ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 1

ΣΑΒΒΑΤΟ, 10 ΜΑΡΤΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. i. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών και στη συνέχεια να το αποδείξετε.

ii. Να δώσετε ένα παράδειγμα, σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα, μιας συνάρτησης f που δεν είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$ και η οποία **δεν** παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα $\mathrm{f}(\alpha), \mathrm{f}(\beta)$.

Α2. Να βρείτε το **λάθος** στον επόμενο συλλογισμό **.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **.**

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{u}^2}}\cdot\left(-\frac{1}{\mathrm{u}^2}\right)\mathrm{du}=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\mathrm{u}^2}\mathrm{du}=-\mathrm{I}$$

(θέσαμε $x=\frac{1}{u}$, οπότε $dx=-\frac{1}{u^2}du$).

Άρα $\mathrm{I}=-\mathrm{I}$, οπότε $\mathrm{I}=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού $\mathrm{I}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}>0$, επειδή $\frac{1}{1+\mathrm{x}^2}>0$ για κάθε $\mathrm{x}\in\left[-1, 1\right]$.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$.

β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $[\mathrm{f}(\alpha), \mathrm{f}(\beta)]$ ή $[\mathrm{f}(\beta), \mathrm{f}(\alpha)]$.

.

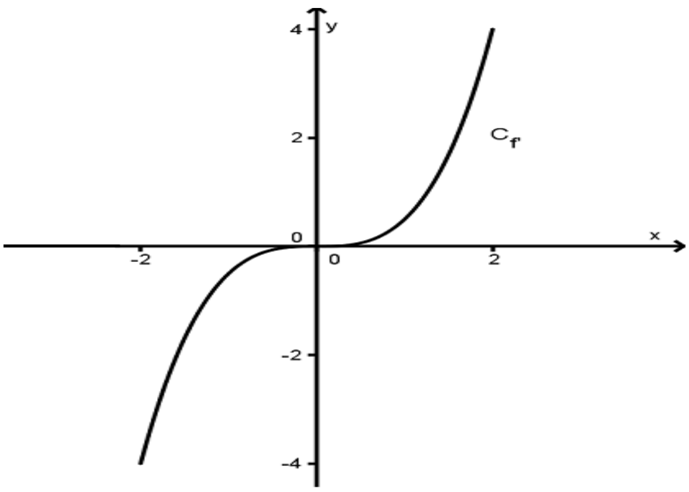
γ) Αν για κάθε συνάρτηση f και για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της που ισχύει:

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0^+}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}=\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0^-}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}$$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) Για όλες τις συνεχείς στο R συναρτήσεις με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx \ (\alpha, \beta, \gamma \in R)$, ισχύει $\beta = \gamma$.

Α4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Το σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της f
2. θέση τοπικού ελάχιστου της f
3. σημείο καμπής της C_f

ΛΥΣΗ

Α1.

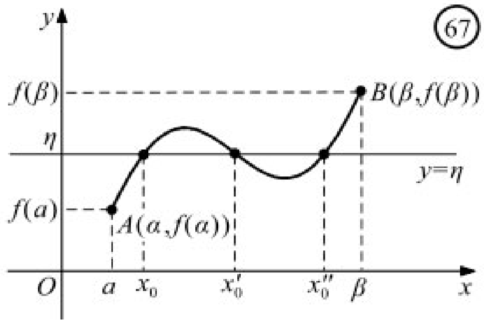
i. Διατύπωση του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (επόμενο σχήμα).

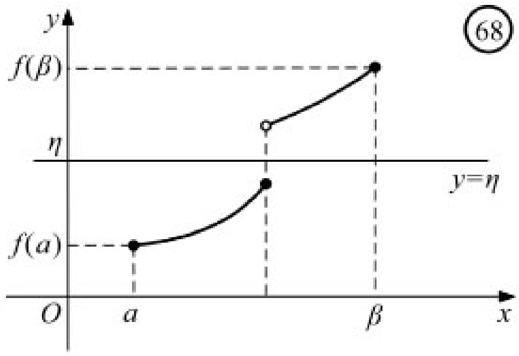
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι :



● η g είναι συνεχής στο [α, β] και

● g(α) g(β) < 0 , αφού g(α) = f(α) − η < 0 και g(β) = f(β) − η > 0 Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - η = 0$, οπότε $f(x_0) = η$.

ii. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Α2. Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$. Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u .

Α3.

α. Σωστό.

β. Λάθος.

γ. Λάθος.

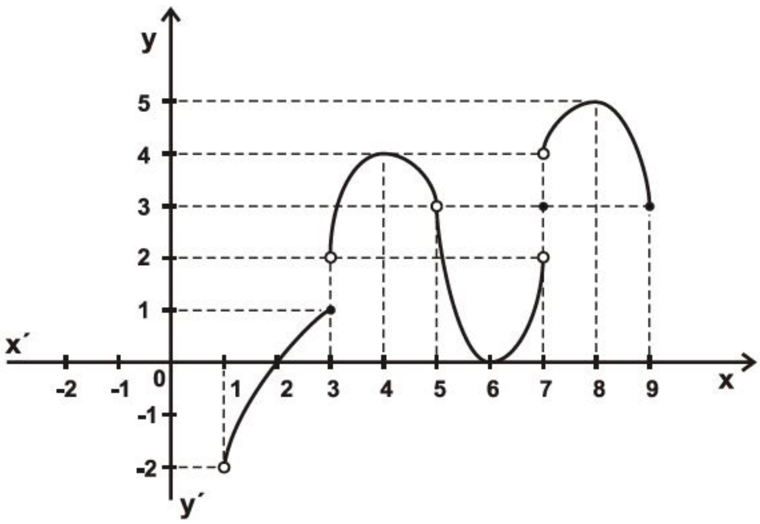
δ. Σωστό.

ε. Λάθος.

Α4. Το 2 (Το σημείο $A(0, f(0))$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f) διότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2, 0)$ και συνεχής στο $[-2, 0]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$. Ακόμα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και συνεχής στο $[0, 2]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ 2]$. Επομένως στο $x_0 = 0$ έχει τοπικό ελάχιστο ,δηλαδή το σημείο $A(0,\ f(0))$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f\big(f(x)\big)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f΄(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ

Β1. Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f είναι $A=(1,5)\cup(5,\ 9]$.

Το σύνολο τιμών $f(A)$ είναι $f(A)=(-2,\ 5]$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=3=\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4\neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=\lim\limits_{x\to 9^+} f(x)=3$

Β3.
α) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$,διότι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$

Δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$.

β) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(5,7)$

γ) θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=u_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=5=u_0$.

Επομένως έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=\lim\limits_{u\to 5} f(u)=3$

Β4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1=3$ και $x_2=7$ αφού:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4\neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

Β5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x)=0$ είναι $\begin{matrix} x_3=4 \\ x_4=6 \\ x_5=8 \end{matrix}$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη (παράλληλη με τον άξονα x΄x) οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε $f'(x_3)=f'(x_4)=f'(x_5)=0$.

ή εναλλακτικά : Η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_3,\ x_4,\ x_5$ στα οποία είναι παραγωγίσιμη και επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι $f'(x_3)=f'(x_4)=f'(x_5)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=e^x+x^2+x,\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha\in(-1,\ 0)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει: $e^\alpha+2\alpha+1=0$.

Γ2. Να δείξετε ότι: $f(x)\geq\alpha^2-\alpha-1$ για κάθε $x\in R$, όπου α ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=\dfrac{2017}{2016}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x^2+1\right)+f\left(x^2+2\right)<f\left(x^2\right)+f\left(x^2+3\right),\ \text{για κάθε } x>0$$

Γ5. Έστω ένα σημείο $M\big(x(t),\ y(t)\big)$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t)\neq0$, $x(t)\leq0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0, με $x(t_0)\in(-1,\ 0)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M, ως προς το χρόνο, να μηδενίζεται.

ΛΥΣΗ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την g στο $[-1,\ 0]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-1,\ 0]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,\ 0]$).
- $g(0)=2>0$

- $g(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0$

Άρα υπάρχει $a\in(-1,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $g(a)=0 \Leftrightarrow e^{a}+2a+1=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$), με $g'(x)=e^{x}+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in\mathbb{R}$, άρα και «1-1» , δηλαδή η η g έχει μοναδική ρίζα την $x=a$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x)=e^{x}+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Άρα $f'(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ και η g έχει μοναδική ρίζα την $x=a$. Έχουμε:

$$x<a \Rightarrow g(x)<g(a) \Rightarrow f'(x)<0$$
$$x>a \Rightarrow g(x)>g(a) \Rightarrow f'(x)>0$$

Δηλαδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\ \alpha)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\ \alpha]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ \alpha]$. Ακόμα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(a,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\ +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\alpha$, το $f(a)=e^{a}+a^{2}+\alpha$ (1).

Όμως έχουμε:

$$g(a)=0 \Leftrightarrow e^{a}+2a+1=0 \Leftrightarrow e^{a}=-2a-1 \ (2)$$

Άρα η (1) δίνει:

$$f(a)=e^{a}+\alpha^{2}+\alpha=-2a-1+\alpha^{2}+\alpha=\alpha^{2}-\alpha-1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x)\geq f(a) \Rightarrow f(x)\geq \alpha^{2}-\alpha-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ3. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{x}+x^{2}+x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}(e^{x}+x^{2}+x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^{2}\left(\frac{e^{x}}{x^{2}}+1+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty.$$

Αν $\Delta_1=\left(-\infty,\ \alpha\right]$, $\Delta_2=\left[\alpha,+\infty\right)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\Delta_1)&=\left[\alpha^{2}-\alpha-1,\ +\infty\right) \\ f(\Delta_2)&=\left[\alpha^{2}-\alpha-1,\ +\infty\right) \end{aligned}$$ (επειδή η f γν. φθίνουσα στο Δ_1 και γν. αύξουσα στο Δ_2)

Είναι:

$$\alpha\in(-1,\ 0) \Rightarrow -1<\alpha<0 \Rightarrow \begin{cases} 0<\alpha^{2}<1 \\ 0<-\alpha<1 \end{cases} \Rightarrow -1<\alpha^{2}-\alpha-1<1 \ \text{ και } \ \frac{2017}{2016}>1.$$

Επομένως:

- $\dfrac{2017}{2016} \in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty,\ \alpha)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_1) = \dfrac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 ,είναι και «1-1».
- $\dfrac{2017}{2016} \in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $\rho_2 \in (a, +\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_2) = \dfrac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως αύξουσα στο Δ_2, είναι και «1-1».

Επομένως η f έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $\rho_1,\ \rho_2$.

Γ4. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται διαδοχικά:

$$f(x^2+1) + f(x^2+2) < f(x^2) + f(x^2+3) \Leftrightarrow f(x^2+1) - f(x^2) < f(x^2+3) - f(x^2+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x^2+1) - f(x^2)}{(x^2+1) - x^2} < \frac{f(x^2+3) - f(x^2+2)}{(x^2+3) - (x^2+2)} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση f στα διαστήματα $[x^2,\ x^2+1]$ και $[x^2+2,\ x^2+3], x \in \mathbb{R}$:

- Η f παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[x^2,\ x^2+1]$ και $[x^2+2,\ x^2+3], x \in \mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$). Άρα η f είναι και συνεχής στα διαστήματα αυτά. Επομένως υπάχουν αντίστοιχα :

$$\xi_1 \in (x^2, x^2+1),\ \xi_2 \in (x^2+2,\ x^2+3) \text{ με:}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2+1) - f(x^2)}{(x^2+1) - x^2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+3) - f(x^2+2)}{(x^2+3) - (x^2+2)}$$

Έτσι η προς απόδειξη σχέση (1) γίνεται $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, η οποία είναι αληθής αφού:

$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ διότι $f''(x) = e^x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (f' συνεχής στο $\mathbb{R}$).

Γ5. Έχουμε ότι $y(t) = e^{x(t)} + x^2(t) + x(t),\ t \ge 0$ (2). Τα μέλη της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $t \ge 0$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $t \ge 0$). Επομένως έχουμε:

$$y'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 2x(t) \cdot x'(t) + x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = x'(t)\left(e^{x(t)} + 2x(t) + 1\right) (3)$$

Αν $t = t_0$ είναι η χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το $(a, f(a))$, τότε $x(t_0) = \alpha \in (-1,\ 0)$.

Η σχέση (3) για $t = t_0$ γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0)\left(e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1\right) \ (4) \text{ με } x'(t) \neq 0$$

Ισχύει ακόμα ότι $e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1 = e^a + 2a + 1 = 0$ (5). Η σχέση (4), λόγω της σχέσης (5) γίνεται $y'(t_0) = x'(t_0) \cdot 0 = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \to R$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x)=x\eta\mu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f(0)=0$$

Δ1. i. Να δείξετε ότι:

$$f(x)=\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

ii. Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Δ2. Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=\left|x\varepsilon\varphi x - x^2\right|,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. i. Αν $\alpha>0$, να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x)=\alpha$ είναι μηδέν.

ii. Έστω $x_1,\ x_2,\ x_3$ οι θετικές ρίζες των εξισώσεων

$g(x)=1,\ g(x)=2,\ g(x)=3$ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$(x_2-x_1)g'(\xi_1)+(x_3-x_2)g'(\xi_2)=2$$

Δ4.

ι. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x}$$

ιι. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$.

ΛΥΣΗ

Δ1. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = x\cdot\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\cdot\eta\mu x \Leftrightarrow (\eta\mu x - f(x))' = (x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c,\ \text{όπου } c\in\mathbb{R} \text{ σταθερά}$$

για $x=0$ έχουμε $f(0)=0+c \Leftrightarrow 0=c \Leftrightarrow c=0$

άρα:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

ii. $f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = x\eta\mu x > 0$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει:

$$0<x<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0)<f(x) \Leftrightarrow 0<\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$$

Δ2. $g(x) = |x\varepsilon\varphi x - x^2| = |x|\cdot|\varepsilon\varphi x - x|$

Από το ερώτημα (Δ1 ii) ισχύει:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x > x.$$

'Εχουμε:

- αν $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ τότε $-x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(-x) > -x \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x > -x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x < x$$

για $x=0 \Rightarrow g(0)=0$

Άρα $g(x) = x\varepsilon\varphi x - x^2$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$g'(x) = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - x =$$

$$= \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + x\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + x\cdot\varepsilon\varphi^2 x$$

- αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\varepsilon\varphi x - x > 0$ και $x\cdot\varepsilon\varphi^2 x > 0$ άρα $g'(x) > 0$

- αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τότε $\varepsilon\varphi x - x < 0$ και $x \cdot \varepsilon\varphi^2 x < 0$ άρα $g'(x) < 0$
- για $x = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η g παρουσιάζει για x=0 ολικό ελάχιστο το g(0)=0 .

2ος τρόπος:

$$g'(x) = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\right) + x\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

- $g'(0) = 0$
- αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu x > 0$, $\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$ και $x \cdot \eta\mu^2 x > 0$ άρα $g'(x) > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

- έστω $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g\left(-x_1\right) > g\left(-x_2\right) \Rightarrow g\left(x_1\right) > g\left(x_2\right)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η g παρουσιάζει για x=0 ολικό ελάχιστο το g(0)=0 .

Δ3. i. $g(x) = a$, όπου $a > 0$

- $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$ και $a \in [0, +\infty)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_o \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$) τέτοιο, ώστε $g\left(x_o\right) = a$

- $-x_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $g\left(-x_o\right) = \left(-x_o\right)\varepsilon\varphi\left(-x_o\right) - \left(-x_o\right)^2 = g\left(x_o\right) = a$

Το $-x_o$ είναι μοναδικό (γιατί η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$)

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = a$, όταν $a > 0$ είναι : $-x_o + x_o = 0$.

ii. Επειδή x_1 , x_2 , x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων

$g(x) = 1$, $g(x) = 2$, $g(x) = 3$ αντίστοιχα, έχουμε:

$$g(x_1)=1,\ g(x_2)=2\ ,\ g(x_3)=3$$

και είναι:

$$1<2<3 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)<g(x_3) \Leftrightarrow x_1<x_2<x_3$$

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού για την g στα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$(αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι g παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, επομένως και στα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$, άρα και συνεχής σε αυτά) έχουμε:

$$(x_2-x_1)\cdot g'(\xi_1)=g(x_2)-g(x_1)=2-1=1 \quad ,\xi_1\in(x_1,x_2)$$
$$(x_3-x_2)\cdot g'(\xi_2)=g(x_3)-g(x_2)=3-2=1 \quad ,\xi_2\in(x_2,x_3)$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$(x_2-x_1)\cdot g'(\xi_1)+(x_3-x_2)\cdot g'(\xi_2)=2$$

Δ4. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[\eta\mu x-f(x)]-\ln x+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}\overset{D.L.P}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x+2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x+1}\overset{D.L.P}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu^2 x+2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 0-2\eta\mu^2 0+2\eta\mu 0+0\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1}{2}$$

<u>2ος τρόπος:</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[\eta\mu x-f(x)]-\ln x+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}+1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=l$$

- $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}\overset{D.L.H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x}{2x}\overset{D.L.H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}=-\frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1^2=1$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\overset{D.L.H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\eta\mu x}{1}=0$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f\left(x\right)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$$

ii.

Για $0 < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$ (I) (από το ερώτημα Δ1 ii) και $x\eta\mu x > 0$ (II) για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x > 0 \ \text{(III), για κάθε } x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,\ -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο $(0,0)$ (αφού $f(0) = f'(0) = 0$).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ είναι (λόγω της σχέσης (III) έχουμε

$$\left|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\right| = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x \ \text{για κάθε } x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\text{):}$$

$$E(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x) - f'(x)\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx = I_1 - I_2 + I_3 \ (1)$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu x)'dx = \left[x\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} + \left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sigma\upsilon\nu x)'dx = -\left[x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx = \left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Άρα: $E(\Omega) = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 1 = 3 - \frac{\pi}{2}$ τ.μ.

<u>Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής των</u> $f,\ -f'$ **<u>έχουμε:</u>**

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,\ -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο $(0,0)$ αφού :

$$f(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x = 0 \ (1)$$

Προφανώς για $x = 0$ η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι $f,\ -f'$ τέμνονται στο Ο $(0,0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{K}(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x,\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$(ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$) με $\mathrm{K}'(x) = x\eta\mu x + \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η K είναι συνεχής στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και «1-1» και επομένως η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι $f,\ -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $\mathrm{O}\,(0,0)$.

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης , Καθηγητής Μαθηματικών