Ερωτήσεις κατανόησης κεφ .3 σελίδων 354 - 359

I

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1.

Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)+g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ Α Ψ

Αιτιολογία

Βασική ιδιότητα

2

$\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)\ g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\ \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ Α Ψ

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα :
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=1,\quad g(x)=1$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)\cdot g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}1dx=[x]_{\alpha}^{\beta}=\beta-\alpha$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\ \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}1dx\ \int_{\alpha}^{\beta}1dx=(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)$$

3.

Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Βασική ιδιότητα

4.

Αν $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκην θα είναι $f(x)=0$ Α Ψ
για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα :

$$\int_{0}^{2\pi}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{2\pi}=-\sigma\upsilon\nu 2\pi+\sigma\upsilon\nu 0=0$$

Αλλά δεν είναι ημx = 0 για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

5.

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ 　　 Α 　　 Ψ

Αιτιολογία

Βασική ιδιότητα

6.

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ 　　 Α 　　 Ψ

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα :

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu 0 = 0 + 1 = 1 > 0$$

Αλλά $\eta\mu x < 0$ όταν $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

7.

$\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx$ για κάθε $\alpha > 0$ 　　 Α 　　 Ψ

Αιτιολογία

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} [(x^4 + x^2 + 1) - (x^4 + 1)]dx$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1 - x^4 - 1)]dx$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx > 0 \text{ από θεώρημα.}$$

8.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \eta\mu^2 x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma\upsilon\nu x)dx$ 　　 Α 　　 Ψ

Αιτιολογία

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \eta\mu^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma\upsilon\nu^2 x)dx \overset{*}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma\upsilon\nu x)dx$$

* Είναι $\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

9.

$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$ 　　 Α 　　 Ψ

Αιτιολογία

Παραγοντική ολοκλήρωση

10.

$\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln\frac{1}{t} dt$ A Ψ

Αιτιολογία

$$\int_e^1 \ln\frac{1}{t} dt = \int_e^1 \ln t^{-1} dt = -\int_e^1 \ln t dt = \int_1^e \ln t dt = \int_1^e \ln x dx$$

11.

Εκτός ύλης

12

Εκτός ύλης

13.

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$

τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές A Ψ

Αιτιολογία

Αν ήταν $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε θα είχαμε

$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$ αντίστοιχα.

14.

Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του

χωρίου που περικλείεται από τον άξονα των x και την C_f. A Ψ

Αιτιολογία

Για να παριστάνει το εμβαδόν θα έπρεπε να είναι

$x^3 - x \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, που δεν ισχύει.

II

Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

1.

Αν $f'(x) = ημπx$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

A. $-\frac{1}{\pi}$ B. $\frac{1}{\pi}$ Γ $-\frac{2}{\pi}$ Δ $\frac{2}{\pi}$

2.

Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{4-x}dx$ στο $(4, +\infty)$ είναι ίσο με

A. $\ln(4-x) + c$ B. $-\ln(4-x) + c$

Γ. $\ln(x-4) + c$ Δ $-\ln(x-4) + c$

3.

Το ολοκλήρωμα $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ στο $(0, +\infty)$ είναι ίσο με

A. $\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3} + c$ B. $2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

Γ. $\frac{(1-\ln x)^3}{3} + c$ Δ $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + c$

E. $\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + c$

4.

Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} |x^2 - 1| dx$ είναι ίσο με

A $\frac{4}{3}$ B. 0 Γ. $-\frac{4}{3}$ Δ. $\frac{2}{3}$ E. $\frac{5}{3}$

5.

Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{x}+c$ Β. $\frac{\ln^2 x}{2}+c$ Γ $x(\ln x-1)+c$ Δ. $\frac{\ln^3 x}{3}+c$

6.

Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο [α, β].

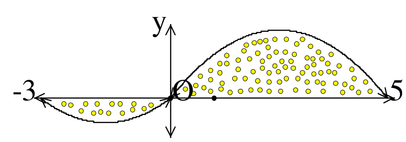
Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

Α. $f'(x) \le g'(x), \quad x \in [\alpha, \beta]$ Β $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Γ. $\int f(x)dx \le \int g(x)dx , \ x \in [\alpha, \beta]$ Δ. $\int_\beta^\alpha f(x)dx \le \int_\beta^\alpha g(x)dx$

7.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος είναι ίσο με



Α. $\int_{-3}^{5} f(x)dx$ Β. $\int_{5}^{-3} f(x)dx$

Γ. $\int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{5} f(x)dx$ Δ $-\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$

8.

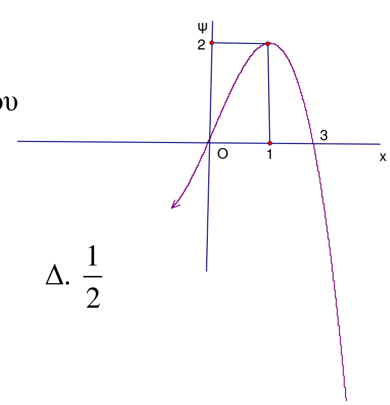
Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = g(0) + 2$, τότε για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει :

Α. $f(x) = g(x) - 2$ Β $\int_{-1}^{1} (f(x)-g(x))dx = 4$

Γ. $f(x) \le g(x) , \ x \in [-1, 1]$ Δ. Οι C_f , C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1, 1]$

9.

Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.



Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με

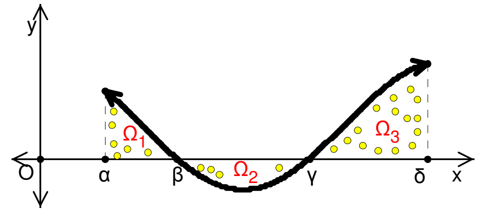
Α. 0 Β. 1 Γ 2 Δ. $\frac{1}{2}$

10.

Έστω f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος .

Αν $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$

τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ ισούται με

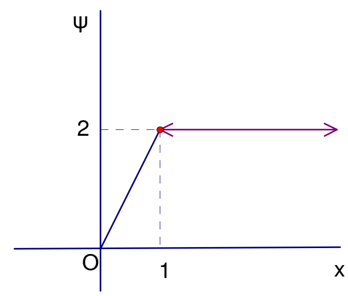


Α. 6 Β. – 4 Γ. 4

Δ. 0 Ε. 2

11.

Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε



Α. $F(x) = x^2$

Β. $F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \end{cases}$

Γ. $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x, & 1 \le x \end{cases}$

Δ $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x-1, & 1 \le x \end{cases}$

III

1.

Εκτός ύλης

2.

Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένα ;

Α. $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ Β $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx$ Γ. $\int_0^{\pi} \varepsilon\varphi x dx$

Δ. $\int_0^1 \ln x dx$ Ε. $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}dx$ Ζ $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$

3.

Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$\int \frac{1}{x}dx = \int x' \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x}dx \qquad \text{Άρα} \quad \int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx, \quad \text{οπότε } 0 = 1$$

Απάντηση

Κάθε αόριστο ολοκλήρωμα είναι σύνολο συναρτήσεων και όχι μια συνάρτηση.

Στην τελευταία ισότητα, διαγράφεται το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x}dx$ του $1^{ου}$ μέλους με το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x}dx$ του $2^{ου}$ μέλους που δεν είναι ίσα, αλλά διαφέρουν κατά σταθερά.

Συγκεκριμένα, αν $F(x)$ είναι μία αρχική της $f(x)$, τότε το συμπέρασμα γράφεται

$F(x) + c_1 = 1 + F(x) + c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 - c_2 = 1$ και όχι $0 = 1$

4.

Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}du = -I \qquad \left(\text{Θέσαμε } \frac{1}{u} = x \quad \text{οπότε} \quad dx = -\frac{1}{u^2}du\right)$$

Άρα $I = -I$ οπότε $I = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx > 0$$

επειδή $\frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

Απάντηση

Η αντικατάσταση $\frac{1}{u} = x$ δεν είναι σωστή διότι :

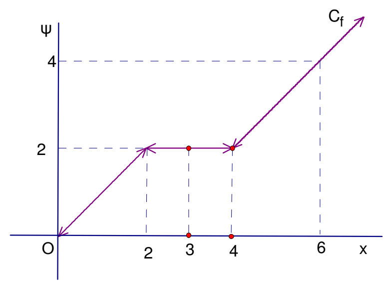
Όταν το x παίρνει την τιμή 0, δεν υπάρχει αντίστοιχο u, αφού $x = \frac{1}{u}$

5.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά



F(0) = 0 F(2) = 2 F(3) = 4 F(4) = 6 F(6) = 12