0 \leq t \leq 4π$ κατά τις οποίες το σημείο *P* βρίσκεται στο μεγαλύτερο και στο μικρότερο δυνατό ύψος.

δ) Να προσδιορίσετε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ 0 και 4π sec κατά τα οποία το ύψος του σημείου *P* είναι μεγαλύτερο του 0,5.

ε) Θεωρούμε τώρα το σημείο *K* της ρόδας, το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στη θέση (0,1). Να δείξετε ότι το ύψος του σημείου *K* κάθε χρονική στιγμή *t* sec δίνεται από τη συνάρτηση $g(t) = συνt,\ t \geq 0$.



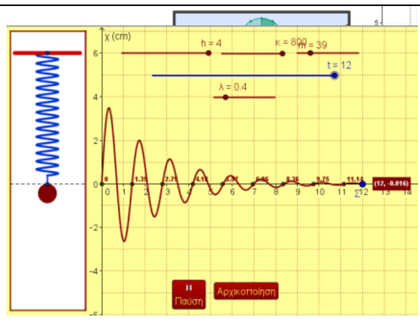
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

Με το μικροπείραμα «Περιοδικά φαινόμενα: Η παλίρροια» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία (άσκηση 2, Β΄ ομάδας), οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης μελετούν το φαινόμενο της παλίρροιας και αναζητούν απαντήσεις, με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5165

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 3:</u>

Με το μικροπείραμα «Περιοδικές συναρτήσεις - Το ελατήριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των περιοδικών συναρτήσεων. Επίσης, πειραματίζονται με ένα ελατήριο και αναζητούν απαντήσεις με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5208

§3.5 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις είναι ένα σημαντικό αλγεβρικό εργαλείο και είναι το πρώτο είδος μη πολυωνυμικών εξισώσεων που συναντούν οι μαθητές. Η ερμηνεία των τύπων λύσεων πρέπει να στηριχτεί τόσο στον τριγωνομετρικό κύκλο όσο και στη γραφική παράσταση των αντίστοιχων συναρτήσεων.

Προτείνεται να μη γίνουν η άσκηση 11(ii) της Α΄ Ομάδας και όλες οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία ω (σε rad), με $0 \le ω < 2π$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: ημω = $\frac{1}{2}$ και συνω > 0.

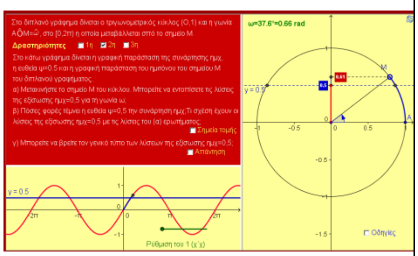
Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $0 \le φ < 2π$, που ικανοποιούν τη σχέση ημφ = $\frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

γ) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης ημx=$\frac{1}{2}$, x∈ℝ.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Η εξίσωση ημx=α» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές βρίσκουν τις λύσεις μιας συγκεκριμένης εξίσωσης στον τριγωνομετρικό κύκλο και μέσω πολλαπλών δυναμικά αλληλοσυνδεόμενων γεωμετρικών και γραφικών αναπαραστάσεων, γενικεύουν τις λύσεις αυτές σ' όλο το R. Στη συνέχεια δημιουργούν τις δικές τους εξισώσεις και τις λύνουν επαληθεύοντας ταυτόχρονα τις λύσεις τους γραφικά.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5141

§3.6- &3.7: Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Η διδασκαλία της παραγράφου 3.6 να περιορισθεί σε απλές εφαρμογές των τύπων μέσα από λίγες και απλές ασκήσεις Α ομάδας. Από την παράγραφο 3.7 να διδαχτούν μόνο οι τύποι (1), (2), (3) ως εφαρμογές της παραγράφου 3.6, και να μην γίνουν ασκήσεις. Να μη διδαχτούν οι τύποι (4), (5) και (6) (τύποι αποτετραγωνισμού).

Κεφάλαιο 4ο

(Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)

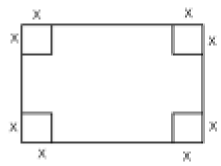
Όλη η διδασκαλία των πολυωνύμων θα πρέπει να εμπλουτιστεί – αν όχι να εστιαστεί – με την συναρτησιακή προσέγγιση των πολυωνύμων. Αυτή η προσέγγιση α) θα παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα πρόσβασης σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις (όπως είναι η γραφική παράσταση συνάρτησης) που μπορούν να βοηθήσουν στην απόδοση νοήματος και την κατανόηση και β) θα μειώσει το ρόλο αφηρημένων αλγεβρικών προσεγγίσεων των πολυωνύμων που δεν συνδέονται με την κατανόηση ούτε με την περαιτέρω διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών.

§4.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Προτείνεται να παρουσιαστούν (είτε με λογισμικό, είτε με έντυπη μορφή) οι γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων όπως οι $f(x)=x^3$, $f(x)=-x^3$, $f(x)=x^3-3x$, $f(x)=x^4-2x^2$, $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$. Στόχος είναι η παρατήρηση και ο σχολιασμός των ιδιοτήτων τους, των σημείων τομής με τους άξονες, των τμημάτων που βρίσκονται πάνω ή κάτω από τον άξονα των x, κοκ.

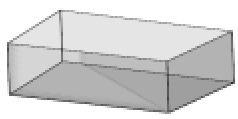
Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1 και 2, 5 και 6 της Α΄ Ομάδας και 2, 3 και 5 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:



Από ένα χαρτόνι διαστάσεων 20×30 εκατοστών κόβουμε τετράγωνα πλευράς *x* (όπως φαίνεται στο σχήμα) με σκοπό να κατασκευάσουμε ένα κουτί ανοικτό από πάνω.

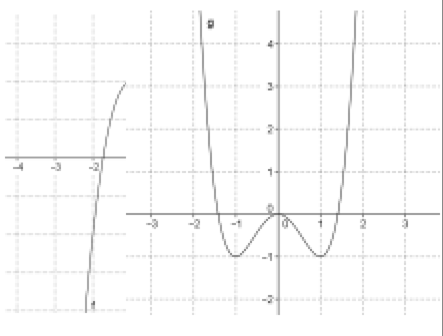
α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να εκφράζει τον όγκο του κουτιού. Τι τιμές μπορεί να πάρει το *x*;



β) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι όσο αυξάνεται το *x*, μειώνεται ο όγκος. Να φτιάξετε ένα πίνακα τιμών για να διαπιστώσετε αν ο Γιάννης έχει δίκιο.

γ) Να βρείτε (με προσέγγιση) πόσο πρέπει να είναι το *x* ώστε το κουτί να έχει το μέγιστο όγκο.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:



Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3-3x$ και $g(x)=x^4-2x^2$ χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα,

α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των *f* και *g*.

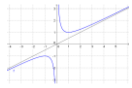
β) Είναι κάποια συνάρτηση άρτια ή περιττή;

γ) Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς *g*(–2), *g*(–0,5), *g*(0), *g*(1), *g*(1,5).

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$ και την ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x$ χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας.

Παρατηρώντας το σχήμα,



α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της *f*.

β) να εξετάσετε αν η *f* είναι άρτια ή περιττή.

γ) να βρείτε από τη γραφική παράσταση (κατά προσέγγιση) τις λύσεις της εξίσωσης *f(x) = 2*. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

δ) να εξετάσετε για ποιες τιμές του *c* η εξίσωση *f(x) = c* έχει λύσεις και πόσες. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) να εξετάσετε για ποιες τιμές του *α* η ευθεία *y = αx* τέμνει τη γραφική παράσταση της *f*.

στ) να βρείτε γραφικά και αλγεβρικά τις λύσεις της ανίσωσης $\dfrac{x^2+1}{2x}>\dfrac{1}{2}$

§4.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη χρήση των θεωρημάτων της υποπαραγράφου "Διαίρεση πολυωνύμου με x–ρ" και πιο συγκεκριμένα, στη μεταξύ τους σχέση και στη συνέπεια που έχουν για τη παραγοντοποίηση πολυωνύμου. Για το σχήμα Horner καλό είναι να εξηγηθεί η σχέση του με τους συντελεστές που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία της διαίρεσης (όπως στο εισαγωγικό παράδειγμα του σχολικού βιβλίου ή με άλλο αριθμητικό παράδειγμα)

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1 (i, iv), 2, 3 και 10 της Α΄ Ομάδας. Να μη γίνουν οι ασκήσεις 1, 2 και 5 της Β΄ Ομάδας.

§4.3 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Στην ενότητα αυτή εισάγονται νέα εργαλεία για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων μέσω της οποίας επιλύονται στη συνέχεια πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 2. Αν και οι ακέραιες ρίζες ενός τυχαίου πολυωνύμου δεν εμφανίζονται συχνά, παρόλα αυτά το θεώρημα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο. Ωστόσο, για τη λύση πολυωνυμικής εξίσωσης, έμφαση πρέπει να δοθεί στην προτεραιότητα της παραγοντοποίησης του αντίστοιχου πολυωνύμου.

Ο προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση είναι ένα χρήσιμο αριθμητικό εργαλείο που μπορεί να συνδεθεί με τον τρόπο που θα μπορούσε να προσδιορίσει κανείς μη ακέραια ρίζα αν είχε στη διάθεσή του κάποια υπολογιστική μηχανή. Κυρίως όμως, αυτή η μέθοδος, επειδή στηρίζεται στη γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Bolzano, υποστηρίζει την συναρτησιακή προσέγγιση και την οπτικοποίηση των σχετιζόμενων εννοιών.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα: Οι ασκήσεις 1, 4, 5, 6 και 8 της Α΄ Ομάδας και προβλήματα της Β΄ Ομάδας, τα οποία οδηγούν στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μια βιομηχανία έχει υπολογίσει ότι για την ημερήσια παραγωγή *x* μονάδων από ένα προϊόν έχει κόστος $K(x)=-2x^2+120x+100$ χιλιάδες ευρώ, ενώ η πώληση αυτών των *x*μονάδων της αποφέρει έσοδα $E(x)=x^3-x^2+20x$ χιλιάδες ευρώ. Η βιομηχανία μπορεί να παράξει μέχρι 20 μονάδες αυτού του προϊόντος καθημερινά.

α) Ποια παραγωγή δίνει έσοδα 20.000 ευρώ;

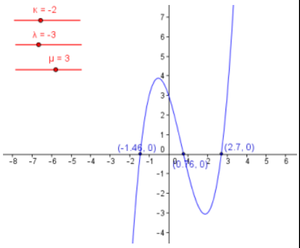
β) Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία για να έχει κέρδος;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^3 + 2x - 2 = 0$ έχει ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Να προσδιορίσετε αυτή τη ρίζα με προσέγγιση εκατοστού, χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης. Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να διαπιστώσετε αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 1 και 2;

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Με το μικροπείραμα «Πολυωνυμική εξίσωση 3ου βαθμού» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές διερευνούν τη σχέση των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης 3ου βαθμού, με τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της αντίστοιχης πολυωνυμικής συνάρτησης τέμνει τον οριζόντιο άξονα.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5229

§4.4 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Στην ενότητα αυτή επιλύονται εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές, όπως άρρητες και κλασματικές εξισώσεις και ανισώσεις. Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η ύψωση των μελών μιας εξίσωσης στο τετράγωνο δεν οδηγεί πάντα σε ισοδύναμη εξίσωση. Αυτό μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια των παρακάτω γραφικών παραστάσεων.

Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 3 και 4 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x+3} = x+1$ (E_1).

β) Να λύσετε την εξίσωση $x+3=(x+1)^2$ (E_2)

γ) Να εξηγήσετε γιατί η E_1 και η E_2 δεν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, αν και η E_2 προκύπτει από την E_1 αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της στο τετράγωνο.

δ) Να λύσετε γραφικά τις εξισώσεις του α) και του β) ερωτήματος.

Κεφάλαιο 5ο

(Προτείνεται να διατεθούν 22 διδακτικές ώρες)

§5.1 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

Η έννοια της εκθετικής μεταβολής που συνδέεται με σημαντικό φαινόμενα της πραγματικότητας, μπορεί να αποτελέσει την εισαγωγή στην εκθετική συνάρτηση. Αν και συχνά στα πραγματικά φαινόμενα που μελετάμε, οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι διακριτές (συχνά είναι φυσικοί αριθμοί), τέτοια φαινόμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μετάβαση στην εκθετική συνάρτηση, δηλαδή σε πεδίο ορισμού τους πραγματικούς. Η έμφαση στη διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης πρέπει να είναι στα προβλήματα και στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στα προβλήματα της Β΄ Ομάδας, με προτεραιότητα στις 6, 7 και 8.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Τα βακτήρια είναι πολύ μικροί, μονοκύτταροι οργανισμοί που είναι μακράν οι πιο πολυπληθείς οργανισμοί στη Γη, οι οποίοι αναπαράγονται μέσω μιας διεργασίας που ονομάζεται διχοτόμηση: ένα κύτταρο χωρίζεται στη μέση, σχηματίζοντας δύο "θυγατρικά κύτταρα". Ένα τέτοιο βακτήριο είναι η σαλμονέλα (salmonella), το οποίο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος 35 ° C διαιρείται κάθε ώρα και σχηματίζονται δυο άλλα βακτήρια.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια μερίδα τροφής υπάρχουν 100 βακτήρια σαλμονέλας και ότι η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι 35 ° C.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός βακτηρίων	100					

β) Να αποτυπώσετε τα δεδομένα του πίνακα με σημεία σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Η σχέση μεταξύ του αριθμού των βακτηρίων και χρόνου είναι γραμμική; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εκτιμήσετε το χρόνο που θα υπάρχουν α) 1200 βακτήρια , β) 4.550 βακτήρια και γ) περισσότερα από 7.200 βακτήρια στη μερίδα τροφής.

δ) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το πλήθος των βακτηρίων σαλμονέλας ως συνάρτηση του χρόνου . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;

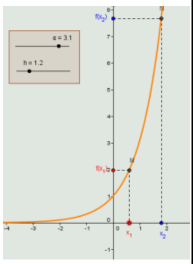
ε) Μπορούμε να υπολογίσουμε ανά πάσα χρονική στιγμή τον πληθυσμό των βακτηρίων; Θα είχαν νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι αρνητικές τιμές για α) για το χρόνο και β) για τον πληθυσμό των βακτηρίων;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων ομάδων συναρτήσεων. Να ζητηθεί από τους μαθητές να συγκρίνουν τα γραφήματά τους και να προσδιορίσουν τυχόν ομοιότητες και διαφορές που αφορούν α) το πεδίο ορισμού, β) το σύνολο τιμών, γ) τα σημεία τομής με τους άξονες, δ) τη μονοτονία, ε) τις ασύμπτωτες και στ) τη συμμετρία.

- $f_1(x)=2^x,\quad f_2(x)=3\cdot 2^x,\quad f_3(x)=-3\cdot 2^x,\quad f_4(x)=4\cdot 2^x$.
- $f(x)=2^x,\ g(x)=\dfrac{1}{4}\cdot 2^x$.
- $f_1(x)=2^x,\ f_2(x)=2^x+3\ ,\ f_3(x)=2^{x-3},\ f_4(x)=2^{x-3}+3$
- $f(x)=2^x, g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:



Με το μικροπείραμα «Η μονοτονία μιας εκθετικής συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές διερευνούν την έννοια της μονοτονίας και τη μελέτη της μονοτονίας μιας εκθετικής συνάρτησης. Με τη βοήθεια του λογισμικού μεταβάλλουν τη βάση μιας εκθετικής συνάρτησης και παρατηρώντας τη γραφική της παράσταση βρίσκουν τη μονοτονία της με τη βοήθεια του ορισμού.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5238

§5.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Η κατανόηση των λογαρίθμων και των ιδιοτήτων τους μπορεί να στηριχτεί στον ορισμό του λογαρίθμου και στις ήδη γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων. Μια προσπάθεια απομνημόνευσης τύπων και τεχνασμάτων χωρίς νόημα δεν είναι αποδοτική και δεν ενθαρρύνεται. Έμφαση πρέπει να δοθεί στα παραδείγματα 1 και 2 που περιγράφουν την κλίμακα Richter για τη μέτρηση των σεισμών και το pH για την οξύτητα ενός διαλύματος.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις της Α΄ Ομάδας με έμφαση στα προβλήματα και οι ασκήσεις 2, 3, 5 της Β΄ Ομάδας. Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 6, 7 και 8 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Για απλό ήχο δεδομένης έντασης I, η ένταση του υποκειμενικού αισθήματος που αντιλαμβάνεται κάποιος ακροατής ονομάζεται ακουστότητα L του ήχου. Για την ακουστότητα L χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης το 1 decibel και για την ένταση I το watt/m^2.

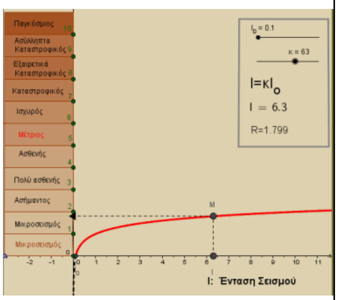
Έχει βρεθεί πειραματικά ότι η ακουστότητα L σχετίζεται με την ένταση I με λογαριθμικό τρόπο , σύμφωνα με τον τύπο $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, όπου I_0 η μικρότερη ένταση ήχου που μπορεί να ακούσει το αυτί του ανθρώπου, και είναι περίπου ίση με 10^{-12} watt/m^2. Να υπολογίσετε την ακουστότητα απλού ήχου έντασης: α) 10^{-6}watt/m^2 και β) δεκαπλάσιας από το I_0.

§5.3 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

Κατ' αντιστοιχία με την εκθετική συνάρτηση, έμφαση θα πρέπει να δοθεί σε προβλήματα και στις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Προτείνεται να διδαχθούν μόνο οι συναρτήσεις f(x)=logx και f(x)=lnx. Ωστόσο, για λόγους κατανόησης της σχέσης με την αντίστοιχη εκθετική συνάρτηση, θα μπορούσαν αν αναφερθούν και οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση α, με 0<α<1, σε αυτή την περίπτωση όμως, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διδακτέα ύλη περιορίζεται στις f(x)=logx και f(x)=lnx. Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις: 2, 5, 6, 7 και 8 της Α΄ Ομάδας και 1(i, iii), 3, 5, 7 και 8 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:



Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί το μικροπείραμα « Λογαριθμική μεταβολή – Κλίμακα Richter» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση της λογαριθμικής μεταβολής. Με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του μεγέθους ενός σεισμού σε κλίμακα Richter ως προς την έντασή του, δημιουργούν εικασίες σχετικά με τη σχέση που έχουν αυτά τα δύο μεγέθη και τις αποδεικνύουν αλγεβρικά. Στη συνέχεια, συγκρίνουν τις εντάσεις σεισμών που έχουν συμβεί στο παρελθόν και λύνουν τα προβλήματα γραφικά και αλγεβρικά.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5240

Σημείωση: Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη

διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.
Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

Γεωμετρία Β΄ Τάξης Ημερήσιου και Γ΄Εσπερινού Γενικού Λυκείου

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου» των. Αργυρόπουλου Η, Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σιδέρη Π.

Κεφ. 7^{ο}: <u>Αναλογίες</u>
7.1. Εισαγωγή
7.4. Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα – Αναλογίες
7.5. Μήκος ευθύγραμμου τμήματος
7.6. Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο (χωρίς την απόδειξη της Πρότασης και χωρίς την υποπαράγραφο "Διερεύνηση")
7.7. Θεώρημα του Θαλή (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και του Πορίσματος και χωρίς τους ορισμούς «συζυγή αρμονικά» και «αρμονική τετράδα»)
7.8. Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και χωρίς τον υπολογισμό των ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία η διχοτόμος – εσωτερική ή εξωτερική – διαιρεί την απέναντι πλευρά)

Κεφ. 8^{ο}: <u>Ομοιότητα</u>
8.1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα
8.2. Κριτήρια ομοιότητας (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων I, II και III και τις εφαρμογές 1, 2 και 3)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Να μην διδαχθούν οι αποδεικτικές ασκήσεις, τα σύνθετα θέματα και οι γενικές ασκήσεις από τα κεφάλαια 7 και 8.

Κεφ. 9^{ο}: <u>Μετρικές σχέσεις</u>
9.1. Ορθές προβολές
9.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα
9.3. Γεωμετρικές κατασκευές
9.4. Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος (χωρίς την εφαρμογή 2)

Κεφ. 10^{ο}: <u>Εμβαδά</u>
10.1. Πολυγωνικά χωρία
10.2. Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα
10.3. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων
10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (χωρίς την απόδειξη των τύπων I και III)
10.5. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων (χωρίς την απόδειξη του Θεωρήματος II)

Κεφ. 11^{ο}: <u>Μέτρηση Κύκλου</u>
11.1. Ορισμός κανονικού πολυγώνου
11.2. Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και του Πορίσματος)
11.3. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους (χωρίς τις εφαρμογές 2,3)
11.4. Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα
11.5. Μήκος τόξου
11.6. Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα
11.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

Κεφ. 12^{ο}: <u>Ευθείες και επίπεδα στο χώρο</u>
12.1. Εισαγωγή
12.2. Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του

12.3. Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων
12.4. Ευθείες και επίπεδα παράλληλα – Θεώρημα του Θαλή
12.5. Γωνία δύο ευθειών – Ορθογώνιες ευθείες
12.6. Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων

II. Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php]

Κεφάλαιο 7^{ο}(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Στις παραγράφους αυτές γίνεται πρώτη φορά λόγος για σύμμετρα και ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Η έννοια της ασυμμετρίας μπορεί να βοηθήσει σημαντικά τους μαθητές να ξεκαθαρίσουν την έννοια του αρρήτου αριθμού.

Επίσης, στόχοι της διδασκαλίας, της παραγράφου είναι:

- ✓ Να γίνει σύντομη αναφορά στις ιδιότητες των αναλογιών και να δοθεί έμφαση στο Θεώρημα του Θαλή και στα Θεωρήματα διχοτόμων.
- ✓ Μέσω παραδειγμάτων να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων διαφορετικών μηκών είναι δυνατόν να έχουν τον ίδιο λόγο.
- ✓ Να εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή, σε δοσμένα σχήματα, ή σε σχήματα που χρειάζεται να σχεδιαστούν βοηθητικές ευθείες. Να αναδειχθούν οι εφαρμογές του Θεωρήματος σε τρίγωνα και τραπέζια.
- ✓ Με χρήση των θεωρημάτων διχοτόμου, οι μαθητές να διαπιστώσουν τη δυνατότητα χωρισμού ευθύγραμμου τμήματος στον ίδιο λόγο με σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ή την προέκτασή του

(Προτείνεται, αν το επιτρέπει ο διαθέσιμος χρόνος, να γίνει απόδειξη του Θεωρήματος του Θαλή, για συγκεκριμένο λόγο (π.χ. $\frac{3}{4}$) και να αναφερθεί ότι γενικεύεται σε οποιουσδήποτε ρητούς.

Προτείνεται να γίνουν τα δύο προβλήματα της παραγράφου 7.7 και να δοθεί έμφαση στις ερωτήσεις κατανόησης 1-3 και στις ασκήσεις εμπέδωσης 3-7 της ως άνω παραγράφου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:
Αν τα α,β και γ είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα,να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα χ ώστε να ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\chi}$.
[Σχόλιο: Η παραπάνω δραστηριότητα είναι πρόβλημα που λύνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Θαλή.]

Στο Κεφάλαιο 7 δεν θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού.

Κεφάλαιο 8^{ο} (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί έμφαση στα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

Στόχοι είναι οι μαθητές:

- ✓ Να κατανοήσουν τη λειτουργία κριτηρίων ομοιότητας, που όπως και τα κριτήρια ισότητας, με λιγότερες προϋποθέσεις από τον ορισμό μπορούμε να αποφανθούμε για την ομοιότητα δύο τριγώνων.

- ✓ Να συσχετίσουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και να εντοπίσουν διαφορές.

Παρατηρήσεις:

- ✓ Αν υπάρχει χρόνος αρκεί να γίνει η απόδειξη ενός μόνο κριτηρίου ομοιότητας τριγώνων.
- ✓ Η εφαρμογή 4 της παραγράφου 8.2 θα χρειασθεί στη συνέχεια για να αποδειχθεί τύπος (iii) της παραγράφου 10.4, για το εμβαδόν τριγώνου.
- ✓ Το Κεφάλαιο προσφέρεται για τη συζήτηση εφαρμογών που ήδη θίγονται στο σχολικό βιβλίο (μέτρηση ύψους απρόσιτων σημείων, χρήση εξάντα).

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</u>:

(α) Δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Μ και ισχύει $MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta$. Να αποδείξετε, σε κάθε περίπτωση, ότι τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.

(β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</u>:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=2, ΑΓ=4 και τη γωνία $\hat{A} = 60^o$. Να κατασκευάσετε τρίγωνα όμοια προς το ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας 1, 2 και $\frac{1}{2}$.

Στο Κεφάλαιο 8 δεν θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού.

Κεφάλαιο 9^o(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

§9.1-9.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Στόχοι της διδασκαλίας είναι οι μαθητές:

- ✓ Να μπορούν να σχεδιάζουν ορθές προβολές.
- ✓ Να ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις με προβολές 9.2 ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων και να τις χρησιμοποιούν σε επίλυση προβλημάτων.
- ✓ Να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του στην επίλυση προβλημάτων.

Παρατηρήσεις:

- ✓ Στις παραγράφους αυτές η άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού χαρακτήρα δε συνεισφέρει στην κατανόηση της Γεωμετρίας.
- ✓ Προτείνεται να γίνει το σχόλιο της εφαρμογής ως σύνδεση με την επόμενη παράγραφο.
- ✓ Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 4, 6.

Στην παράγραφο αυτή είναι σκόπιμο να διατεθεί χρόνος ώστε να σχολιαστεί το ιστορικό σημείωμα για την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και να γίνουν και οι 3 κατασκευές (υποτείνουσα και κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, μέση ανάλογος, άρρητα πολλαπλάσια ευθύγραμμου τμήματος που δίνουν και τον τρόπο κατασκευής ευθυγράμμων τμημάτων με μήκος τετραγωνική ρίζα φυσικού – αφορμή για μία σύντομη συζήτηση για τη δυνατότητα κατασκευής ή μη των αρρήτων). Επίσης μπορεί να γίνει αναφορά στην 7.3 στην οποία γίνεται λόγος για την κατασκευή αρρήτων μεγεθών.

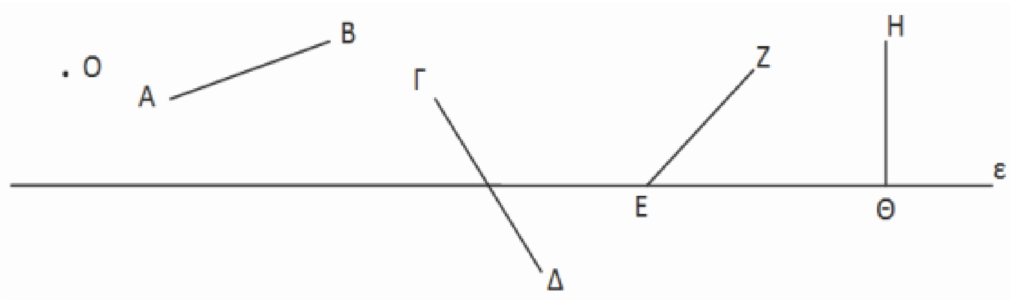
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</u>:

Να κατασκευάσετε ορθές προβολές

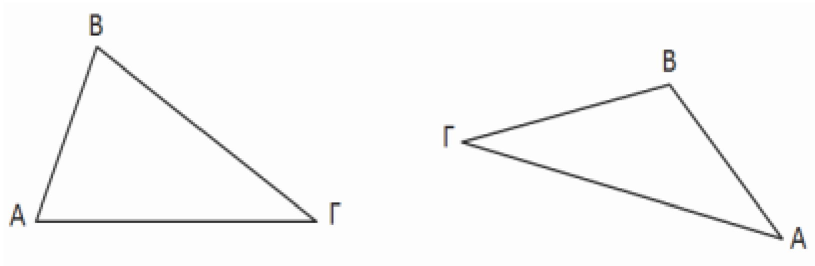
α) του Ο, των ευθυγράμμων τμηματων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ στην ευθεία ε και

β) της ΑΒ πάνω στην ΒΓ

στα δύο παρακάτω σχήματα.

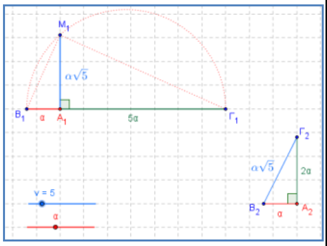


(α)



(β)

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</u>:



Το πρόβλημα 3 προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Κατασκευή ασύμμετρων τμημάτων (Η σπείρα του Κυρηναίου)» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την γεωμετρική κατασκευή ασύμμετρων ευθυγράμμων τμημάτων.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5636

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 3</u>:
(α) Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη, τη μέση ανάλογο β, δύο εθυγράμμων τμημάτων α και γ.
(β) Να βρείτε τη σχέση του μήκους ΑΔ του ύψους ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (με $A=90^{o}$) με το γεωμετρικό μέσο των μηκών ΒΔ και ΔΓ. Ποιο στοιχείο του τριγώνου είναι ο αριθμητικός μέσος των μηκών ΒΔ και ΔΓ;
Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου. Πότε ισχύει η ισότητα;
[Σχετική με τις μετρικές σχέσεις της παραγράφου 9.2]

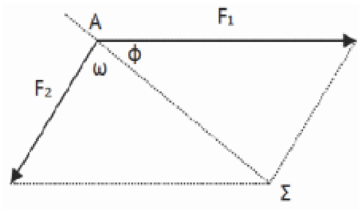
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 4</u>:
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τα τμήματα $\sqrt{2}AB$ και $\sqrt{3}AB$.
[Σχετική με το Πυθαγόρειο Θεώρημα]

§9.4 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).
Στόχοι είναι οι μαθητές να χρησιμοποιούν το Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για να διακρίνουν αν ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο και να χρησιμοποιούν το νόμο των συνημιτόνων σε επίλυση προβλημάτων.

Παρατηρήσεις:
- Στην παράγραφο 9.4 προτείνεται να μην αναλωθεί επιπλέον διδακτικός χρόνος για άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού τύπου.

- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της παραγράφου 9.4.
- Να μη γίνουν οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:



Ένα πλοίο κινείται με κατεύθυνση από το Α προς το Σ. Από τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση Α και μέχρι την ολοκλήρωση της πορείας του, ασκούνται σε αυτό πλαγιομετωπικοί άνεμοι που το ωθούν με δύναμη μέτρου F_1 που σχηματίζει γωνία ω με την επιθυμητή πορεία πλεύσης. Ο καπετάνιος, προκειμένου να διατηρήσει σταθερή την πορεία, δίνει εντολή να στραφεί το πηδάλιο κατά φ μοίρες. Αν οι προπέλες ωθούν το πλοίο με σταθερή δύναμη μέτρου F_1 μπορείτε να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η γωνία φ;

Κεφάλαιο 10^{ο} (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες).

§10.1-10.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Παρατηρήσεις & στόχοι:

- ✓ Οι μαθητές να διακρίνουν τα ισοδύναμα (ισεμβαδικά) από τα ίσα σχήματα.
- ✓ Με κατάλληλους μετασχηματισμούς και χρήση βοηθητικών γραμμών οι μαθητές να υπολογίζουν εμβαδά από άλλα ήδη γνωστά τους.
- ✓ Προτείνεται, αν υπάρχει χρόνος, να γίνουν οι 3 εφαρμογές (με την παρατήρηση της εφαρμογής 2) και οι 2 δραστηριότητες.
- ✓ Θα μπορούσε να γίνει η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω εμβαδών, όπως παρατίθεται στα στοιχεία του Ευκλείδη και αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα στο τέλος του Κεφαλαίου.
- ✓ Προτεινόμενες ασκήσεις:

  Οι ερωτήσεις κατανόησης.

  Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 6.

  Από τις αποδεικτικές ασκήσεις οι 1, 4, 7 και 8.
- ✓ Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1 και 5.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

(α) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα φέρνοντας κατάλληλες ευθείες και στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε τριγώνου με το εμβαδόν του αρχικού.

(β) Να χωρίσετε ένα παραλληλόγραμμο σε

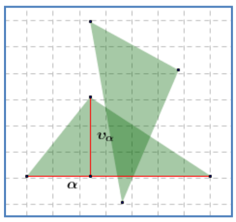
- δύο,
- τρία,
- τέσσερα ίσα παραλληλόγραμμα.

Στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου με το εμβαδόν του αρχικού παραλληλογράμμου.

(γ) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο με ευθεία που διέρχεται από την κορυφή σε δύο τρίγωνα με λόγο εμβαδών $\frac{1}{3}$.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η ερώτηση κατανόησης 1 προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Τύποι υπολογισμού εμβαδών» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση των τύπων των εμβαδών βασικών γεωμετρικών σχημάτων και τις αποδείξεις τους.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5771



§10.4 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Παρατηρήσεις και στόχοι:

-Να γίνει απλή εφαρμογή των τύπων. Οι μαθητές να μπορούν να λύνουν απλά προβλήματα υπολογισμού εμβαδών, με αυτούς.

-Αν υπάρχει χρόνος, να γίνει η απόδειξη του τύπου (iii).
-Να εξηγηθεί ο συμβολισμός της ημιπεριμέτρου.
-Μία επιλογή ασκήσεων θα μπορούσε να είναι:
Οι ερωτήσεις κατανόησης 1 και 2.
Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 4.
Από τις αποδεικτικές οι 1, 3 και 5.
-Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1, 2.

§10.5 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).
Στόχος είναι οι μαθητές να συσχετίσουν το λόγο ομοιότητας δύο σχημάτων με το λόγο των περιμέτρων τους και το λόγο των εμβαδών τους.
Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της παραγράφου 10.5.

Ενδεικτική δραστηριότητα:
α) Να αποδείξετε το θεώρημα διχοτόμων με χρήση εμβαδών.
β) Να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με τη βοήθεια των εμβαδών και να το γενικεύσετε με την κατασκευή εξωτερικά των πλευρών του ομοίων σχημάτων (προτείνεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας).

Κεφάλαιο 11ο (Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες).

§11.1-11.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).
Παρατηρήσεις:
- Στην παράγραφο 11.1 μπορεί να γίνει μία υπενθύμιση της έννοιας του κυρτού πολυγώνου και των στοιχείων του, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 2.20 που είναι εκτός της ύλης της Α΄ Λυκείου.
- Προτείνεται να γίνει η παρατήρηση και το σχόλιο (που χρειάζονται για την επόμενη παράγραφο).
- Μπορεί να γίνει μία αναφορά στο ρόλο των κανονικών πολυγώνων στη φύση, την τέχνη και τις επιστήμες (βιβλίο καθηγητή για επέκταση της αποδεικτικής άσκησης 1 και συσχέτιση με τη διακόσμηση με κανονικά πολύγωνα).
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Στόχοι είναι οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα κανονικά πολύγωνα, να διακρίνουν τη γωνία τους, από την κεντρική τους γωνία και να μπορούν να υπολογίζουν στοιχεία κανονικών πολυγώνων. Δεν κρίνεται σκόπιμο να χρησιμοποιούν έτοιμους τους τύπους του θεωρήματος Ι της παραγράφου 11.2

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Ο ρόμβος και το ορθογώνιο είναι κανονικά πολύγωνα; Τι πρέπει να ισχύει για να είναι;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Η εξωτερική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου» με το οποίο οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες κατασκευής κανονικών ν-γώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο με στόχο να ανακαλύψουν τη σχέση που συνδέει την εξωτερική γωνία του κανονικού ν-γώνου με το πλήθος ν των πλευρών του. Οι μαθητές εκτελούν απλές διαδικασίες σε γλώσσα Logo που δημιουργούν μια ανοικτή τεθλασμένη γραμμή με δυο κορυφές της πάνω σε κύκλο και πειραματίζονται διορθώνοντας τις αρχικές διαδικασίες, ώστε το αποτέλεσμα της εκτέλεσής τους να είναι κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Το μικροπείραμα έχει δημιουργηθεί με χρήση εργαλείων συμβολικής έκφρασης μέσω του προγραμματισμού (Χελωνόκοσμος).
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5748

§11.3 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).
Παρατηρήσεις:
- ✓ Βάσει του σχολίου και της παρατήρησης της προηγούμενης παραγράφου, οι μαθητές μπορούν μόνοι τους να οδηγηθούν στην εγγραφή των βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο, όπως προτείνεται και στο βιβλίο του καθηγητή.

- ✓ Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην εφαρμογή 1 και στη συνέχεια να γίνει η δραστηριότητα 1.
- ✓ Δεν προτείνεται να γίνουν ασκήσεις αλγεβρικού τύπου με χρήση των έτοιμων τύπων του πίνακα της παραγράφου 11.3.
- ✓ Προτείνεται οι μαθητές να κατανοήσουν πώς μεταβάλλονται τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου σε δοσμένο κύκλο, όταν αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών του (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα)
- ✓ Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Ενδεικτική δραστηριότητα:
Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ να εγγράψετε τετράγωνο και στη συνέχεια κανονικό οκτάγωνο. Συνεχίστε την ίδια διαδικασία με την εγγραφή δεκαεξαγώνου κ.ο.κ. Ποιος είναι ο τύπος που περιγράφει το πλήθος των πλευρών μετά από ν βήματα της κατασκευής; Τι συμβαίνει με το μήκος των πλευρών;

§11.4, 11.5, 11.6, 11.7 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες).
Να αφιερωθεί χρόνος για τη διαδικασία προσέγγισης τόσο για τον υπολογισμό του μήκους του κύκλου όσο και για τον υπολογισμό του εμβαδού του.
Παρατηρήσεις:
- ✓ Οι παράγραφοι αυτές μπορούν να προετοιμάσουν τους μαθητές που θα ακολουθήσουν τη θετική κατεύθυνση για την εισαγωγή στις άπειρες διαδικασίες με φυσιολογικό τρόπο, μέσω αναφοράς στην μέθοδο της εξάντλησης. Η σύνδεση μεθόδων του Αρχιμήδη με μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν περίπου δύο χιλιετίες μετά, στην απαρχή του απειροστικού λογισμού, έχει ευρύτερο ενδιαφέρον για όλους τους μαθητές
- ✓ Θα μπορούσαν να αναφερθούν κάποια επιπλέον στοιχεία για τον αριθμό π, αλλά θα πρέπει να διευκρινιστεί τι είναι αλγεβρικός και τι υπερβατικός αριθμός (για την παράγραφο 11.8).
- ✓ Να μη γίνει το σύνθετο θέμα 2.
- ✓ Προτείνεται να δοθεί έμφαση στις εφαρμογές (μηνίσκοι του Ιπποκράτη) και στη δραστηριότητα.

Στόχοι είναι οι μαθητές:
- ✓ Να περιγράφουν και να ερμηνεύουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου
- ✓ Να βρίσκουν το μήκος τόξου ως συνάρτηση της ακτίνας.
- ✓ Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα.
- ✓ Να χρησιμοποιούν τα παραπάνω συμπεράσματα και δεξιότητες σε προβλήματα με μεικτόγραμμα σχήματα.

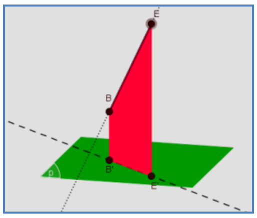
Ενδεικτική δραστηριότητα:
Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 4. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το κανονικό εγγεγραμμένο και το κανονικό περιγεγραμμένο εξάγωνο στον κύκλο.
α) Να βρείτε τις περιμέτρους των δύο εξαγώνων.
β) Τι συμπεραίνετε για το μήκος του κύκλου;
γ) Μπορείτε να βρείτε ακριβέστερο τρόπο προέγγισης του μήκους του κύκλου; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας με αριθμητικά αποτελέσματα.
[Σχόλια:Αυτή η δραστηριότητα είναι εισαγωγική στην παράγραφο 11.4 και μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.Επίσης μπορεί να επεκταθεί και στην προσέγγιση εμβαδού κύκλου με κατάλληλη τροποποίηση των ερωτημάτων.]

Κεφάλαιο 12^{ο} (Να διατεθούν 11 ώρες)

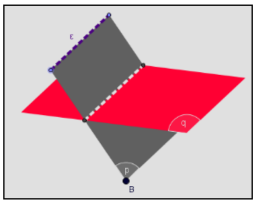
§12.1-12.3 (Να διατεθούν 2 ώρες)
Να γίνει μετάβαση από τις έννοιες της επίπεδης Γεωμετρίας σε αυτές της Γεωμετρίας του χώρου, για παράδειγμα: Επίπεδη γωνία (σημείο, δύο ημιευθείες) και δίεδρη γωνία (ευθεία, δύο ημιεπίπεδα) ή ακόμα τετράγωνο στο επίπεδο και κύβος στο χώρο. Να τονιστεί η διαφορά μεταξύ παραλλήλων και ασύμβατων ευθειών.
Προτείνεται:
- ✓ Να αναφερθούν με τη βοήθεια σχημάτων τα αξιώματα I, II, III και IV της παραγράφου 12.2.

- ✓ Οι προτάσεις που προκύπτουν, στην ίδια παράγραφο, να αναφερθούν επίσης, χωρίς απόδειξη ή παρουσιάζοντας ενδεικτικά την απόδειξη της πρότασης Ι.
- ✓ Να αναφερθούν τα αξιώματα V και VI της παραγράφου 12.3.
- ✓ Σε αυτό το σημείο μπορούν να προκύψουν μέσα από συζήτηση στην τάξη οι τυπικοί ορισμοί:
  Των παραλλήλων ευθειών (§12.2), των παραλλήλων επιπέδων, της παράλληλης ευθείας σε επίπεδο (§12.3).
  Είναι σκόπιμο οι μαθητές να προσπαθήσουν να κατασκευάσουν τους ορισμούς.
- ✓ Ο ορισμός των ασύμβατων ευθειών να δοθεί μετά την απόδειξη του θεωρήματος της §12.3.
- ✓ Να δοθούν μόνο ερωτήσεις κατανόησης και ασκήσεις εμπέδωσης (και όχι αποδεικτικές), ως εργασία για το σπίτι ή την τάξη.

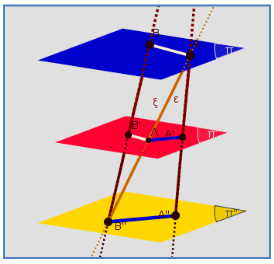
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</u>:
Οι σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου προτείνεται να διερευνηθούν με το μικροπείραμα «Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5904



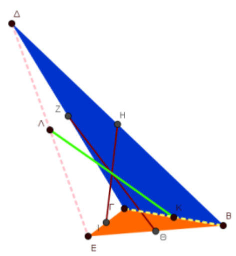
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</u>:
Οι σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στο χώρο προτείνεται να διερευνηθούν με το μικροπείραμα «Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5905



§12.4 (Να διατεθεί 2 ώρες)
Να αναγνωρίσουν το μεσοκάθετο επίπεδο σε ευθύγραμμο τμήμα καθώς και το μεσοπαράλληλο επίπεδο ως γεωμετρικούς τόπους, κατ’ αντιστοιχία με την μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος και τη μεσοπαράλληλη δυο παραλλήλων ευθειών.
Προτείνεται:
- ✓ Να αναφερθούν τα Θεωρήματα και τα πορίσματα της παραγράφου ως αποτελέσματα.
- ✓ Μπορεί, αν υπάρχει χρόνος, να γίνει η απόδειξη του Θεωρήματος IV.
- ✓ Το θεώρημα του Θαλή να μη αποδειχθεί. Αν υπάρχει χρόνος και ανάλογα με τις διδακτικές επιλογές του διδάσκοντα, μπορεί να γίνει διερευνητικά με την προτεινόμενη ενδεικτική δραστηριότητα 1.
- ✓ Να γίνει, από το διδάσκοντα, μία επιλογή μόνο από τις ασκήσεις εμπέδωσης και, αν κριθεί σκόπιμο, η άσκηση 3 από τις αποδεικτικές (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 2).



<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</u>:
Το θεώρημα του Θαλή προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Το θεώρημα του Θαλή σε ασύμβατες ευθείες» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την παραλληλία και την καθετότητα ευθειών στο χώρο και την απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή σε ασύμβατες ευθείες.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5793



<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</u>:
Η άσκηση 3 από τις αποδεικτικές, προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Οι διαγώνιες του στρεβλού

τετραπλεύρου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για τις ιδιότητες των διαγωνίων του στρεβλού τετραπλεύρου.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5855

§12.5 (Να διατεθούν 3 ώρες)
Σε αυτή την παράγραφο εισάγεται η νέα έννοια της γωνίας δύο ασύμβατων ευθειών, που εποπτικά σχετίζεται με την προβολή στο επίπεδο και της καθετότητας ευθείας και επιπέδου.
Οι έννοιες αυτές γενικεύουν την έννοια της γωνίας, που εδώ προσδιορίζεται από μια γωνιακή σχέση μεταξύ δύο σχημάτων του χώρου. Π.χ. οι ασύμβατες ευθείες δε σχηματίζουν 'γωνία' όπως την ξέρουν οι μαθητές, αλλά έχουν μια γωνιακή σχέση, μέσω της προβολής μιας εκ των δύο στο επίπεδο της άλλης.
Προτείνεται:

- ✓ Οι μαθητές να κάνουν εικασίες για τα εξής ερωτήματα:
  Πώς μπορούμε να ορίσουμε μια γωνία μεταξύ δύο ασύμβατων ευθειών;
  Πότε θα χαρακτηρίζαμε μία ευθεία και ένα επίπεδο κάθετα μεταξύ τους;
- ✓ Στη συνέχεια να κατασκευαστούν οι ορισμοί στην τάξη και να συγκριθούν με τους τυπικούς ορισμούς του βιβλίου.
- ✓ Να αποδειχθεί το κριτήριο καθετότητας ευθείας σε επίπεδο και το θεώρημα των τριών καθέτων.
- ✓ Να γίνει επιλογή από τις ερωτήσεις κατανόησης και τις ασκήσεις εμπέδωσης.

§12.6 (Να διατεθούν 4 ώρες)
Στην παράγραφο 12.6 προτείνεται να δοθούν οι ορισμοί και να γίνουν οι εφαρμογές ως δραστηριότητες στην τάξη. Επίσης προτείνεται να γίνει περιορισμένος αριθμός από τις ασκήσεις εμπέδωσης, ανάλογος με την εκτίμηση και τον διδακτικό προγραμματισμό του διδάσκοντα.
Επίσης προτείνονται οι παρακάτω δραστηριότητες:

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από:
α) Δύο σημεία,
β) τρία σημεία.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:
Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ σε ένα επίπεδο Π. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $x\hat{O}y$.

Σημείωση: Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.
Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.

Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Β΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου» των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

Κεφ. 1ο: Διανύσματα

1.1. Η Έννοια του Διανύσματος .
1.2. Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων.
1.3. Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα (χωρίς τις Εφαρμογές 1 και 2).
1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο (Χωρίς την απόδειξη της υποπαραγράφου «Συντεταγμένες Διανύσματος», χωρίς την Εφαρμογή 2 στη σελ. 35 και χωρίς την απόδειξη της συνθήκης παραλληλίας διανυσμάτων).
1.5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων (χωρίς την απόδειξη του τύπου της αναλυτικής έκφρασης Εσωτερικού Γινομένου) και χωρίς την παράγραφο «Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα».

Κεφ. 2ο: Η Ευθεία στο Επίπεδο

2.1. Εξίσωση Ευθείας.
2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας (χωρίς την εφαρμογή 2).
2.3. Εμβαδόν Τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία, του εμβαδού τριγώνου και χωρίς την Εφαρμογή 1).

Κεφ. 3ο: Κωνικές Τομές

3.1. Ο Κύκλος (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου).
3.2. Η Παραβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της παραβολής, την απόδειξη του τύπου της εφαπτομένης και την Εφαρμογή 1 στη σελ. 96).
3.3. Η Έλλειψη (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της έλλειψης, τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, την εφαπτομένη της έλλειψης και χωρίς τις εφαρμογές).
3.4. Η Υπερβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της υπερβολής, την απόδειξη του τύπου των ασύμπτωτων και την εφαπτομένη της υπερβολής).
3.5. Μόνο η υποπαράγραφος «σχετική θέση ευθείας και κωνικής».

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Α) Δεν θα διδαχθούν οι ασκήσεις Β ομάδας των παραγράφων 3.2, 3.3 και 3.4.
Β) Από τις γενικές ασκήσεις του 3ου Κεφαλαίου δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στις παραπάνω παραγράφους (Παραβολή, Έλλειψη και Υπερβολή).
Γ) Όσον αφορά στις προτεινόμενες δραστηριότητες, επαφίεται στην κρίση του διδάσκοντα η επιλογή εκείνων που θα εφαρμόσει στην τάξη. Ωστόσο, καλό είναι να εμπλουτιστεί το μάθημα με το συγκεκριμένο υλικό.

ΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php]

Κεφάλαιο 1ο
(Προτείνεται να διατεθούν 16 διδακτικές ώρες).

Εισαγωγή
Στην τάξη αυτή οι μαθητές θα εμβαθύνουν στον λογισμό των διανυσμάτων. Ποιο συγκεκριμένα θα γίνει αναφορά:
Στον ορισμό του διανύσματος, τα χαρακτηριστικά του και στη σχέση μεταξύ διανυσμάτων (παράλληλα, ίσα, αντίθετα, γωνία διανυσμάτων).
Στον ορισμό των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα (βαθμωτός πολλαπλασιασμός).
Στο γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων.
Στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.
Στην παράσταση διανύσματος σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
Τα παραπάνω αποτελούν απαραίτητες γνώσεις προκειμένου να γίνει κατανοητή η θεμελίωση της Αναλυτικής Γεωμετρίας του επιπέδου που ακολουθεί, καθώς και η αντιμετώπιση πολλών καταστάσεων της πραγματικής ζωής και προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Εστίαση σε σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των διανυσμάτων
Το διάνυσμα αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που δομήθηκε από τη στενή αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Φυσικής.
Ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων.
Προτάσεις και θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύονται με χρήση των διανυσμάτων.
§ 1.1 , 1.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 και 2 ώρες αντίστοιχα
Το διάνυσμα εισάγεται ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό, παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφτεί ως διαφορά $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, όπου Ο είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

§ 1.3 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες
Α) Να τονιστεί ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \ (\vec{\beta} \neq \vec{0})$ χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων.

Β) Επειδή αρκετοί μαθητές αντιλαμβάνονται τον τύπο $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ ως διαίρεση διανύσματος με αριθμό, καλό είναι να τονισθεί ότι η γραφή αυτή είναι μία σύμβαση και στην πραγματικότητα το 2ο μέλος είναι ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$, δηλαδή $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.
Γ) Να γίνουν ασκήσεις μόνο από την Α΄ ομάδα.

§ 1.4 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες
Α) Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων. Να τονισθεί επίσης η μοναδικότητα της έκφρασης διανύσματος με τις συντεταγμένες του. Η έννοια των διανυσμάτων είναι σημαντική στη γεωμετρία εάν αναλογιστεί κανείς ότι η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους.
Β) Πριν αναφερθεί η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων, ο εκπαιδευτικός να δώσει τον ορισμό της ορίζουσας δύο διανυσμάτων, ο οποίος βρίσκεται προς το τέλος της παραγράφου.

Ενδεικτικά:

Ονομάζουμε ορίζουσα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ και τη συμβολίζουμε με

	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ τον πραγματικό αριθμό $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2$, όπου η 1η γραμμή είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και η 2η γραμμή είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.	

Την ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με τη σειρά που δίνονται, τη συμβολίζουμε και με $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Δηλαδή $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2$.

Γενικότερα, η παράσταση $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$ ονομάζεται ορίζουσα και είναι ένας πραγματικός αριθμός.

§1.5 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Α) Να μην διδαχθεί η υποπαράγραφος «Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα»

Β) Να μη γίνουν:

- Οι ασκήσεις 8, 9 και 10 και 12 της Α΄ Ομάδας.
- Οι ασκήσεις 1, 3, 9 και 10, 11 της Β΄ Ομάδας .
- Οι Γενικές Ασκήσεις.

Σχόλιο

Προτείνεται να γίνουν ως δραστηριότητες κάποιες από τις ερωτήσεις κατανόησης όπως για παράδειγμα, οι ερωτήσεις 6, 7 και 13. Ιδιαίτερα, η 13 θα αντιμετωπιστεί με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, αφού η προβολή πλέον δεν διδάσκεται, με στόχο την κατανόηση του ρόλου της γωνίας και ότι δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής στο εσωτερικό γινόμενο.

Προτεινόμενες Δραστηριότητες

Ας δούμε τώρα μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με τους μαθητές μας. Η πρώτη δραστηριότητα συνδέει τα Μαθηματικά με τη Φυσική. Η δεύτερη δραστηριότητα δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να συνδέει, διατυπώνει και αποδεικνύει προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με το διανυσματικό λογισμό, αλλά να ακολουθεί και την αντίστροφη πορεία. Τέλος, η τρίτη δραστηριότητα[1] αναφέρεται σε ένα πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο, όπου οι μαθητές μοντελοποιούν το πρόβλημα με χρήση των διανυσμάτων και απαντούν στο τέλος με τη φυσική γλώσσα. Αν και είναι αυτονόητο, επισημαίνεται ότι αν ένα πρόβλημα απαιτεί τύπους ή σχέσεις από άλλο επιστημονικό πεδίο, αυτά δίνονται στους μαθητές.

Δραστηριότητα 1

Η δύναμη του διαγράμματος έχει μέτρο $F_p = 20N$ και σχηματίζει γωνία θ^o με το οριζόντιο έδαφος. Το βαγονάκι σύρεται 100m κατά μήκος του εδάφους.

α) Να υπολογίστε το έργο της δύναμης όταν η γωνία είναι 30^o.

β) Επιλέξτε δύο άλλες τιμές για τη γωνία θ^o και υπολογίστε το έργο σε κάθε περίπτωση. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μπορείτε να διατυπώσετε κάποια εικασία;

ΣΧΟΛΙΟ

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα στοχεύει να συνδέσει τα μαθηματικά με τη φυσική και εφαρμογές

[1] Η συγκεκριμένη δραστηριότητα έχει αλιευθεί από το βιβλίο: *THOMAS Απειροστικός λογισμός, Τόμος ΙΙ των Finney, Weir & Giordano*, σελ. 697, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2011.

του πραγματικού κόσμου. Εστιάζει στο γεγονός ότι το έργο δεν είναι τίποτα άλλο, παρά το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών. Της δύναμης και της μετατόπισης.

Δραστηριότητα 2

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$.

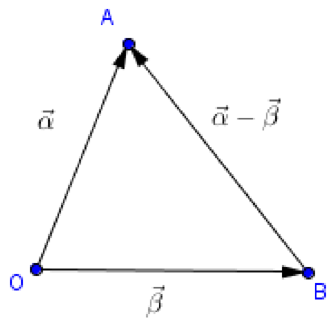
Να εξετάσετε αν η συγκεκριμένη σχέση ικανοποιείται για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ή μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.

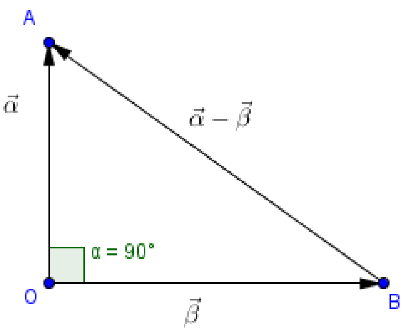
Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το προηγούμενο συμπέρασμά σας.

Ενδεικτική λύση

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα συνδέει το διανυσματικό λογισμό με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στο πρώτο ερώτημα αναμένεται, οι μαθητές να εφαρμόσουν τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και εργαζόμενοι, κυρίως αλγεβρικά, να καταλήξουν ότι η συγκεκριμένη σχέση ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι κάθετα.

Με το δεύτερο ερώτημα επιχειρούμε να οπτικοποιήσουν οι μαθητές τη δοθείσα σχέση. Έτσι, με σημείο αναφοράς το Ο θα κατασκευάζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, οπότε θα είναι $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.





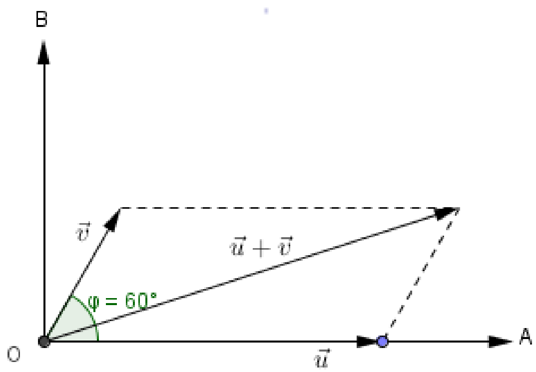
Οι μαθητές, στη συνέχεια, αναμένεται να ερμηνεύσουν τα μέτρα των διανυσμάτων ως μήκη ευθυγράμμων τμημάτων, οπότε τη σχέση $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$ θα την γράψουν στη μορφή: $(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2$, για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι ισχύει, αν και μόνο αν το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, δηλαδή αν και μόνο αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Δραστηριότητα 3

Ένα αεροσκάφος που πετά προς ανατολάς με ταχύτητα 500 km/h απουσία ανέμου, συναντά άνεμο ταχύτητας 70 km/h, που πνέει σε κατεύθυνση 60^0 ανατολική-βορειονατολική (οι κατευθύνσεις ορίζουν γωνία η οποία μετριέται από την πρώτη κατεύθυνση δηλ. την ανατολική, προς τη δεύτερη κατεύθυνση, δηλ τη βορειοανατολική). Το αεροπλάνο διατηρεί τον προσανατολισμό του προς ανατολάς, ωστόσο λόγω του ανέμου, η ταχύτητα του ως προς το έδαφος αποκτά νέο μέτρο και κατεύθυνση. Βρείτε τη νέα κατεύθυνση του αεροσκάφους.

Ενδεικτική λύση

Έστω $\vec{u}$ η ταχύτητα του αεροσκάφους πριν την επίδραση του ανέμου και $\vec{v}$ η ταχύτητα του ανέμου. Τότε έχουμε: $|\vec{u}|=500$ και $|\vec{v}|=70$. Ζητείται το μέτρο και η φορά της συνισταμένης $\vec{u}+\vec{v}$. Υποθέτουμε ότι ο θετικός ημιάξονας των x δείχνει προς την Ανατολή και ο θετικός ημιάξονας των y



προς τον Βορρά. Στο σύστημα αυτό το διάνυσμα $\vec{u}=\left(500,\ 0\right)$ και το

$\vec{v}=\left(70\sigma\upsilon\nu 60^0,\ 70\eta\mu 60^0\right)=\left(35,\ 35\sqrt{3}\right)$. Επομένως, $\vec{u}+\vec{v}=\left(535,\ 35\sqrt{3}\right)$ και συνεπώς

$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{535^2+\left(35\sqrt{3}\right)^2}\approx 538,4$.

Επιπλέον, για τη γωνία θ που σχηματίζει η κατεύθυνση του αεροσκάφους με την ανατολική κατεύθυνση ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{35\sqrt{3}}{535}$.

Ερμηνεία: Η νέα ταχύτητα του αεροσκάφους θα είναι περίπου 538,4 km/h, ενώ η νέα πορεία του είναι περίπου $6,5^0$ ανατολική-βορειοανατολική.

Β΄ τρόπος

Μπορούμε να υπολογίσουμε το $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ με χρήση του εσωτερικού τετραγώνου και τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{u}+\vec{v}$ με χρήση του εσωτερικού γινομένου.

Κεφάλαιο 2ο
(Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Εισαγωγή

Κατά τη φοίτηση τους στο Γυμνάσιο, οι μαθητές έχουν έλθει ήδη σε επαφή με έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στην Β΄ Λυκείου σκοπεύουμε σε περαιτέρω εμβάθυνση θεμελιωδών ζητημάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Τα θέματα που σχετίζονται με την ευθεία παρουσιάζονται συστηματικότερα και με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια. Τονίζεται η σημασία του συντελεστή διεύθυνσης (κλίσης) μιας ευθείας, με τη βοήθεια του οποίου διατυπώνονται οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι διάφορες μορφές της εξίσωσης της ευθείας, η γενική της μορφή, καθώς και το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο. Με τη διδασκαλία αυτής της ενότητας επιδιώκεται οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, καθώς και να κατανοήσουν τις δυνατότητες που παρέχει ως μαθηματικό εργαλείο στη διερεύνηση και απόδειξη προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και σε περιοχές άλλων επιστημών.

Προτείνεται, η διδασκαλία της ευθείας να έχει ως στόχο, να μπορούν οι μαθητές να απαντούν στις παρακάτω ερωτήσεις:

Με ποιον τρόπο συνδέεται η κλίση της ευθείας, ο λόγος μεταβολής μεταξύ δύο σημείων της και ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος παράλληλου προς αυτήν;

Πώς ελέγχουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή κάθετες με χρήση των συντελεστών διεύθυνσης;

Πώς ελέγχουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή κάθετες όταν μία τουλάχιστον εκ των δύο δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης.

Πώς βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν: α) διέρχεται από γνωστό σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης ή είναι παράλληλη στον $x'x$, β) δίνονται δύο σημεία της, γ) δίνεται ένα σημείο της και είναι παράλληλη σε γνωστό διάνυσμα;

Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία και ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά; Είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ένα σημείο ανήκει στην ευθεία αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Ποια είναι η γενική μορφή εξίσωσης ευθείας και με ποιο τρόπο προσδιορίζουμε ένα διάνυσμα κάθετο και ένα διάνυσμα παράλληλο με βάση τη γενική μορφή της εξίσωσης;

Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο και πώς διερευνάται αλγεβρικά το συγκεκριμένο ερώτημα με χρήση των οριζουσών;

§2.1 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες.

Προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να εκφρασθεί ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας και στο ότι δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. Να τονισθεί επίσης, ότι από το σημείο

$\mathrm{M}(x_0,\, y_0)$ διέρχονται οι ευθείες με εξισώσεις: $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ και $x=x_0$.

§2.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Να δοθεί έμφαση όχι μόνο στη γενική μορφή εξίσωσης ευθείας, αλλά και στη σχέση που υπάρχει μεταξύ των συντελεστών της εξίσωσης και των συντεταγμένων του διανύσματος που είναι παράλληλο ή κάθετο προς την ευθεία. Στην παράγραφο αυτή εισάγεται η διαδικασία επίλυσης του γραμμικού συστήματος 2χ2 με τη μέθοδο των οριζουσών, σε συνδυασμό με τη σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο. Επειδή δεν περιέχεται το σχετικό θέμα στο σχολικό βιβλίο, προτείνεται η παρακάτω διδακτική πορεία.

Ας είναι

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1\cdot x_1+\mathrm{B}_1\cdot y_1+\Gamma_1=0 \ \text{ με } \mathrm{A}_1\neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_1\neq 0 \\ \mathrm{A}_2\cdot x_1+\mathrm{B}_2\cdot y_1+\Gamma_2=0 \ \text{ με } \mathrm{A}_2\neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_2\neq 0 \end{cases}$$

οι εξισώσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 στο επίπεδο αντίστοιχα.

Τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις γράψουμε ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1\cdot x_1+\mathrm{B}_1\cdot y_1=-\Gamma_1 \ \text{ με } \mathrm{A}_1\neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_1\neq 0 \\ \\ \mathrm{A}_2\cdot x_1+\mathrm{B}_2\cdot y_1=-\Gamma_2 \ \text{ με } \mathrm{A}_2\neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_2\neq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Τότε λέμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή αλλιώς ένα γραμμικό σύστημα (2χ2).

Τα διανύσματα $\vec{\eta}_1=(\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1)$ και $\vec{\eta}_2=(\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2)$ είναι κάθετα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Επομένως, θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών.

Η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$, η $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=\begin{vmatrix} & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2\end{vmatrix}$, επειδή σχηματίζεται από τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος (1), ονομάζεται ορίζουσα του συστήματος και συμβολίζεται με D, δηλαδή $D=\begin{vmatrix}\mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2\end{vmatrix}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν τα διανύσματα $\vec{\eta}_1=(\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1)$ και $\vec{\eta}_2=(\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2)$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε ισοδύναμα

$$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)\neq \upsilon \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow D\neq 0 \ (2)$$

Επομένως, οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση του συστήματος (1).

Αν $D=0$, τότε ισοδύναμα τα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά και επομένως, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να τονιστεί ότι η έννοια της παραλληλίας νοείται υπό την αναλυτική της έκφραση. Δηλαδή, οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν $D=0$, τότε το σύστημα (1) είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα.

<u>Εναλλακτική προσέγγιση</u>

Αντί των καθέτων διανυσμάτων, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(\mathrm{B}_1,-\mathrm{A}_1)$ και $\vec{\delta}_2=(\mathrm{B}_2,-\mathrm{A}_2)$ που είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Τότε τα διανύσματα θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(\mathrm{B}_1,-\mathrm{A}_1)$ και $\vec{\delta}_2=(\mathrm{B}_2,-\mathrm{A}_2)$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε

$$\det\left(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2\right)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} B_1 & -A_1 \\ B_2 & -A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -B_1A_2 + A_1B_2 \neq 0$$

Η τελευταία σχέση γράφεται και $D=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$ (2). Η συγκεκριμένη ορίζουσα που αποτελείται από τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος, λέγεται ορίζουσα του συστήματος. Η σχέση (2) σημαίνει ισοδύναμα ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση του συστήματος (1).
Όταν τα διανύσματα είναι παράλληλα, τότε

$$\det\left(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta_1 & -\alpha_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 = 0 \Leftrightarrow D = 0$$

Αφού τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=\left(\beta_1,-\alpha_1\right)$ και $\vec{\delta}_2=\left(\beta_2,-\alpha_2\right)$ είναι παράλληλα, τότε και οι αντίστοιχες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να τονιστεί ότι η έννοια της παραλληλίας νοείται υπό την αναλυτική της έκφραση. Δηλαδή, οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν $D=0$, τότε το σύστημα είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις.

<u>Σχόλιο</u>
Προαιρετικά ο διδάσκων θα μπορούσε, με τη βοήθεια των οριζουσών, να προχωρήσει στη διερεύνηση των συνθηκών κάτω από τις οποίες οι παράλληλες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή συμπίπτουν.
Για παράδειγμα: Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν έναν τουλάχιστον από τους άξονες. Έστω ότι τέμνουν τον $y'y$. Τότε, η ε_1 τον τέμνει στο σημείο με τεταγμένη $-\dfrac{\Gamma_1}{B_1}$ και η ε_2 στο σημείο με τεταγμένη $-\dfrac{\Gamma_2}{B_2}$. Στην περίπτωση αυτή, οι ευθείες ε_1 και ε_2 :
Συμπίπτουν αν και μόνον αν

$$\frac{\Gamma_1}{B_1}=\frac{\Gamma_2}{B_2} \Leftrightarrow \Gamma_1B_2 = B_1\Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1B_2 - B_1\Gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow D_x = 0$$

όπου $D_x=\begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix}$. Η ορίζουσα D_x προκύπτει από την ορίζουσα D, αν η στήλη των συντελεστών του x αντικατασταθεί από τους σταθερούς όρους του συστήματος (1). Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και η ορίζουσα $D_y=\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$, για την οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι $D_y=0$. Να σημειωθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει συντελεστής αγνώστου διαφορετικός από το μηδέν.
Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο αν κα μόνον αν

$$\frac{\Gamma_1}{B_1}\neq\frac{\Gamma_2}{B_2} \Leftrightarrow \Gamma_1B_2 \neq B_1\Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1B_2 - B_1\Gamma_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D_x \neq 0$$

Συμπερασματικά

ΟΡΙΖΟΥΣΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ	ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$D \neq 0$	Οι ευθείες τέμνονται (μοναδικό κοινό σημείο)	Μοναδική λύση $x = \dfrac{D_x}{D}$ και $y = \dfrac{D_y}{D}$
$D = 0$	Οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή Οι ευθείες συμπίπτουν (άπειρα κοινά σημεία)	Αδύνατο ή Άπειρες λύσεις

Να τονιστεί με απλά αριθμητικά παραδείγματα ότι στην περίπτωση όπου οι συντελεστές A_1, B_2, A_2, B_1 δεν είναι μηδέν η συνθήκη $D = A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ δηλώνει ότι οι συντελεστές είναι ανάλογοι και οι ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, ενώ οι ορίζουσες D_x, D_y καθορίζουν αν η αναλογία ισχύει και για τους συντελεστές Γ_1, Γ_2, οπότε οι ευθείες ταυτίζονται, ή δεν ισχύει οπότε οι ευθείες είναι παράλληλες.
Προτείνεται να διδαχθούν ασκήσεις παραμετρικών συστημάτων από το βιβλίο της Άλγεβρας Β Λυκείου υπό το πρίσμα της σχετικής θέσης δύο ευθειών.
Η διδακτική πορεία που θα επιλεγεί δεν θα είναι στην εξεταστέα ύλη. Οι μαθητές όμως πρέπει να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν σε ασκήσεις τα συμπεράσματα του παραπάνω πίνακα.

§2.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Πριν δοθούν οι τύποι της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου, οι μαθητές να επεξεργαστούν δραστηριότητες, όπως οι παρακάτω δύο:

1η: Δίνονται η ευθεία και το σημείο $A(5,\ 2)$. Να βρεθούν:

i) Η εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ε .
ii) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής της ζ με την ε .
iii) Η απόσταση του A από την ε .

Στη συνέχεια, να δηλωθεί στους μαθητές ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος απόστασης ενός σημείου από μία ευθεία, ο οποίος και να δοθεί.

2η: Δίνονται τα σημεία $A(5,\ 2)$, $B(2,\ 3)$ και $\Gamma\ (3,\ 4)$. Να βρεθούν:

i) Η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
ii) Το ύψος *ΑΔ* του τριγώνου $AB\Gamma$ και
iii) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Στη συνέχεια, να δηλωθεί στους μαθητές ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος του εμβαδού τριγώνου του οποίου είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών.

Β) Να μη γίνουν:

- Η άσκηση 7 της Β΄ Ομάδας.
- Από τις Γενικές Ασκήσεις οι 3, 4, 5, 6 και 7.

Προτεινόμενες Δραστηριότητες σε όλο το κεφάλαιο

Ας δούμε τώρα μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με τους μαθητές μας

Δραστηριότητα 1

Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα

		Κλίση ευθείας	**Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος**	$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Γωνία ευθείας με τον άξονα $x'x$	$\omega = 30^0$			
	$\omega = 60^0$			
	$\omega = 150^0$			

Διάνυσμα παράλληλο προς την ευθεία	$\vec{\delta}=\left(3,\sqrt{3}\right)$			
	$\vec{\delta}=\left(-1,-\sqrt{3}\right)$			
	$\vec{\delta}=\left(-3,\sqrt{3}\right)$			
Σημεία της ευθείας	$\left(0,1\right)$ **και** $\left(\sqrt{3},2\right)$			
	$\left(1,\sqrt{3}-1\right)$ **και** $\left(\sqrt{3},2\right)$			
	$\left(0,2\right)$ **και** $\left(-\sqrt{3},3\right)$			

Οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τα κενά και να συνδέσουν έτσι την κλίση της ευθείας, το συντελεστή διεύθυνσης του παράλληλου διανύσματος και το πηλίκο διαφορών $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές των τριών μεγεθών ταυτίζονται και κατά συνέπεια εκφράζουν την ίδια μαθηματική έννοια.

Δραστηριότητα 2

Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις:

$$\left(1-\sqrt{3}\right)x+\left(1+\sqrt{3}\right)y=8 \quad \left(\varepsilon_1\right)$$

$$x+\sqrt{3}y=1 \quad \left(\varepsilon_2\right)$$

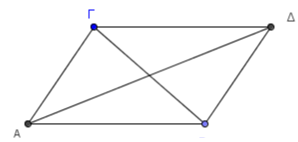
α) Να προσδιορίσετε δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ που να είναι κάθετα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα και να βρείτε τα μέτρα τους.

β) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες μεταξύ τους.

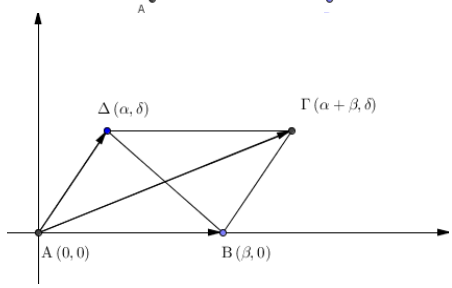
γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.

Δραστηριότητα 3 (Επίλυση γεωμετρικού προβλήματος με άλγεβρα)

Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.



Ενδεικτική λύση



Το ζητούμενο αποτελεί μία από τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Αυτό που θέλουμε όμως τώρα, είναι να την αποδείξουμε με χρήση της άλγεβρας. Επιλέγουμε λοιπόν ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Η καταλληλότητα έχει να κάνει με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων αγνώστων. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε το διπλανό σχήμα με τους άξονες. Θεωρώντας το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$ ως αρχή των αξόνων, το σημείο $\mathrm{B}(\beta,0)$ και το σημείο $\Delta(\alpha,\delta)$. Τότε $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=(\alpha+\beta,\,\delta)$, οπότε το σημείο Γ έχει τις ίδιες συντεταγμένες. Άμεσα προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του μέσου του τμήματος ΑΓ είναι $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$ όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις συντεταγμένες του μέσου του ΒΔ. Επομένως, οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

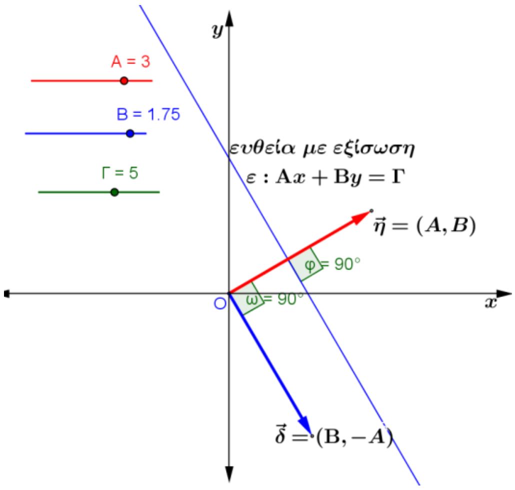
Δραστηριότητα 4

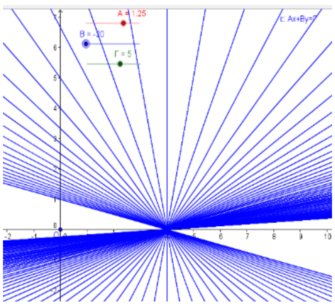
Με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra να επιλέξετε τρεις δρομείς Α, Β, Γ και να παραστήσετε γραφικά τα διανύσματα $\vec{n}=\left(\mathrm{A},\mathrm{B}\right)$ και $\vec{\delta}=\left(\mathrm{B},-\mathrm{A}\right)$, καθώς και την ευθεία ε με εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y=\Gamma$. Να υπολογίσετε επιπλέον το μέτρο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{\delta}$, καθώς και το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{n}$ με την ευθεία ε και, στη συνέχεια, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

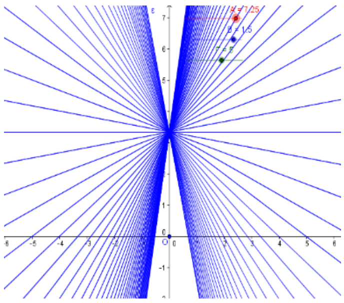
Ποια είναι η σχέση των διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{\delta}$, τόσο μεταξύ τους, όσο και με την ευθεία ε, όταν μεταβάλλουμε το A ή το B;

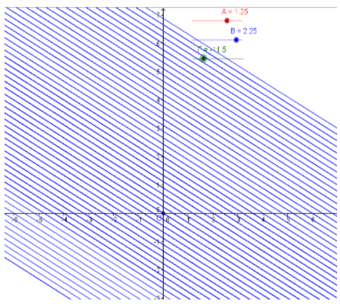
Πώς κινείται η ευθεία ε, όταν μεταβάλλουμε μόνο το A ή μόνο το B ή μόνο το Γ; Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό ενεργοποιείστε το ίχνος της ευθείας ε και μεταβάλλετε διαδοχικά τους δρομείς A, B, Γ, αφού προηγουμένως διατηρήσετε στην επιφάνεια εργασίας μόνο την ευθεία και τους δρομείς και αποκρύψετε όλα τα υπόλοιπα (βλέπε παρακάτω σχήμα).

Αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό σας.









Δραστηριότητα 5

Δίνεται η παρακάτω οικογένεια γραμμικών εξισώσεων:

$$\varepsilon_\lambda: \left(\lambda^2 - \lambda\right)\cdot x - \lambda \cdot y = \lambda^2 - 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Με το λογισμικό GEOGEBRA επιλέξτε ένα δρομέα λ που να παίρνει τιμές από -20 έως 20 με αύξηση 0,2 και παραστήστε γραφικά την ε_λ

Μετακινήστε το δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και απαντήστε στο ερώτημα: «Τι παριστάνει η ε_λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \neq 0$ και τί για $\lambda = 0$;» Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Πάρτε δύο τιμές του λ, για παράδειγμα $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, παραστήστε γραφικά τις ε_1 και ε_2, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους A και επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

Ενεργοποιήστε το ίχνος της ε_λ, μετακινήστε το δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και ελέγξτε αν οι ε_λ, $\lambda \in \mathbf{R}$ διέρχονται όλες από το σημείο A. Επαληθεύσατε την εικασία σας αλγεβρικά.

Κεφάλαιο 3°

(Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)

(Ενδεικτική κατανομή ωρών: §3.1-10 ώρες, §3.2-4 ώρες, §3.3-2 ώρες, §3.4-2 ώρες, §3.5-2 ώρες)

Εισαγωγή

Η μελέτη των κωνικών τομών αποτελεί μια φυσιολογική διδακτική εξέλιξη μετά τη μελέτη της ευθείας, που εκφράζεται με εξίσωση πρώτου βαθμού, αφού η αναλυτική τους έκφραση αντιστοιχεί σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου προτείνεται, να δοθεί έμφαση στα παρακάτω σημεία:

Κάθε κωνική τομή είναι γεωμετρικός τόπος σημείων του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν συγκεκριμένη κάθε φορά ιδιότητα.

Ο τιμή της εκκεντρότητας καθορίζει τη μορφή της κωνικής τομής.

Οι ιδιότητες των κωνικών τομών έχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Στόχος είναι να μπορούν οι μαθητές να απαντούν στις παρακάτω ερωτήσεις:

Γιατί ονομάσθηκαν κωνικές τομές ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή;

Πώς ορίζεται ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή;

Ποιες είναι οι εξισώσεις των κωνικών τομών;

Πώς ορίζεται η εφαπτομένη σε ένα σημείο μιας κωνικής τομής και ποια είναι η εξίσωσή της; (μόνο για τον κύκλο και την παραβολή).

Πώς ορίζονται οι ασύμπτωτες της υπερβολής;

§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 10 ώρες

Να γίνει υπενθύμιση των βασικών ιδιοτήτων του κύκλου που έχουν γνωρίσει οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Προτείνεται για την εύρεση της εξίσωσης του κύκλου να μην δοθεί έμφαση μόνο στην εφαρμογή του τύπου, αλλά και στην εύρεσή της με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου.

§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Πριν δοθεί ο τύπος της εξίσωσης της παραβολής, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης παραβολής της οποίας δίνεται η εστία και η διευθετούσα. Για παράδειγμα της παραβολής με εστία το σημείο $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta:\ x=-1$.

Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης.

§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Α) Πριν δοθεί ο τύπος της εξίσωσης της έλλειψης, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης έλλειψης της οποίας δίνονται οι εστίες και το σταθερό άθροισμα 2α . Για παράδειγμα της έλλειψης με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}'\left(-4,0\right),\ \mathrm{E}\left(4,0\right)$ και $2\alpha=10$. Δεν θα γίνουν οι ασκήσεις 5,6 και 7 της Α΄ ομάδας που αναφέρονται στην εφαπτομένη της έλλειψης.

Β) Να μη δοθεί έμφαση σε ασκήσεις που αναλώνονται σε πολλές πράξεις

§3.4 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Από την παράγραφο αυτή να γίνουν απλές ασκήσεις με αριθμητικά δεδομένα και μόνο. Δεν θα γίνουν οι ασκήσεις 4, 5 και 7 της Α ομάδας που αναφέρονται στην εφαπτομένη της υπερβολής.

§3.5 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Από την παράγραφο αυτή θα διδαχθεί μόνο η υποπαράγραφος «Σχετική θέση ευθείας και κωνικής» και για κωνικές της μορφής των παραγράφων 3.1 και 3.2. Έτσι, οι μαθητές θα γνωρίσουν την αλγεβρική ερμηνεία του γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης των κωνικών τομών και γενικότερα της σχετικής θέσης ευθείας και κωνικής τομής. Προτείνεται η επίλυση απλών ασκήσεων, όπως είναι η άσκηση 4 της Α΄ ομάδας.

Δραστηριότητα

α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του πίνακα που ακολουθεί με το αντίστοιχό του στη δεύτερη στήλη:

Εξίσωση	Κωνική τομή
$9x^2 - y^2 = 0$	Έλλειψη
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$	Υπερβολή
$y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$	Παραβολή
$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$	Ζεύγος ευθειών
$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$	Κύκλος

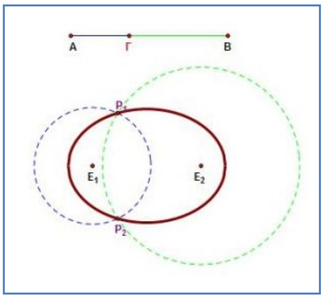
β. Όμοια για τον πίνακα:

Εκκεντρότητα	Κωνική τομή
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Κύκλος
0	Ισοσκελής υπερβολή
$\frac{4}{5}$	Υπερβολή
$\frac{5}{4}$	Έλλειψη
$\sqrt{2}$	

Ενδεικτικές ψηφιακές δραστηριότητες

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Τομές κώνου με επίπεδο. Μικροπείραμα, αναρτημένο στο «Φωτόδεντρο», για τη διερεύνηση των τομών ενός κώνου ένα επίπεδο. Ο χρήστης μπορεί να διερευνήσει το είδος της καμπύλης που προκύπτει (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή, κύκλος), σε σχέση με τη θέση και την κλίση του επιπέδου τομής, καθώς και τη γωνία της κορυφής του κώνου.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5654?locale=el



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η έννοια της έλλειψης προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με τη δραστηριότητα «Κατασκευή έλλειψης» από το Φωτόδεντρο. Με τη βοήθεια των οδηγιών και του λογισμικού, οι μαθητές κατασκευάζουν το γεωμετρικό τόπο ενός σημείου που το άθροισμα των αποστάσεών του από δύο σταθερά σημεία, είναι σταθερό. Μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά τη θέση των σταθερών σημείων, το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων του τρίτου σημείου από αυτά και να παρατηρούν κάθε φορά τη μεταβολή στο γεωμετρικό τόπο.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/6873

Σημείωση: Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση https://www.geogebra.org/download ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/edusoft/.
Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.
Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.

Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

Οι διδάσκοντες/ουσες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΓΑΒΡΟΓΛΟΥ

Εσωτ. Διανομή

- Γραφείο Υπουργού
- Γραφείο Αναπλ. Γενικού Γραμματέα
- Δ/νση Σπουδών, Προγρ/των & Οργάνωσης Δ.Ε., Τμ. Α΄
- Αυτ. Δ/νση Παιδείας, Ομογ., Διαπολ. Εκπ/σης, Ξένων και Μειον. Σχολείων
- Διεύθυνση Θρησκευτικής Εκπ/σης
- Δ/νση Ειδικής Αγωγής και Εκπ/σης
- Δ/νση Ιδιωτικής Εκπ/σης

Ψηφιακά υπογεγραμμένο από ANASTASIA PASCHALIDOU
Ημερομηνία: 2017.10.03 09:24:47 EEST

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ
Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Α΄

Ταχ. Δ/νση: Ανδρέα Παπανδρέου 37
Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι
Ιστοσελίδα: www.minedu.gov.gr
Πληροφορίες: Αν. Πασχαλίδου
Β. Πελώνη
Τηλέφωνο: 210-3443422
210-3442238

Βαθμός Ασφαλείας:
Να διατηρηθεί μέχρι:
Βαθ. Προτεραιότητας:

Αθήνα, 02-10-2017
Αρ. Πρωτ. 163573/Δ2

ΠΡΟΣ :

- **Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης**
- **Σχολ. Συμβούλους Δ.Ε. (μέσω των Περιφερειακών Δ/νσεων Εκπ/σης)**
- **Δ/νσεις Δ.Ε.**
- **Γενικά Λύκεια (μέσω των Δ/νσεων Δ.Ε.)**

ΠΡΟΣ : **Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.)**
info@iep.edu.gr

ΘΕΜΑ: Διαχείριση της Διδακτέας-Εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και της Δ΄ τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολ. έτος 2017 – 2018

Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. ΥΠ.Π.Ε.Θ. 157716/21-09-2017 έγγραφο

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 36/14-09-2017 του Δ.Σ) σας αποστέλλουμε τη διαχείριση της διδακτέας-εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και της Δ΄ τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολ. έτος 2017 – 2018.

Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Διαχείριση διδακτέας - εξεταστέας ύλης

ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση

Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθούν 37 διδακτικές ώρες)

Ειδικότερα:

§1.1 (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ' υπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει "αφορμές" στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

§1.2 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στις έννοιες της ισότητας και της σύνθεσης συναρτήσεων και στη χρήση και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων.

- **Να τονιστεί** ότι μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν . Ένα κατάλληλο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x)=x+|x|$ και $g(x)=x-|x|$ των οποίων συνιστάται να γίνει και η γραφική παράσταση.

§1.3 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Α) Να γίνουν ασκήσεις ελέγχου της ιδιότητας 1-1 μέσα από γραφήματα.

Β) Στην άσκηση 3 (σελ. 38) να μελετηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων που δίδονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Να γίνουν και άλλες τέτοιου τύπου ασκήσεις.

Γ) Να τονιστεί στους μαθητές ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορουν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις :
i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1<x_2$.
ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1>x_2$.

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη των προτάσεων:
Απόδειξη :
i) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$, για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει:

$$f(x_1)<f(x_2) \quad \text{και} \quad x_1 \geq x_2$$

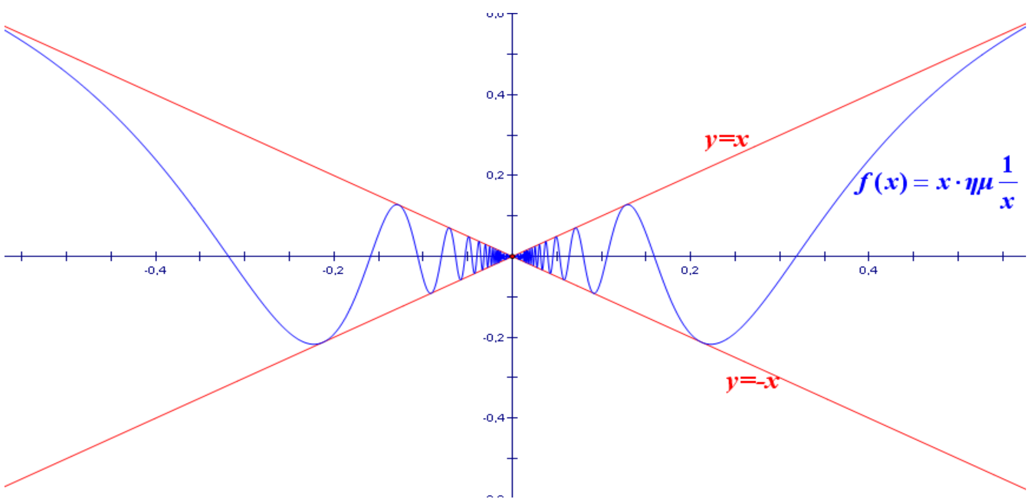
- Αν ήταν $x_1>x_2$,επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε $f(x_1)>f(x_2)$, που αντίκειται στην υπόθεση.

- Αν ήταν $x_1 = x_2$,από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ίσχυε: $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$,που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.
ii) Αντίστοιχη με την i.

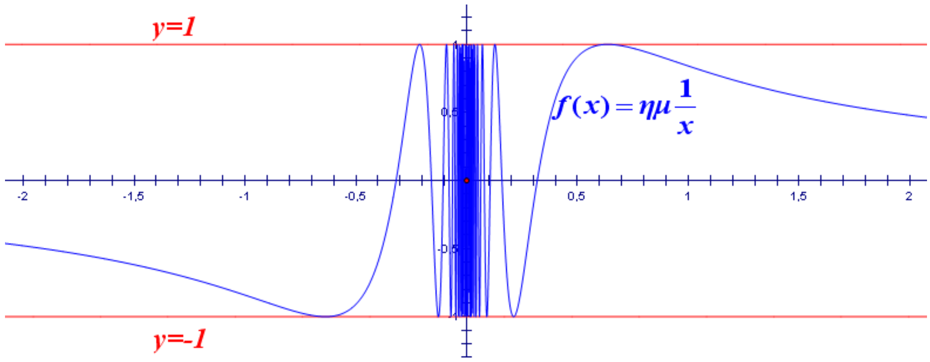
§1.4 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου (σελ. 161) δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους μαθητές, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο x_0 δεν επηρεάζει το όριο της όταν το x τείνει στο x_0, καθώς και ότι η τιμή του $\lim_{x \to x_0} f(x)$ καθορίζεται, από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο x_0. Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 αλλά μπορεί να διαφέρουν στο x_0 (παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια ορίζεται και η άλλη δεν ορίζεται ή καμία δεν ορίζεται) έχουν το ίδιο όριο όταν το x τείνει στο x_0 (σχολικό βιβλίο, σελ. 158-160). Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του x_0, δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του x_0 και σε ένα διάστημα δεξιά του x_0. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$ (Σχήμα 1).



<u>Σχήμα 1</u>

Επίσης, επειδή πολλοί μαθητές θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$ (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

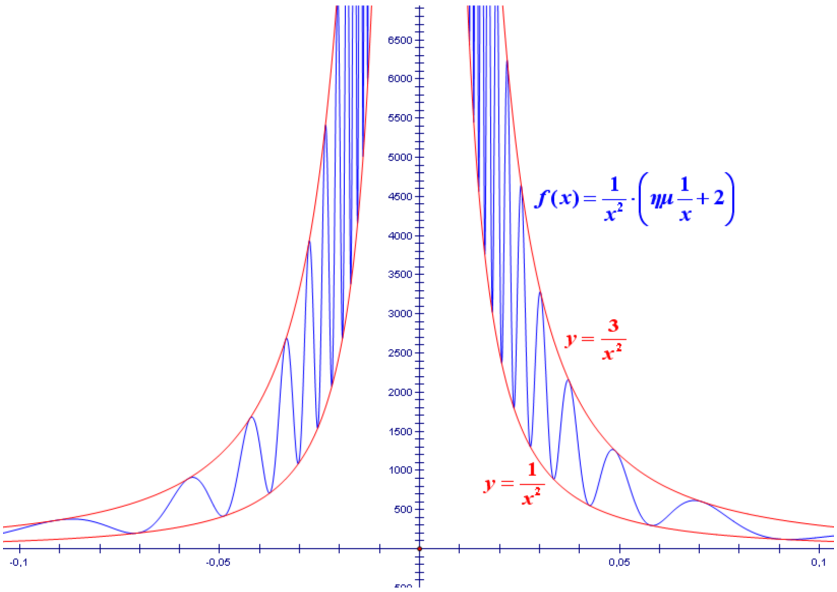
§1.5 (Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες)

Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους μαθητές να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}$» (άσκηση 3i) θα πρέπει να ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν αν οι $f(x) = \frac{x^4-16}{x^3-8}$ και $g(x) = \frac{(x^2+4)\cdot(x+2)}{x^2+2x+4}$ είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν είναι ίσες, να δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια. Επίσης σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 (σελ. 57), να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο

x_0 και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το x_0 να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο x_0 πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

§1.6 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

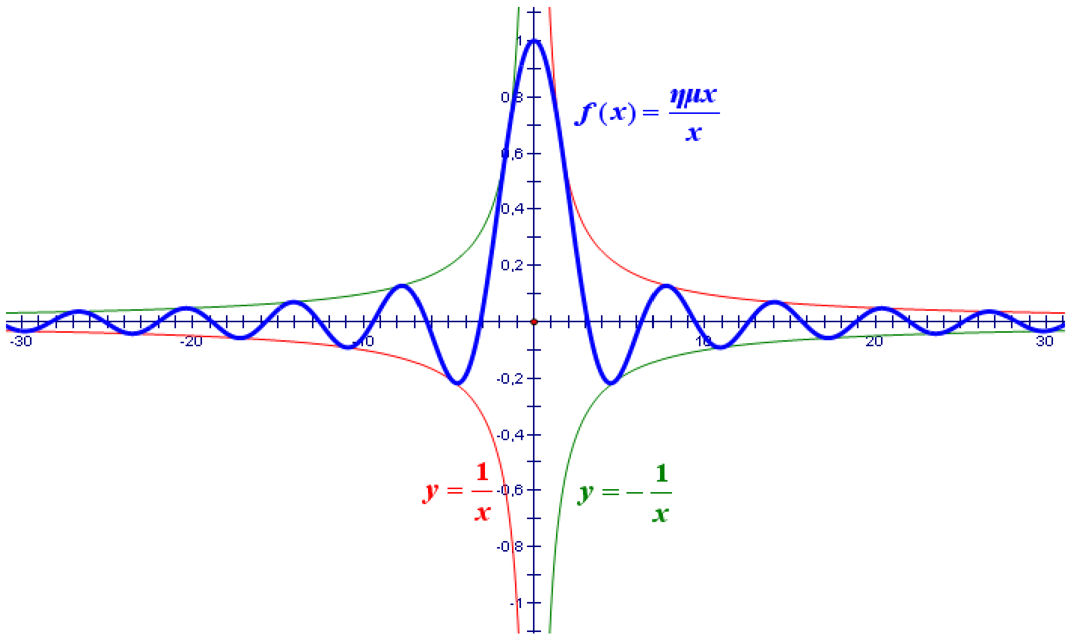
Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία, όπως π.χ. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\eta\mu\frac{1}{x}+2\right)$(Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο x_0 με τη μονοτονία.



Σχήμα 3

§1.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το x τείνει στο $+\infty$, υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το x τείνει στο $+\infty$, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\eta\mu x$.



Σχήμα 4

Τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$, να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές ποια είναι τα όρια αυτά.

Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο :

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

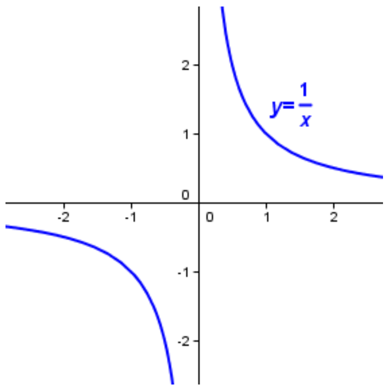
β) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

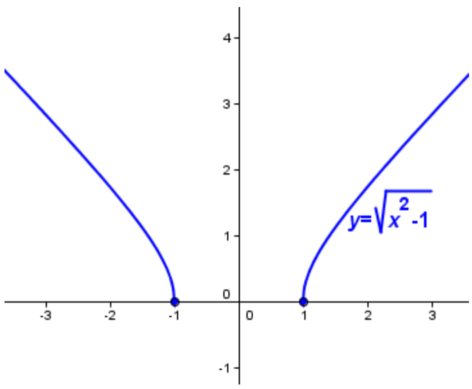
Η παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων μπορεί να γίνει διαισθητικά με την βοήθεια κατάλληλων γραφικών παραστάσεων

§1.8 (Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)

Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (Σχήμα 5) και $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (Σχήμα 6).



Σχήμα 5



Σχήμα 6

και να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους μαθητές και σχετικές ασκήσεις.

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.

Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντάνε οι μαθητές στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών (σελ. 76). Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.

- **Διευκρινίζεται ότι** στο θεώρημα της σελίδας 78, τα α, β μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα »

Κεφάλαιο 2^o (Προτείνεται να διατεθούν <u>46 διδακτικές ώρες</u>)

§2.1 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης (σελ. 96) να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους μαθητές γραφικά:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\begin{cases} x^2, & \alpha\nu\ x\le 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

§2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του h και του x στην έκφραση $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (σελ. 107). Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

§2.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί βάρος στην παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση της σελίδας 234 σχετικά με το ότι το σύμβολο $\dfrac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο.

Στην εφαρμογή 2 (σελ. 118) που αφορά στην εφαπτομένη του κύκλου να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους μαθητές η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνωρίσανε στη γεωμετρία.

§2.4 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για το λόγο αυτό καλό είναι να γίνει προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια και να δουν ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

§2.5 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των Θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών. Επειδή οι μαθητές έχουν χρησιμοποιήσει το Θεώρημα του Bolzano, σε ασκήσεις όπως η εφαρμογή 1 ii) μπορεί να συζητηθεί πρώτα η δυνατότητα απόδειξης με χρήση του Θεωρήματος Bolzano και να φανεί ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα στο κλειστό [0.1] για όλες τις τιμές του λ. Έτσι φαίνεται ότι το Θεώρημα Rolle αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο και για τέτοιες περιπτώσεις. Στην εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση τι εκφράζει το πηλίκο $\frac{S(2,5)-S(0)}{2,5}$ (μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου το γεγονός, ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια, να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

§2.6 (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του λόγου μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f είναι:

i) γνησίως αύξουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα *Δ* έχουν θετική κλίση.

ii) γνησίως φθίνουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα *Δ* έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 135 χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

§2.7 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Μετά την εφαρμογή 2 σελίδα 148 να διδαχθεί ως εφαρμογή η άσκηση 3 α) i) της Β΄ Ομάδας σελίδα 152. Ως απόδειξη, εκτός από εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο λύσεων, μπορεί να δοθεί και η ακόλουθη που είναι έμμεση συνέπεια της εφαρμογής 2.

Ζητούμενο: Για κάθε x είναι $e^x \geq x+1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

Απόδειξη: Για όλους τους θετικούς αριθμούς x ισχύει $\ln x \leq x-1$ και το «=» ισχύει αν και μόνο αν $x=1$. Επομένως και για τον θετικό e^x ισχύει $\ln e^x \leq e^x-1$ και το το «=» ισχύει μόνο για $e^x=1$ δηλαδή $x=0$. Επομένως $x \leq e^x-1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα $e^x \geq x+1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

§2.8 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§2.9 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De L' Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωση του, να δοθεί στους μαθητές να υπολογίσουν το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}$, το οποίο είναι της μορφής «$\frac{0}{0}$». Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι δυσκολεύονται να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

Να τονιστεί ότι οι κανόνες De l' Hospital δεν είναι πάντα πρόσφοροι για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών. Έτσι . Αν έχουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ και επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα βρίσκουμε $\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και $\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)''}{(x)''}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

δηλαδή επιστρέφουμε εκεί που αρχίσαμε χωρίς να βρούμε το όριο. Χωρίς τον κανόνα βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=1$

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ</u>

i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των *f* και *g* στο κοινό τους σημείο *Α(1,0)* είναι οι ευθείες $\varepsilon: y=x-1$ και $\zeta: y=-2x+2$ αντιστοίχως και να τις χαράξετε.

iii) Να κάνετε χρήση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ <u>*προσεγγίζονται*</u> από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο $x_0=1$ η τιμή του πηλίκου $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου $\dfrac{x-1}{-2x+2}$, δηλαδή ότι «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει:

$$\frac{\ln x}{1-x^2}\approx\frac{x-1}{-2x+2}=\frac{x-1}{-2(x-1)}=\frac{1}{-2},$$

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

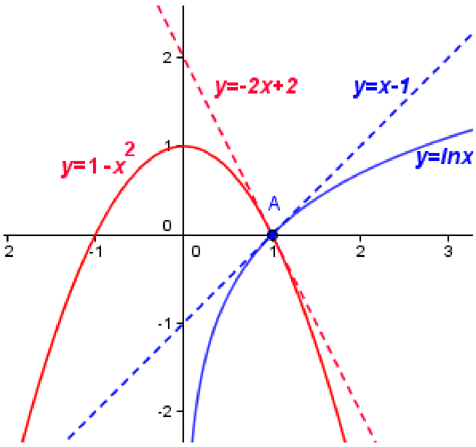
Επομένως, «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει $\dfrac{f(x)}{g(x)}\approx\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$, το οποίο υπό μορφή ορίου γράφεται:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(1)}{g'(1)}.$$

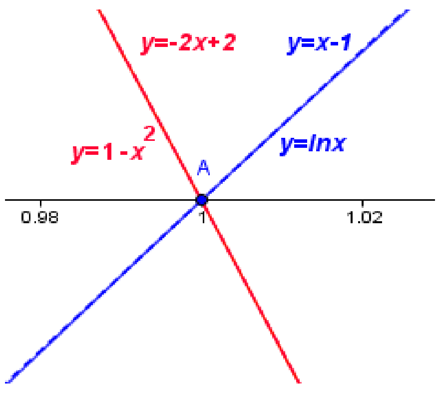
<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>

Η διαπίστωση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ <u>*προσεγγίζονται*</u> από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y=\ln x$ και $y=1-x^2$ και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ αντιστοίχως (σχήμα 7).
- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλλεπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο $A(1,0)$. Θα παρατηρήσουμε ότι η $y=\ln x$ θα συμπέσει με την ευθεία $y=x-1$, ενώ η $y=1-x^2$ θα συμπέσει με την ευθεία $y=-2x+2$ (σχήμα 8).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Να τονιστεί ότι ενδέχεται μια συνάρτηση να τέμνει μια πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της. Ως παράδειγμα μπορεί να δοθεί (ευκταίο να δοθεί και το γράφημα) η συνάρτηση

f(x)=x+ημ(1/χ). που έχει ασύμπτωτη την $y = x$ η οποία τέμνει την γραφική παράσταση σε άπειρα σημεία.

§2.10 (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Οι τέσσερις (4) διδακτικές ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινομένων ωρών να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

Κεφάλαιο 3^{ο} (Προτείνεται να διατεθούν <u>20 διδακτικές ώρες</u>)

§3.1 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Α) Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

Β) Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων (σελ. 187) να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

Α/Α	**Συνάρτηση**	**Παράγουσες**
1	$f(x)=0$	$G(x)=c,\ c\in \mathbf{R}$,
2	$f(x)=1$	$G(x)=x+c,\ c\in \mathbf{R}$
3	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c,\ c\in \mathbf{R}$
4	$f(x)=x^{\alpha}$	$G(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ c\in \mathbb{R}$
5	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c,\ c\in \mathbb{R}$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in \mathbb{R}$

7	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x)=\varepsilon\varphi x+c,\ c\in\mathbf{R}$
8	$f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x)=-\sigma\varphi x+c,\ c\in\mathbf{R}$
9	$f(x)=e^x$	$G(x)=e^x+c,\ c\in\mathbf{R}$
10	$f(x)=\alpha^x$	$G(x)=\dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c,\ c\in\mathbf{R}$

<u>Σημείωση</u>:

*Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **<u>διάστημα</u>** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.*

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της σελίδας 187 μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

i) Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ και

ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

Οι εφαρμογές των σελίδων 188 και 189 να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων. Να λυθούν μόνο οι ασκήσεις 2, 4, 5 και 7 της Α΄ Ομάδας.

Τυπογραφικό λάθος: Στη διατύπωση του Θεωρήματος (σελ. 186) αντί *c ϵ R να γραφεί G.*

§3.4 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου να γίνει με τρόπο που να αναδεικνύει την αξιοποίηση των αθροισμάτων και της οριακής διαδικασίας για την εύρεση – υπολογισμό του εμβαδού. Στη συνέχεια να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατό τητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:

«Εστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.
- Αν, <u>επιπλέον</u>, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha,\beta]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$»

Τυπογραφική διόρθωση: Στην ισότητα του πρώτου πλαισίου (σελ. 212) τα άκρα ολοκλήρωσης να αντιστραφούν.

§3.5 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Η εισαγωγή της συνάρτησης $\int_a^x f(t)dt$ *γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για το λόγο αυτό <u>δε θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις</u> που αναφέρονται στη συνάρτηση* $\int_a^x f(t)dt$ *και γενικότερα στη συνάρτησης* $\int_a^{g(x)} f(t)dt$*».*

§3.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

<u>Επισήμανση:</u>

Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη εξαιρούνται οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

Δ΄ ΤΑΞΗ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Διαχείριση διδακτέας - εξεταστέας ύλης

Η Διαχείριση της διδακτέας - εξεταστέας ύλης είναι αυτή που προτείνεται για τη διαχείριση της διδακτέας - εξεταστέας ύλης της Γ΄ Τάξη του Ημερησίου Γενικού Λυκείου κατά το κοινό τους μέρος, με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο και παράγραφο:

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση</u>

Κεφάλαιο 1^ο (Προτείνεται να διατεθούν <u>43 διδακτικές ώρες</u>)

Ειδικότερα:

§1.1 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

§1.2 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

§1.3 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.4 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.5 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§1.6 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.7 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§1.8 (Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 2^ο (Προτείνεται να διατεθούν <u>56 διδακτικές ώρες</u>)

§2.1 (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

§2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§2.3 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.4 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§2.5 (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

§2.6 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.7 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.9 (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

Επισήμανση:

Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη εξαιρούνται οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

Οι διδάσκοντες/ουσες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΓΑΒΡΟΓΛΟΥ

Εσωτ. Διανομή

- Γραφείο Υπουργού
- Γραφείο Αναπλ. Γενικού Γραμματέα
- Δ/νση Σπουδών, Προγρ/των & Οργάνωσης Δ.Ε., Τμ. Α΄
- Αυτ. Δ/νση Παιδείας, Ομογ., Διαπολ. Εκπ/σης, Ξένων και Μειον. Σχολείων
- Διεύθυνση Θρησκευτικής Εκπ/σης
- Δ/νση Ειδικής Αγωγής και Εκπ/σης
- Δ/νση Ιδιωτικής Εκπ/σης