

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ**

στην

**ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5<sup>ο</sup>**

**Ε Κ Θ ΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**

**Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου**

**Ερωτήσεις Θεωρίας**

**Θέματα της Τράπεζας Θεμάτων του Υπουργείου**

**Προτεινόμενα Θέματα**

**Διαγωνίσματα**

*Επιμέλεια: Συντακτική Ομάδα mathp.gr*

*Συντονισμός: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος*

## Α. Ερωτήσεις Αντικειμενικού τύπου

### • Σωστό-Λάθος

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $a > 1$  είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε για οποιαδήποτε  $\theta_1, \theta_2 > 0$  ισχύει:

$$\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

3. Ισχύει  $\ln e = 1$

4. Για  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  και  $\theta > 0$  ισχύει  $a^{\log_a \theta} = \theta$

5. Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $0 < a < 1$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

6. Αν  $0 < a \neq 1$  ισχύει πάντα η ισοδυναμία  $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

7. Αν  $\theta > 0$  τότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει η ισοδυναμία  $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$

8. Ισχύει  $\log_a(\theta_1 + \theta_2) = \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2$  ( $0 < a \neq 1$  και  $\theta_1, \theta_2 > 0$ )

9. Ισχύει  $(\log_a \theta)^k = k \cdot \log_a \theta$  ( $0 < a \neq 1$  και  $\theta > 0$ )

10. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής εκφράζεται από τη σχέση  $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$ .

11. Αν  $0 < a \neq 1$ , τότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\log_a a^x = x$

12. Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε ισχύει  $\log_a a = 1$ .

13. Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ .

14. Η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  με είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

### • Συμπλήρωσης κενού

Να συμπληρώσετε, τα κενά στις επόμενες ισότητες, ώστε να είναι αληθείς:

α.  $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \dots$  ( $a, \theta_1, \theta_2 > 0$  και  $a \neq 1$ )

β.  $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \dots$  ( $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ )

γ.  $\ln 1 = \dots$

δ.  $\ln e = \dots$

ε.  $\log 10 = \dots$

## B. Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε για οποιαδήποτε  $\theta_1, \theta_2 > 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

2. Να αποδείξετε ότι αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε για οποιοδήποτε  $\theta > 0$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$$

3. Να διατυπώσετε τον ορισμό του λογαρίθμου του  $\theta > 0$  ως προς βάση το  $a$ .

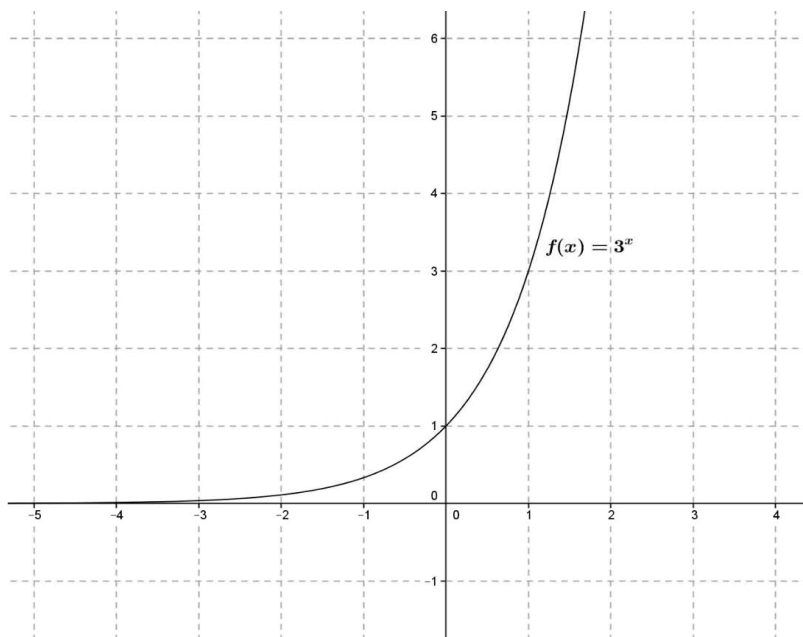
ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 3^x$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g(x) = 3x + 1$  και  $h(x) = 3x - 1$ , μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 12)
- β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $g$  και ποια της γραφικής παράστασης της  $h$ ; (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται συνάρτηση  $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  με  $a^{38} < a^{24}$ ,  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = a^x$  αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
- β) Να λύσετε την ανίσωση  $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$ . (Μονάδες 12)

### ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την εξίσωση:  $\ln(x^2 - 8) = \ln 7x$

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση:  $\ln(x^2 - 8) \geq \ln 7x$

(Μονάδες 12)

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x - 3)$ ,  $x > 3$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$  μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$

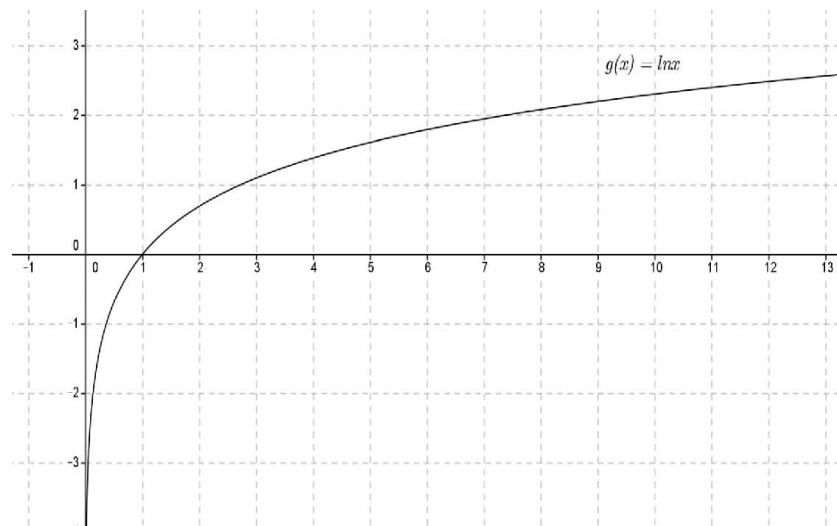
(Μονάδες 8)

β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της  $f$  τον άξονα  $x'x$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της  $C_f$ ;

(Μονάδες 9)



### ΘΕΜΑ 5

α) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ορίζεται η παράσταση  $A = \ln x + \ln(x + 6)$   
(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\ln x + \ln(x + 6) = \frac{1}{2} \ln(49)$  (Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^{2x} - e) - 1$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .  
(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$   
(Μονάδες 13)

### ΘΕΜΑ 7

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$  και  $g(x) = \ln x + \ln 4$ .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .  
(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .  
(Μονάδες 13)

### ΘΕΜΑ 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(3 - \sqrt{x+1})$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .  
(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$   
(Μονάδες 12)

### ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x + 1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .  
(Μονάδες 8)

**β)** Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τους άξονες  $xx'$  και  $yy'$ .

(Μονάδες 10)

**γ)** Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$  μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της  $y = \ln x$ .

(Μονάδες 7)

## ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

### ΘΕΜΑ 1

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση  $f(t) = q_0 \alpha^t$ ,  $t \geq 0$ , όπου  $t$  ο χρόνος (σε ημέρες),  $f(t)$  η ποσότητα του φαρμάκου (σε mg) και οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $q_0$  είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

**α)** Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά  $q_0$  στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει  $0 < \alpha < 1$ . (Μονάδες 6)

**β)** Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

**i.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \frac{1}{2}$  (Μονάδες 5)

**ii.** Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$ , εκφράζοντας τις τιμές συναρτήσεως της αρχικής τιμής  $q_0$ . (Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t)	$q_0$	$\frac{q_0}{2}$							

**γ)** Υποθέτουμε τώρα ότι  $\alpha = \frac{1}{2}$  και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4<sup>ης</sup> ημέρας είναι 25 mg.

**i.** Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

**ii.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0,6]$  (Μονάδες 5)

### ΘΕΜΑ 2

Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ( $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$ ). Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από  $t$  χρόνια είναι:  $Q(t) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2} \ln 2}$  (Μονάδες 10)



- β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
- γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1,3)$  και  $B(2,13)$

- α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 5$  και  $\beta = -7$ . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $y'y$ . (Μονάδες 4)
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (Μονάδες 7)
- δ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(2^x - 31) < 3$ . (Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 4

Μια ποσότητα ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου  $t$  (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής ( $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$ ).

- α) Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το  $\frac{1}{3}$  της αρχικής ποσότητας, να

$$\text{δείξετε ότι } Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$$

(Μονάδες 10)

- β) Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό, να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε.

(Μονάδες 6)

- γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια, η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι  $\frac{1}{81}$  κιλά.

(Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 5

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x)$  να έχει παράγοντα το  $x + 1$  και η αριθμητική τιμή του για  $x=2$  να είναι ίση με 12.

(Μονάδες 7)

**β)** Για  $\alpha = -2$  και  $\beta = 3$

**i.** Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x-2$   
(Μονάδες 5)

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \leq -x + 14$ .

(Μονάδες 7)

**iii.** Να λύσετε την ανίσωση  $P(\ln x) \leq -\ln x + 14$ .

(Μονάδες 6)

### ΘΕΜΑ 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(e^x - 1)$  και  $g(x) = \ln x^2$ .

**α)** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

(Μονάδες 4)

**β)** Να λύσετε τις ανισώσεις  $f(x) > 0$  και  $g(x) < 0$ .

(Μονάδες 8)

**γ)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f(\ln 3)$  και  $g\left(\frac{2}{e}\right)$ .

(Μονάδες 6)

**δ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e-1})$ .

(Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log(x - 2)$ .

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 5)

**β)** Να υπολογίσετε τον αριθμό  $100^{\log \sqrt{6}}$

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $4 \cdot 4^{f(x)} - 9 \cdot 2^{f(x)} + 100^{\log \sqrt{6}} - 4 = 0$

(Μονάδες 13)

### ΘΕΜΑ 8

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της  $1^{ης}$  και στο τέλος της  $2^{ης}$  εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος του υγρού μετά από  $t$  εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση  $V(t) = V_0 \cdot a^t$  όπου  $V_0$  και  $a$  σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς  $V_0$  και  $a$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι:  $\log 5 \cong 0,7$  και  $\log 85 \cong 1,93$  )

(Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 9

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο  $P(t) = 200 \cdot e^{ct}$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι:  $\log(1,64) \cong 0,5$  και  $\log 10 \cong 2,3$  )

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι  $c = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 10

Το φορτίο ενός πυκνωτή που εκφορτίζεται μειώνεται εκθετικά. Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε ms) από τον τύπο  $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}$ , όπου  $Q_0$  το αρχικό φορτίο του πυκνωτή (σε  $\mu\text{Cb}$ ).

- α) Αν τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ ms}$  το φορτίο είναι ίσο με το  $\frac{1}{4}$  της αρχικής του τιμής, να δείξετε ότι  $\lambda = \ln 2$ . (Μονάδες 8)
- β) Αν τη χρονική στιγμή  $t = 1 \text{ ms}$  το φορτίο του είναι  $60 \mu\text{Cb}$ , να αποδείξετε ότι  $Q_0 = 120 \mu\text{Cb}$ . (Μονάδες 8)
- γ) Πότε το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από  $15 \mu\text{Cb}$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 11

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 2)$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 7)
- β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + x = 3 \ln 2$  (Μονάδες 9)
- γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) + x \geq 3 \ln 2$  (Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 7)
- β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \log 3 - \log 7$  (Μονάδες 9)
- γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > \log 3 - \log 7$  (Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 13

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 5x^3 - 8x^2 + \alpha$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 2$  να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 8)

β) Για  $\alpha = -8$  να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{(\ln^2 x + 1)^3}{(\ln^2 x + 1)^2 + 1} = \frac{8}{5}$

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e \cdot x + 1)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση  $f(2x) < f(x)$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(\sqrt{3} \cdot \eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$  στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

(Μονάδες 13)

### ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln(3x - 11)}{\ln(x - 5)}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$

(Μονάδες 8)

γ) Αν  $x > 6$  να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 1$

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x - 1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 5)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^x) + f(e^x - 2) = 3\ln 2$

(Μονάδες 10)

**γ)** Να λύσετε την ανίσωση  $f(e^x) + f(e^x - 2) \leq 3\ln 2$

(Μονάδες 10)

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

**ΘΕΜΑ 1**

A. Να λύσετε την εξίσωση:  $4^x - 17 \cdot 2^x + 16 = 0$

B. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \ln\left(\frac{1-2^x}{2^x-16}\right)$ .

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = -\ln 4$ .

**ΘΕΜΑ 2**

A. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log(x-6) + \log(x+1)$

A1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x)$

A2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(x-6) + \log(x+1) = 3 \log 2$$

B. Να λύσετε την ανίσωση :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$$

**ΘΕΜΑ 3**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a + \ln(e^x - 2)$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$

B. Να βρείτε το  $a$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(\ln 3, 1)$

Γ. Για  $a = -1$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$

**ΘΕΜΑ 4**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a + \ln(e^x - 2)$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$

B. Να βρείτε το  $a$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(\ln 3, 1)$

Γ. Για  $a = -1$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$

**ΘΕΜΑ 5**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$  και  $g(x) = \log(9^x - 3^x)$

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + \ln x = 3 \ln 2$$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$g(x) - g(1) < \log 2$$

### **ΘΕΜΑ 6**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1)$  και  $g(x) = \ln(e^x - 1)$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $g$ .

Γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \ln 2 + g(x)$ .

Δ. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > \ln 2 + g(x)$

### **ΘΕΜΑ 6**

A. Να δείξετε ότι:

$$8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 3$$

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^{2 \log_2 x} - 2 \cdot 3^{\log_2 x} - 8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 0$$

### **ΘΕΜΑ 7**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)$  και  $g(x) = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5$ .

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f, g$ .

B. Να λύσετε την εξίσωση  $10^{f(x)} = g(x)$ .

Γ. Να αποδείξετε ότι  $f(-1) - f(0) - \log|g(1)| - \log 13 = -3$ .



## Γ. Διαγωνίσματα

### Διαγώνισμα 1

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Για  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  και  $\theta > 0$  ισχύει  $a^{\log_a \theta} = \theta$

**β.** Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $0 < a < 1$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**γ.** Ισχύει  $\ln 1 = 0$

**δ.** Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής εκφράζεται από τη σχέση  $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$

**ε.** Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε ισχύει  $\log_a a = 1$ .

**(Μονάδες 5x2=10)**

**B.** Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε για οποιαδήποτε  $\theta_1, \theta_2 > 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

**(Μονάδες 15)**

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται συνάρτηση  $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  με  $a^{38} < a^{24}$ ,  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$

**α)** Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = a^x$  αιτιολογώντας την απάντησή σας. **(Μονάδες 13)**

**β)** Να λύσετε την ανίσωση:

$$2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$$

**(Μονάδες 12)**

#### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\alpha} - 8$  διέρχεται από το σημείο

$M(-3, -4)$

A. Να βρείτε την τιμή του  $a \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 9)

B. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \geq 0$

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση  $e^{2x} + 5e^x + f\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$

(Μονάδες 7)

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(e^x - 1)$  και  $g(x) = \ln x^2$ .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε τις ανισώσεις  $f(x) > 0$  και  $g(x) < 0$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f(\ln 3)$  και  $g\left(\frac{2}{e}\right)$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e-1})$ .

(Μονάδες 7)

## Διαγώνισμα 2

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Για  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  και  $\theta > 0$  ισχύει  $a^{\log_a \theta} = \theta$

**β.** Ισχύει  $\ln e = 1$

**γ.** Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $a > 1$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**δ.** Ισχύει  $\log_a(\theta_1 + \theta_2) = \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2$  ( $0 < a \neq 1$  και  $\theta_1, \theta_2 > 0$ )

**ε.** Αν  $0 < a \neq 1$  ισχύει πάντα η ισοδυναμία  $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

**(Μονάδες 5x2=10)**

**B.** Να αποδείξετε ότι αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε για οποιοδήποτε  $\theta > 0$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$$

**(Μονάδες 15)**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(3 - \sqrt{x+1})$ .

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**(Μονάδες 13)**

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$

**(Μονάδες 12)**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(3x-5)$ .

**A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**(Μονάδες 5)**

**B.** Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα

$x'$

**(Μονάδες 8)**

Γ. Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x)$  να έχει παράγοντα το  $x + 1$  και η αριθμητική τιμή του για  $x=2$  να είναι ίση με 12.

(Μονάδες 7)

**β)** Για  $\alpha = -2$  και  $\beta=3$

**i.** Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x-2$

(Μονάδες 5)

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \leq -x + 14$ .

(Μονάδες 7)

**iii.** Να λύσετε την ανίσωση  $P(\ln x) \leq -\ln x + 14$ .

(Μονάδες 6)