ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 1

ΚΥΡΙΑΚΗ, 2 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1.Έχουμε:

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)\cdot h$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$

επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x+0=2x$$

Άρα $f'(x)=(x^2)'=2x$

Α2. i. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_o\in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.

ii. Το εύρος ή κύμανση (R) ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από την μέγιστη παρατήρηση.

Δηλαδή : Εύρος R= Μεγαλύτερη παρατήρηση - Μικρότερη παρατήρηση .

Α3.

α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ**. Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή η συχνότητα ν_2 της δεύτερης κλάσης είναι πενταπλάσια της συχνότητας ν_4 της τέταρτης κλάσης έχουμε: $\nu_2=5\nu_4$

Όμως:

$$\omega_4=36\Leftrightarrow 360\cdot f_4=36\Leftrightarrow \frac{\nu_4}{40}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow \nu_4=4$$

Επομένως $\nu_2=5\nu_4=5\cdot 4=20$.Επίσης $N_2=25$ ή $\nu_1+\nu_2=25$ ή $\nu_1+20=25$ ή $\nu_1=5$

$\nu_3=40\cdot f_3=40\cdot\dfrac{f_3\,\%}{100}=40\cdot 0{,}15=6$

Β2. i. Για $\nu_1=5, \nu_2=20, \nu_3=6, \nu_4=4$ έχουμε

$\nu_5=\nu-(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)=40-35=5$

$N_1=\nu_1=5,\ \ N_2=\nu_1+\nu_2=5+20=25,$

$N_3=\nu_1+\nu_2+\nu_3=31,\quad N_4=35\quad N_5=\nu=40$

$f_i\,\%=\dfrac{\nu_i}{\nu}\,100=\nu_i\dfrac{100}{40}=2{,}5\cdot\nu_i$ άρα $f_1\,\%=2{,}5\cdot 5=12{,}5,\ f_2\,\%=50$, $f_3\,\%=15$,

$f_4\,\%=10$, $f_5\%=12{,}5$

Ετ.εισόδημα (χιλ.ευρώ) κλάσεις	Μέσο κλάσης x_i	Αριθμός νοικοκυριών ν_i	N_i	f_i %	$x_i\nu_i$
[5, 15)	10	5	5	12,5	50
[15, 25)	20	20	25	50	400
[25, 35)	30	6	31	15	180
[35, 45)	40	4	35	10	160
[45, 55)	50	5	40	12,5	250
Σύνολα		ν=40		100	1040

ii. Μέση τιμή $\bar{x} = \dfrac{1040}{40} = 26$

Μέσο κλάσης x_i	Αριθμός νοικοκυριών ν_i	$(\bar{x}-x_i)^2\,\nu_i$
10	5	1280
20	20	720
30	6	96
40	4	784
50	5	2880
	ν=40	5760

Άρα :

$$s^2=\frac{5760}{40}=144 \quad \text{και} \quad s=\sqrt{144}=12$$

Β3.

i. Σε 5+10=15 νοικοκυριά το ετήσιο εισόδημα ήταν το πολύ 20.000 ευρώ.

ii. Το ποσοστό των νοικοκυριών με ετήσιο εισόδημα τουλάχιστον 35.000 ευρώ είναι 10+12,5=22,5 **%**

Β4. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής 25.000 ευρώ είναι :

$$\bar{y}=\frac{x_1\cdot\nu_1+x_2\cdot\nu_2}{\nu_1+\nu_2}=\frac{50+400}{25}=\frac{450}{25}=18$$ χιλιάδες ευρώ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=[-3,+\infty)$

Γ2. Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει διακρίνουσα Δ=1 και ρίζες $x=1, x=2$

και γράφεται $x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2)$

άρα :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}= \;=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)=(1-2)\cdot\left(\sqrt{1+3}+2\right)=-4$$

Γ3. i. $f'(x)=\left(\sqrt{x+3}-2\right)'=\left(\sqrt{x+3}\right)'-(2)'=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\cdot(x+3)'=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ii. Αφού στο ζητούμενο σημείο Α της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y=\frac{1}{4}x$ έχουμε :

$$f'(x)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+3}}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2 \Leftrightarrow x=1$$

Για $x=1$, $f(1)=\sqrt{1+3}-2=0$ άρα $A(1,0)$

Γ4. $f(1)=\sqrt{1+3}-2=0$, $f(6)=1$, $f(13)=2$, $f(22)=3$, $f(33)=4$

$\bar{x}=\frac{0+1+2+3+4}{5}=2$

$s^2=\frac{4+1+0+1+4}{5}=2$ επομένως $s=\sqrt{2}\approx 1,41$ και

$CV=\frac{s}{\bar{x}}\approx\frac{1,41}{2}\cdot 100\%\approx 70,5\%>10\%$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. $f(x)=x^3-ax^2+x+\beta$, $f'(x)=3x^2-2ax+1$

♦επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ έχουμε:

$f(1)=1\Leftrightarrow 1^3-a\cdot 1^2+1+\beta=1\Leftrightarrow \beta=\alpha-1$

•$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0 \Leftrightarrow f'(1)=0\Leftrightarrow 3\cdot 1^2-2a\cdot 1+1=0\Leftrightarrow 4-2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=2$

$\beta=\alpha-1=2-1=1$

ii. $f(x)=x^3-2x^2+x+1$, $f'(x)=3x^2-4x+1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$

Το τριώνυμο $3x^2-4x+1=0$ έχει διακρίνουσα Δ=16-12=4 και ρίζες $x=\frac{1}{3}$, $x=1$

πίνακας προσήμου f'.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$f(x)$	γν.αύξουσα	γν.φθίνουσα	γν.αύξουσα	

$f'(0)=1>0$

Μονοτονία: η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ και $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3},1\right]$.

Ακρότατα:

Η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x=\frac{1}{3}$ τοπικό μέγιστο το:

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{1-6+9+27}{27}=\frac{31}{27}$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x=1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1)=1-2+1+1=1$

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, είναι :

$f'(x)=3x^2-4x+1$

$f''(x)=6x-4$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

πίνακας προσήμου f''.

x	$-\infty$ $\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0 $+$
$f'(x)$	γν.φθίνουσ	γν.αύξουσα

$f''(0)=-4<0$

Άρα η ελάχιστη τιμή είναι :

$$f'(\frac{2}{3})=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+1=-\frac{1}{3}$$

Δ3. $f(0)=1$ $f'(0)=1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$y=f'(0)x+\beta=x+\beta$

Επειδή το σημείο $M(0,1)$ ανήκει στην εφαπτομένη έχουμε: $1=0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$

Άρα: $y=x+1$

Δ4. $x(t)=f(t) \Rightarrow x'(t)=f'(t)=3t^2-4t+1$

Η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon(t)=3t^2-4t+1$, άρα το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο ,

όταν $\upsilon(t)=3t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ s ή $t=1$ s

Η συνολική απόσταση που διανύθηκε από το σώμα στα πρώτα 5 sec είναι:

$$S=\left|f\left(\frac{1}{3}\right)-f(0)\right|+\left|f(1)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right|+\left|f(5)-f(1)\right|=\left|\frac{31}{27}-1\right|+\left|1-\frac{31}{27}\right|+\left|81-1\right|=$$

$$=\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+80\approx 80,29m.$$

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης , Καθηγητής Μαθηματικών