

Ημερίδα για Μαθηματικά  
Σάββατο 28/01/2017  
Εκπαιδευτήρια "Ροδίων Παιδεία"

## **Θέμα**

**«Η διδασκαλία και η αξιολόγηση των Μαθηματικών  
στις Πανελλαδικές Εξετάσεις –  
νέοι δρόμοι και αλλαγή φιλοσοφίας»**

**«Μια αποτύπωση της κατάστασης και μια  
ανασκόπηση ερευνών για το πρόβλημα»**

Κώστας Μαλλιάρκας, Μαθηματικός  
1<sup>ο</sup> ΓΕΛ Ρόδου – Βενετόκλειο

[kmath1967@gmail.com](mailto:kmath1967@gmail.com)

# Εισαγωγή

- ✓ **Πανελλαδικές εξετάσεις στα Μαθηματικά**
  - μεγάλο ενδιαφέρον από μαθητές, γονείς, εκπαιδευτικούς, πολιτική ηγεσία, έντυπος και ηλεκτρονικός τύπος, διαδίκτυο, συγγραφείς βιβλίων-εκδόσεις ...
- ✓ **Συστημική προσέγγιση (εμπλοκή κράτους, υπουργείου Παιδείας, καθηγητών, μαθητών, γονέων, ΜΜΕ, ...)**
  - Εξεταστικό σύστημα
  - Εξεταστέα ύλη
  - Διδακτικές οδηγίες – διευκρινήσεις – τροποποιήσεις
  - Διδακτικό υλικό
  - Διδασκαλία σε σχολείο – φροντιστήριο
  - Επιτροπές εξετάσεων – θεματοδότες – βαθμολογικά κέντρα

# Εκπαιδευτικό υλικό για τα Μαθηματικά

- ✓ Σχολικό βιβλίο
- ✓ Ψηφιακά βοηθήματα υπουργείου
- ✓ Τράπεζα θεμάτων ΕΜΕ
- ✓ Περιοδικά Ευκλείδης Β' και Γ' της ΕΜΕ
- ✓ Διάφορα βοηθήματα και ιστοσελίδες
- ✓ Forum για Μαθηματικά
- ✓ Θέματα προηγούμενων ετών
- ✓ Οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της ύλης

# 'Υλη Γ' Λυκείου

- **Ανάλυση:** Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια, Διαφορικός Λογισμός, Ολοκληρωτικός Λογισμός

## Κατανομή και σημαντικότητα

- **Πλήθος αποδείξεων προτάσεων: 25**
  - 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο: 3 (2 με όρια και 1 το Θ.Ε.Τ.)
  - 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο: 20 (13 εργαλειακά θεωρήματα για παραγωγή συναρτήσεων και κανόνες και 7 βασικά θεωρήματα)
  - 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο: 2 βασικά θεωρήματα
- **Πλήθος ορισμών: 26**
  - 19 πιο πιθανοί (κάποιοι μοιάζουν ανά δύο), οπότε ουσιαστικά λιγότεροι
- **Επίσης, 18 ακόμη βασικά θεωρήματα**, όπου απαιτείται διατύπωση, εφαρμογή και παραλλαγές τους σε ερωτήματα Σ-Λ
- **Αρκετά εργαλειακά θεωρήματα** που αφορούν κανόνες ορίων, παραγωγή και ολοκλήρωσης (δηλαδή Λογισμός...)

# Πανελλαδικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά

## Στατιστικά για το 1ο Θέμα (Θεωρία)

Δείγμα: Πανελλαδικές Εξετάσεις 2000 – 2016

(όχι Επαναληπτικές)

- Απόδειξη «**βασικού θεωρήματος**» : 13 φορές (τα περισσότερα από 2 φορές)
- Απόδειξη «**εργαλειακού θεωρήματος**» : 4 φορές
- Ορισμός: 18 φορές
- Διατύπωση θεωρήματος: 2 φορές
- Γεωμετρική ερμηνεία: 2 φορές

# Διδακτικές οδηγίες 2016-17

- Παράγραφοι – αποδείξεις εκτός διδακτέας – εξεταστέας ύλης (κατακόρυφη εφαπτομένη, παράγωγος γινομένου, ημιτόνου-συνημιτόνου, αόριστο ολοκλήρωμα, συνάρτηση ολοκλήρωμα, ...)
  - Χρήση προτάσεων χωρίς απόδειξη
  - Χρήση εφαρμογών σχολικού βιβλίου χωρίς απόδειξη
  - Γεωμετρικές ερμηνείες με χρήση λογισμικών στη διδασκαλία
- 
- *Τι προβλήματα δημιουργούν και τι προβλήματα λύνουν;*
  - *Διευκολύνουν την λύση ή την παρουσίαση της λύσης μιας άσκησης;*
  - *Ανοίγουν δρόμους για κάποια θέματα εκτός σχολικού βιβλίου;*
  - *Δυσχεραίνουν την κατανόηση άλλων εννοιών εντός ύλης;*

# Θέματα Πανελλαδικών 2016

## Κατηγοριοποίηση και κατανομή μονάδων

- **Θέμα Α – Θεωρία**

**A1:** Απόδειξη βασικού θεωρήματος (κριτήριο τ. μεγίστου) : **7M**

**A2:** Ορισμός (ισότητα συναρτήσεων) : **4M**

**A3:** Διατύπωση και γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος (ΘΜΤ): **4M**

**A4:** 5 ερωτήματα Σωστό – Λάθος: **5 · 2 = 10M**

α. Λάθος διατύπωση του Θ.Θ.Ο.Λ.

β. Σωστή διατύπωση θεωρήματος διάταξης ορίων

γ. Λάθος εφαρμογή βασικού θεωρήματος (σταθερής συνάρτησης αλλά σε ένωση διαστημάτων ... - σχόλιο βιβλίου)

δ. Σωστή διατύπωση εναλλακτικού ορισμού 1-1(σχόλιο βιβλίου)

ε. Σωστή διατύπωση βασικού θεωρήματος (μέγιστης - ελάχιστης τιμής)

- **Θέμα Β – Δεδομένη ρητή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$**

**B1:** Μονοτονία – ακρότατα : **6M**

**B2:** Κυρτότητα – σημεία καμπής: **9M**

**B3:** Ασύμπτωτες: **7M**

**B4:** Σχεδίαση γραφικής παράστασης: **3M**

**Σχόλια:** Κλασικό θέμα μελέτης συνάρτησης με σχετικά εύκολο τύπο και συχνή παρουσία στο σχολικό βιβλίο. Απαιτούσε και αλγεβρικές δεξιότητες από προηγούμενες τάξεις. Ξάφνιασε η σχεδίαση γραφ. παρ.

- **Θέμα Γ – Ξεκινούσε αμέσως με ερωτήματα**

**Γ1:** Επίλυση περίεργης εξίσωσης: **4M**

**Γ2:** Εύρεση τύπου συνάρτησης: **8M**

**Γ3:** Μελέτη κυρτότητας: **4M**

**Γ4:** Επίλυση περίεργης εξίσωσης: **9M**

**Σχόλια:** Ερωτήματα που θύμιζαν κλασικές μεθοδολογίες. Μπορούσε να οδηγήσει όμως και σε άλλες σχετικές αλλά ακατάλληλες τεχνικές επίλυσης. Έξυπνες παραλλαγές και προσθήκες ασκήσεων σχολικού βιβλίου. Χρειαζόταν παρατηρητικότητα, προσοχή και ψυχραιμία ...



- **Θέμα Δ – Δεδομένες συνθήκες με ολοκλήρωμα, σύνολο τιμών, όριο και συναρτησιακή σχέση που απαιτούσαν μετάφραση ...**

**Δ1:** Υπολογισμός τιμών συνάρτησης και παραγώγου: **4 + 3 = 7M**

**Δ2:** α) μη ύπαρξη ακρότατων (με άτοπο και Fermat): **4M**

β) εύρεση μονοτονίας (με διατήρηση προσήμου παραγώγου): **2M**

**Δ3:** Υπολογισμός ορίου (εμφάνιση φραγμένης-ορισμού παραγώγου και άλλες τεχνικές ορίων): **6M**

**Δ4:** Απόδειξη διπλής ανισότητας με ολοκλήρωμα (κατασκευαστικά): **6M**

**Σχόλια:** Σύνθετο θέμα, απόλυτα συμβατό όμως με τις οδηγίες για τη μορφή του 4<sup>ου</sup> θέματος. Απαιτούσε γνώσεις θεωρίας, διάφορες τεχνικές, ορισμένα ερωτήματα λυνόντουσαν με λιγότερο συνηθισμένες μεθόδους και όχι τις κλασικές που γνωρίζουν οι περισσότεροι μαθητές οπότε χρειαζόταν και κριτική ικανότητα και έπρεπε να συνδυάσουν κατάλληλα τα συμπεράσματα από προηγούμενα ερωτήματα με διάφορους τρόπους ...

# Σχετικές εργασίες σε Συνέδρια και Ημερίδες

## Θεματολογία

- Γνωστικό αντικείμενο – προτάσεις διδασκαλίας
- Γνωστικά εμπόδια – μελέτη και προτάσεις εξάλειψης
- Εφαρμογές σε άλλες επιστήμες
- Επιδόσεις μαθητών, βαθμολόγηση και στατιστική επεξεργασία αποτελεσμάτων καθώς και ερμηνεία τους
- Μελέτη θεμάτων προηγούμενων ετών – φιλοσοφία των θεμάτων, ποιότητα και επίπεδο δυσκολίας,
- Γνωστικές απαιτήσεις Πανεπιστημιακών τμημάτων
- Αντιλήψεις μαθητών και καθηγητών
- Προαπαιτούμενες γνώσεις από προηγούμενες τάξεις
- ...

## **32ο Συνέδριο ΕΜΕ - Καστοριά 2015**

- Σύνολο εισηγήσεων: 109
- Εισηγήσεις σχετικές με Πανελλαδικές: 7
  - Γνωστικό αντικείμενο: 3
  - Στατιστικά επιδόσεων: 3
  - Αντιλήψεις μαθητών: 1

## **33ο Συνέδριο ΕΜΕ - Χανιά 2016**

- Σύνολο εισηγήσεων: 98
- Εισηγήσεις σχετικές με Πανελλαδικές: 11
  - Γνωστικό αντικείμενο: 9
  - Στατιστικά επιδόσεων - αντιλήψεις: 2

# ΤΙΤΛΟΙ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ 32<sup>ου</sup> Συνεδρίου ΕΜΕ

- Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών: **επιλογή των θεμάτων, επίδοση των μαθητών και επιπτώσεις στη διδασκαλία**
- Η **επίδοση** των μαθητών στο θέμα της **θεωρίας**. Στατιστική επεξεργασία της επίδοσης των μαθητών του 2<sup>ου</sup> ΓΕΛ Κιλκίς στα θέματα θεωρίας των Πανελλαδικών Εξετάσεων τα τελευταία 4 χρόνια
- Μια ματιά στις **επιδόσεις** των Εισαγωγικών Εξετάσεων 2002 – 2015 με χρήση των καμπυλών Andrew

- Οι πρότερες αλγεβρικές και γεωμετρικές ικανότητες των υποψηφίων φοιτητών στις Πανελλαδικές Εξετάσεις
- Η χρήση της «Διακρίνουσας» με αφορμή το Δ1 θέμα των Εξετάσεων του 2015
- Διδασκαλία των Μαθηματικών και Τεχνολογία – Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού
- Η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου σε διάφορα Ευρωπαϊκά συστήματα

# ΤΙΤΛΟΙ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ 33<sup>ου</sup> Συνεδρίου ΕΜΕ

- Το 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> θέμα στις Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών. Η επιτυχής αντιμετώπιση θεμάτων με **σαφή αναφορά στο σχολικό βιβλίο**
- Η διδασκαλία της Ανάλυσης στη Γ Λυκείου: Είναι δυνατό να συνδυάσουμε **θεωρητική εμφάθυνση και Μεθοδολογία;**  
Μέρος 1<sup>ο</sup>: Μια ανάλυση του προβλήματος
- Μέρος 2<sup>ο</sup>: Μια διδακτική πρόταση
- Πώς επηρεάζουν οι **επιδόσεις στα Μαθηματικά** Λυκείου την **επιλογή Σχολής;**
- Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών 2016: «**Η εκδίκηση του γνωστού**». Στατιστική επεξεργασία της βαθμολογίας των γραπτών δοκιμίων των Μαθηματικών του 31<sup>ου</sup> Βαθμολογικού Κέντρου ως προς την επίδοση των υποψηφίων στο θέμα Α της θεωρίας καθώς και σε επιλεγμένα ερωτήματα των θεμάτων Γ και Δ.

- Μέθοδοι αντιμετώπισης ασκήσεων που περιέχουν ανισοισότητες στην ύλη της Γ Λυκείου
- Αναζητώντας τις ρίζες της παραγώγου
- Το Θεώρημα Darboux στη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού στο Λύκειο
- Παραγοντοποίηση και Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Ποια σχέση τα συνδέει;
- Οι εξηγήσεις στη διδασκαλία – παράγοντας ανάπτυξης της σκέψης. Το Θ.Θ.Ο.Λ.
- Εξερευνώντας και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ.Ο.Λ.

# Επιλεγμένες ερευνητικές εργασίες

Οι συγγραφείς αυτοί έχουν κάνει και άλλες ανάλογες εργασίες σε άλλα συνέδρια και ημερίδες, οπότε έχουν εμπειρία.

- Το 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> θέμα στις Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών.  
Η επιτυχής αντιμετώπιση θεμάτων με **σαφή αναφορά στο σχολικό βιβλίο.** (Απλακίδης, 2016)
- Η διδασκαλία της Ανάλυσης στη Γ Λυκείου: Είναι δυνατό να συνδυάσουμε **θεωρητική εμβάθυνση και Μεθοδολογία;**  
Μέρος 1<sup>ο</sup>: Μια ανάλυση του προβλήματος  
Μέρος 2<sup>ο</sup>: Μια διδακτική πρόταση  
(Θωμαΐδης, Μπαρούτης, Σαράφης, Συγκελάκης, 2016)
- Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών 2016: «**Η εκδίκηση του γνωστού**». Στατιστική επεξεργασία της βαθμολογίας των γραπτών δοκιμίων των Μαθηματικών του 31<sup>ου</sup> Βαθμολογικού Κέντρου ως προς την επίδοση των υποψηφίων στο θέμα Α της θεωρίας καθώς και σε επιλεγμένα ερωτήματα των θεμάτων Γ και Δ.  
(Καρκάνης, Μπερσίμης, Κόσουβας, 2016)



# Επιλεγμένες ερευνητικές εργασίες

Ορολογία που χρησιμοποιήθηκε:

«Θέματα με σαφή αναφορά στο σχολικό βιβλίο»

«Η εκδίκηση του γνωστού θέματος»

Οι συγγραφείς εννοούν:

- Θέματα θεωρίας
- θέματα με κλασική εκφώνηση όπως ερωτήματα μελέτης, ...
- Θέματα παρόμοια με το σχολικό όπως π.χ. η συνθήκη του 4<sup>ου</sup> θέματος που υπάρχει στο σχολικό σε άσκηση

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x \, dx = \pi$$

11. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με  $f''$  συνεχή και για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x \, dx = 2.$$

Αν  $f(\pi) = 1$ , με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το  $f(0)$ .

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση  $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

## Σχολικό βιβλίο

7. i) Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[-1, 1]$ , για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της  $f$  και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης  $f$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. α) Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 2)

Δ4. Να δείξετε ότι  $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$ . Μονάδες 6

## Σχολικό βιβλίο

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x^2}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$  και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας  $e^x \geq 1+x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$  για κάθε  $x \in [0, 1]$  και

β)  $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$ .

- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Δ2. α) Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 4)

## Σχολικό βιβλίο

4. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση  $f$ , που είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1,$$

τότε η  $f$  δεν έχει ακρότατα.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι

$$f'(0) = 1 \quad (\text{μονάδες } 3).$$

## Σχολικό βιβλίο

7. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0 και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $f(0) = 0$

ii)  $f'(0) = 4$ .

# Ερευνητικά ερωτήματα

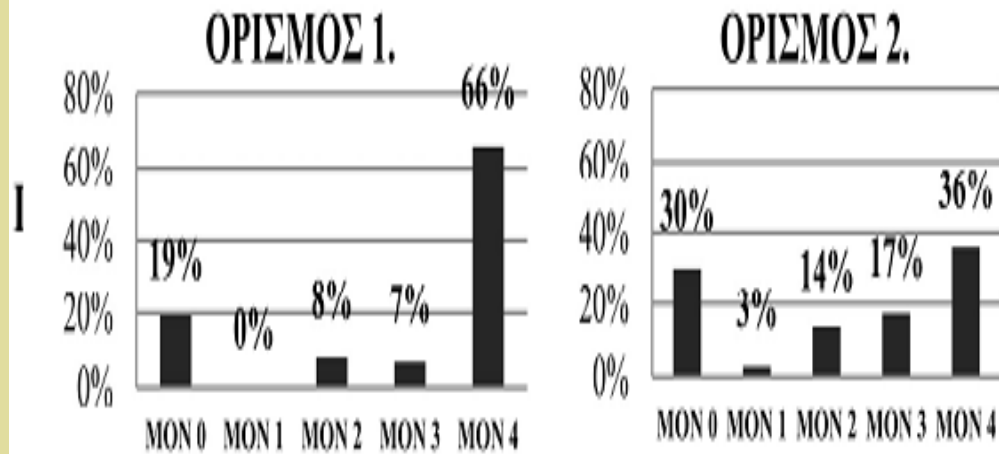
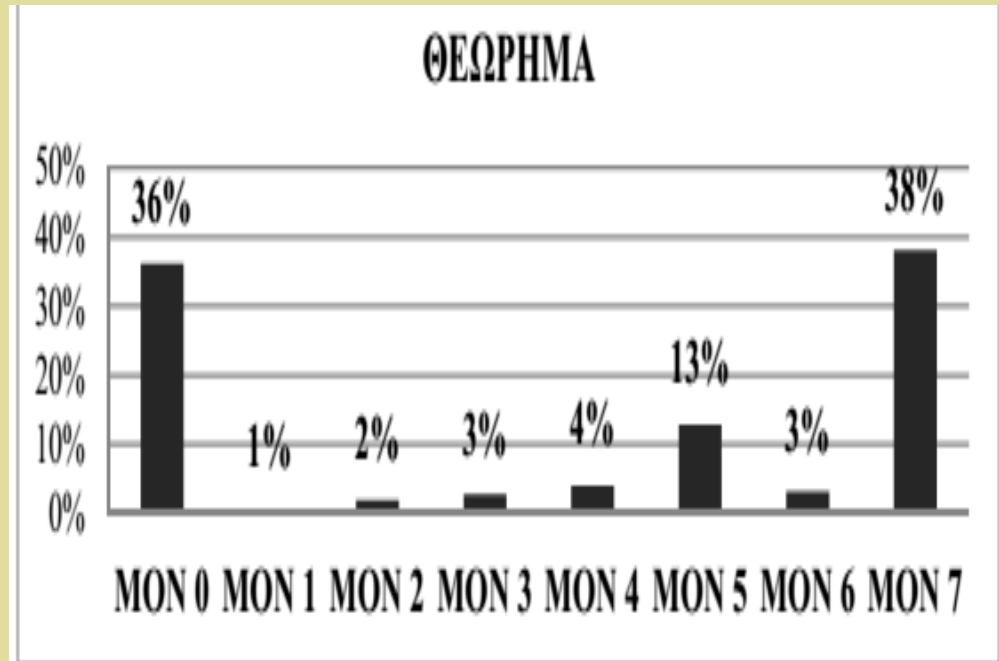
- Πώς αντιμετώπισαν οι μαθητές θέματα με «σαφή αναφορά στο σχολικό βιβλίο» ή αλλιώς «γνωστά θέματα»;
- Τι δείχνουν οι επιδόσεις τους;
- Γιατί υπάρχει μεγάλη αποτυχία στο 1<sup>ο</sup> θέμα της θεωρίας;
- Ποια προβλήματα δημιουργεί η επιμονή στην «μεθοδολογία»;
- Ποιες παρεμβάσεις θα αναβαθμίσουν τη διδασκαλία της θεωρίας;
- Η ενσωμάτωση της θεωρίας στα θέματα των εξετάσεων μείωσε ή αύξησε την αποτυχία;

# Ερωτήματα που προέκυψαν και από τις έρευνες

- Γιατί οι μαθητές δεν μπορούν να αναπαραγάγουν γνώσεις που απαιτούν μόνο απομνημόνευση;
- Τι αξιολογούμε με την απόδειξη και τον ορισμό;
- Τι αξιολογούμε με τις ερωτήσεις Σωστό – Λάθος και πόσο αξιόπιστη είναι η βαθμολογία τους;
- Ποιες παθογένειες της σχέσης των Εξετάσεων με τη διδασκαλία των Μαθηματικών εμφανίζονται από την αδυναμία διαπραγμάτευσης θεμάτων που απαιτούν γνώσεις προηγούμενων τάξεων;
- Πόσο επηρεάζει η διδασκαλία των μαθηματικών στις άλλες τάξεις του λυκείου το είδος των θεμάτων στις Πανελλαδικές;
- Πώς θα βελτιώσουμε το αλγεβρικό υπόβαθρο των μαθητών;
- Πώς θα αποκτήσουν οι μαθητές κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας;
- Πώς θα εξαλείψουμε την απόλυτη εξάρτηση των μαθητών από τις αλγοριθμικές διαδικασίες (μεθοδολογία – ασκησιολογία) προς όφελος της εννοιολογικής κατανόησης;

# Ευρήματα επιλεγμένων ερευνών

- Για το 1<sup>ο</sup> θέμα (θεωρία)
  - Περίπου 1 στους 3 μαθητές δεν μπορεί να αποδείξει θεώρημα που αναγράφεται στο σχολικό βιβλίο
  - Δυσκολεύονται επίσης στη διατύπωση ορισμών
  - Περίπου 12% των μαθητών παίρνουν πάνω από το 50% των μονάδων από τα θέματα Σωστό - Λάθος





## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 9**

**B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

**Μονάδες 3**

Τα ερωτήματα απαιτούσαν στοιχειώδεις γνώσεις Διαφορικού Λογισμού και γνώσεις στοιχειώδους Άλγεβρας Α' Λυκείου, δηλαδή, θέματα με «**σαφή αναφορά στο σχολικό βιβλίο**» – «**γνωστά θέματα**»

**B1:** 53% πήρε και τις 6 μονάδες – 27% πήρε 0 μονάδες

**B2:** 42,6% έως 3 μονάδες και 44,8% πάνω από 6 μονάδες

# Γενικά συμπεράσματα των ερευνών...

- 1 στους 3 μαθητές δεν γράφει την απόδειξη στο 1<sup>ο</sup> Θέμα
- Ορισμοί και ερωτήσεις Σ–Λ δεν συγκεντρώνουν την αναμενόμενη βαθμολογία όποτε οι μαθητές δεν εκμεταλλεύονται ικανοποιητικά το «δώρο» του συστήματος
- 30% των μαθητών δεν έχει στοιχειώδεις γνώσεις Διαφορικού Λογισμού
- Από αυτούς που έχουν γνώσεις Διαφορικού Λογισμού ένα μεγάλο μέρος δεν ολοκληρώνει την άσκηση γιατί δεν έχει βασικές γνώσεις Άλγεβρας
- Πολλοί μαθητές ακολουθούν με «θρησκευτική ευλάβεια» συνταγές και μεθοδολογίες ακόμη και εκεί όπου απλές αλγεβρικές κινήσεις λύνουν το πρόβλημα (π.χ. για πρόσημο δευτεροβάθμιας έθεταν συνάρτηση και έψαχναν πρόσημο με 1<sup>η</sup> ή και 2<sup>η</sup> παράγωγο - μονοτονία – προφανείς ρίζες !!!)
- Μεγάλο πρόβλημα υπήρχε στην σχεδίαση γραφικής παράστασης

# Και ορισμένες προτάσεις ...

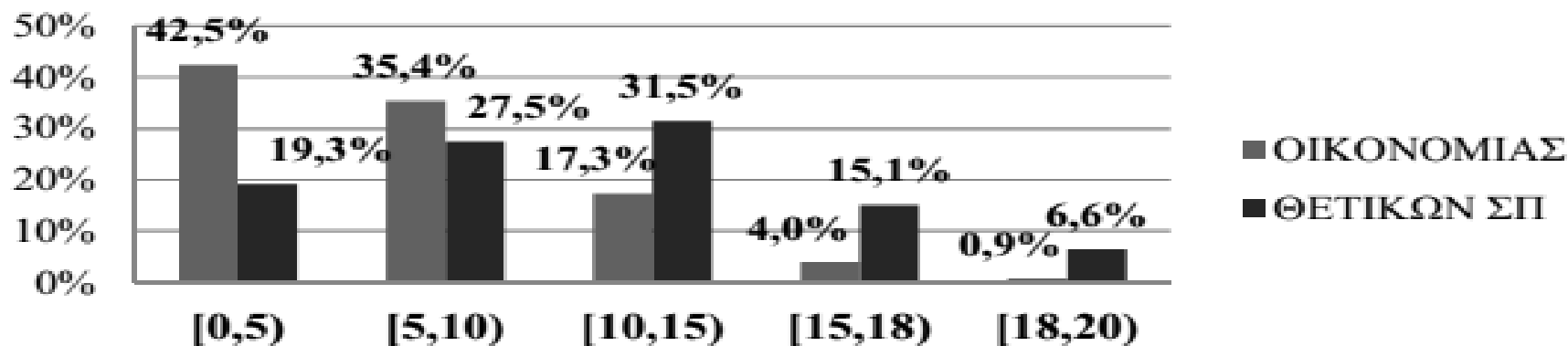
- Να αλλάξει η φιλοσοφία του 1<sup>ου</sup> θέματος
- Να ενταχθούν στη διδασκαλία αλλά όχι στην εξεταστέα ύλη αποδείξεις προτάσεων που αναδεικνύουν βασικές μεθόδους της Ανάλυσης (προτείνονται και παραδείγματα) και οδηγούν σε θεωρητική εμβάθυνση και ουσιαστική κατανόηση της μεθοδολογίας
- Να διατηρηθεί η μορφή του 2<sup>ου</sup> θέματος του 2016
- Να μελετηθούν οι επιδόσεις των μαθητών σε συγκεκριμένες ενότητες και να ανατροφοδοτήσουν το σύστημα αξιολόγησης
- Να αποκτήσουν τα θέματα μια σταθερή μορφή και ο μαθητής να αξιολογείται σε οικείο περιβάλλον χωρίς εκπλήξεις
- Να γίνει σωστή κατάρτιση και επιμόρφωση όσων εμπλέκονται στο ευρύ φάσμα της μαθηματικής εκπαίδευσης και ειδικότερα στο σύστημα των Πανελλαδικών Εξετάσεων



Ευχαριστώ ...

# Παράρτημα – Αποσπάσματα από εργασίες

## ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ



**Πίνακας 3:** Βαθμολογία στο Α1 ερώτημα του 1<sup>ου</sup> θέματος των Μαθηματικών Προσανατολισμού (δείγμα)

Βαθμολογία	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστ. Σχετ. Συχ.
0	802	34,7	34,7
1	39	1,7	36,3
2	81	3,5	39,8
3	66	2,9	42,7
4	99	4,3	47,0
5	177	7,6	54,6
6	266	11,5	66,1
7	784	33,9	100,0
Σύνολο	2314	100,0	

**Πίνακας 4:** Βαθμολογία στο Α2 ερώτημα του 1<sup>ου</sup> θέματος των Μαθηματικών Προσανατολισμού (δείγμα)

Βαθμολογία	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστ. Σχετ. Συχ.
0	268	11,6	11,6
1	21	0,9	12,5
2	293	12,7	25,2
3	267	11,5	36,7
4	1465	63,3	100,0
Σύνολο	2314	100,0	

**Α3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**Πίνακας 8:** Κατανομή Βαθμολογίας στο 3<sup>ο</sup> θέμα των Μαθηματικών Προσανατολισμού (δείγμα)

Βαθμολογία	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστ. Σχετ. Συχ.
0	638	27,6	27,6
[1,5]	683	29,5	57,1
[6,10]	442	19,1	76,2
[11,15]	237	10,2	86,4
[16,20]	241	10,4	96,8
[21,24]	39	1,7	98,5
25	34	1,5	100,0
Σύνολο	2314	100,0	

**Β. Όσον αφορά τις ασκήσεις**

Παραθέτουμε το Θέμα Γ μέχρι το ερώτημα Γ2 που επιλέχτηκε:

**Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση  $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

Παραθέτουμε την άσκηση Β7,ii, σελ. 82 του Σχολικού Βιβλίου: Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης  $f$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f^2(x) = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Πίνακας 9:** Κατανομή Βαθμολογίας στο Γ<sub>2</sub> του θέματος των Μαθηματικών Προσανατολισμού (δείγμα)

Βαθμολογία	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστ. Σχετ. Συχ.
0	1458	63,0	63,0
1	298	12,9	75,9
2	356	15,4	91,3
3	55	2,4	93,6
4	42	1,8	95,5
5	16	0,7	96,2
6	13	0,6	96,7
7	21	0,9	97,6
8	55	2,4	100,0
Σύνολο	2314	100,0	

Παραθέτουμε την άσκηση B11, σελ. 222 του Σχολικού Βιβλίου με τη λογική της οποίας ο υποψήφιος θα αντιμετώπιζε το Δ1: Έστω μια συνάρτηση  $f$  με  $f''$  συνεχή και για την οποία ισχύει  $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2$ . Αν  $f(\pi) = 1$  με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το  $f(0)$ .

Παραθέτουμε την άσκηση B4, σελ. 151 του Σχολικού Βιβλίου με τη λογική της οποίας ο υποψήφιος θα αντιμετώπιζε το Δ2: Να αποδείξετε ότι, αν για μία συνάρτηση  $f$ , που είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει:  $2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$ , τότε η  $f$  δεν έχει ακρότατα.

Στον Πίνακα 10 που αφορά το Δ1 ερώτημα είναι φανερό ότι 53,7% των υποψηφίων πήρε 0 και μόλις το 15,9% πήρε και τις 7 μονάδες του ερωτήματος και προφανώς το 84,1% έχασε από 1 έως και 6 από τις μονάδες του ερωτήματος. Στον Πίνακα 11 που αφορά το Δ2 ερώτημα το 69,5% των υποψηφίων πήρε 0 και μόλις το 9,7% πήρε και τις 6 μονάδες του ερωτήματος και προφανώς το 90,3% έχασε από 1 έως και 6 από τις μονάδες του ερωτήματος. Τα προηγούμενα, αιτιολογούν και την επίδοση των υποψηφίων στο Θέμα Δ. Σύμφωνα με αυτά στο Θέμα Δ το 49,7% των υποψηφίων πήρε 0 και μόλις το 2,2% πήρε και τις 25 μον.

**Πίνακας 10:** Βαθμολογία στο Δ<sub>1</sub> του 4<sup>ου</sup> θέματος

Βαθμολογία	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστ. Σχετ. Συχ.
0	1242	53,7	53,7
1	123	5,3	59,0
2	131	5,7	64,6
3	87	3,8	68,4
4	125	5,4	73,8
5	128	5,5	79,3
6	109	4,7	84,1
7	369	15,9	100,0
Σύνολο	2314	100,0	

**Πίνακας 11:** Βαθμολογία στο Δ<sub>2</sub> του 4<sup>ου</sup> θέματος

Βαθμολογία	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστ. Σχετ. Συχ.
0	1609	69,5	69,5
1	131	5,7	75,2
2	126	5,4	80,6
3	54	2,3	83,0
4	96	4,1	87,1
5	73	3,2	90,3
6	225	9,7	100,0
Σύνολο	2314	100,0	

## Παράρτημα – Αποσπάσματα από εργασίες

Η λεπτομερής μελέτη των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές έδειξε ότι η αποτυχία δεν οφείλεται σε άγνοια των μεθόδων του Διαφορικού Λογισμού, αλλά στην ανικανότητα να χρησιμοποιηθούν βασικές γνώσεις της Άλγεβρας. Για παράδειγμα, προσπαθώντας να υπολογίσουν τη δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = \left( \frac{2x}{(x^2+1)^2} \right)' = \dots = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \dots = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} \quad (1)$$

οι περισσότεροι μαθητές εκτελούν με ορθό τρόπο τη διαδικασία των παραγωγίσεων, αλλά επιδεικνύουν απίστευτη άγνοια της έννοιας «απλοποίηση ρητής αλγεβρικής παράστασης» και καταλήγουν, αντί για την (1), στην

$$f''(x) = \frac{-6x^4 - 4x^2 + 2}{(x^2+1)^4}.$$

Εύλογα θα παρατηρούσε κανείς ότι αυτή η «παράλειψη» δεν συνιστά ουσιαστικό πρόβλημα, αφού όλοι οι μαθητές είχαν διδαχθεί διτετράγωνα



μαθητές ακολούθησαν στο σημείο αυτό με θρησκευτική ευλάβεια τη «μεθοδολογία εισαγωγής βοηθητικών συναρτήσεων» που είχαν κατά κόρον διδαχθεί στην Γ' Λυκείου: Έθεσαν μαζικά τον αριθμητή ίσο με

$$h(x) = -6x^4 - 4x^2 + 2$$

και άρχισαν να μελετούν με παραγώγους τη νέα βοηθητική συνάρτηση! Μάλιστα ορισμένοι «ταλαντούχοι» ολοκλήρωσαν επιτυχώς αυτή τη «μέθοδο», αν παραβλέψουμε το γεγονός ότι δεν βρήκαν τις ρίζες της δεύτερης παραγώγου (που είναι στην προκειμένη περίπτωση οι τετμημένες των σημείων καμπής), αλλά απέδειξαν την ύπαρξή τους με χρήση του θεωρήματος Bolzano! Αντιλαμβάνεται λοιπόν ο καθένας τι επακολούθησε όταν επιχείρησαν να σχεδιάσουν τη ζητούμενη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Από την άλλη μεριά, πολλοί μαθητές που είχαν την τεχνική ικανότητα της απλοποίησης υπολόγισαν μεν τη δεύτερη παράγωγο στη μορφή (1), αλλά η μελέτη του προσήμου που ακολούθησε συνοδεύτηκε από καταστροφικά λάθη του είδους:

$$1 - 3x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

# Παραδείγματα αποδείξεων για εμφάθυνση

## Μονοτονία αντίστροφης συνάρτησης

Πρόταση: Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

**Απόδειξη** (με απαγωγή σε άτοπο)

Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως μονότονη στο  $A$ , τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ . Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , δηλαδή για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Θα αποδείξουμε ότι η  $f^{-1}$  είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της  $f(A)$ , δηλαδή για κάθε  $y_1, y_2 \in f(A)$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι η (1) δεν αληθεύει. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν  $y_1, y_2 \in f(A)$  τέτοια, ώστε να ισχύει:  $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ . Επειδή  $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in A$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1) \Rightarrow f\left(f^{-1}(y_2)\right) \leq f\left(f^{-1}(y_1)\right) \Rightarrow y_2 \leq y_1$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή  $y_1 < y_2$ . Άρα η (1) αληθεύει πάντοτε και επομένως η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα. (Ομοια εργαζόμαστε στην περίπτωση της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.)<sup>1</sup>

## Εφαρμογή

Επαναληπτικές Εξετάσεις Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 2005  
ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι “1 – 1”.

Μονάδες 7

### Διδακτικές παρατηρήσεις

Το βασικό λάθος που κάνουν οι περισσότεροι μαθητές στο συγκεκριμένο θέμα είναι ότι μεταφέρουν αυθαίρετα το «νόμο της τριχοτομίας» των πραγματικών αριθμών στη συνάρτηση  $f'$ : Επειδή  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , θα ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είτε  $f'(x) < 0$  κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως μονότονη και άρα συνάρτηση “1 – 1”. Ουσιαστικά χρησιμοποιούν τη «μεθοδολογία» της διατήρησης του προσήμου μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα στο οποίο δεν μηδενίζεται και εν συνεχεία τη σχέση παραγώγου-μονοτονίας, παραλείποντας βέβαια και στις δύο περιπτώσεις την ουσιώδη προϋπόθεση της συνέχειας η οποία δεν ισχύει απαραίτητα για την  $f'$ .<sup>2</sup>

Ένας έμμεσος τρόπος απόδειξης εδώ είναι η εφαρμογή της απαγωγής σε άτοπο (ακριβέστερα, η απόδειξη της αντιθετοαντίστροφης πρότασης):

### Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι “1 – 1”. Τότε θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  με  $\alpha < \beta$ , τέτοιοι ώστε να ισχύει  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα και συνεχής σε αυτό, συμπεραίνουμε ότι στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  ισχύουν για την  $f$

οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει αριθμός  $\xi \in (\alpha, \beta)$  με  $f'(\xi) = 0$ , που είναι άτοπο.<sup>3</sup>

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

#### Διδακτικές παρατηρήσεις

Η μεθοδολογική αξία του κριτηρίου παρεμβολής γίνεται ιδιαίτερη φανερή όταν ζητείται ο υπολογισμός του ορίου μιας συνάρτησης χωρίς να δίνεται ο τύπος της, αλλά από τα υπόλοιπα δεδομένα είναι δυνατός ο προσδιορισμός της σχετικής διπλής ανισότητας. Είναι γνωστό ότι η διδασκαλία του αλγεβρικού λογισμού στις προηγούμενες τάξεις δεν έχει ως προτεραιότητα την απόδειξη ανισοτήτων, με αποτέλεσμα οι μαθητές στην Γ' Λυκείου να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στο συγκεκριμένο ζήτημα, πόσο μάλλον όταν η κατάλληλη διπλή ανισότητα για την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής πρέπει να επινοηθεί από τους ίδιους. Όλα τα παραπάνω συνηγορούν για τη μεγάλη αναγκαιότητα δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν συστηματικά τα διαδοχικά στάδια αυτής της διαδικασίας. Ένα εξαιρετικό παράδειγμα που θα μπορούσε να αποτελέσει τον κορμό μιας τέτοιας δραστηριότητας είναι το πρόβλημα προσδιορισμού της παραγώγου της λογαριθμικής συνάρτησης, η απόδειξη της οποίας για ανεξήγητους διδακτικά λόγους παραλείπεται από το σχολικό βιβλίο.

**Η παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης  $f(x) = \ln x$**

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

#### Μια σκιαγράφιση της απόδειξης

Με αφετηρία τον ορισμό της παραγώγου ισχύει ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x_0 \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right)} = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u - 1}$$

Έτσι αναδεικνύεται αρχικά η σημασία του υπολογισμού του ορίου

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

Επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ανεφάρμοστοι οι συνήθεις αλγεβρικοί μετασχηματισμοί και οι αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων, θα αξιοποιήσουμε το κριτήριο παρεμβολής κατασκευάζοντας τις σχετικές ανισότητες.

Υπάρχουν διάφορες επιλογές, η πιο γνωστή από τις οποίες χρησιμοποιεί ως αφετηρία την ανισότητα

$$e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Από την (1) αποδεικνύεται εύκολα η ανισότητα

$$\ln x \leq x - 1, x > 0 \quad (2)$$

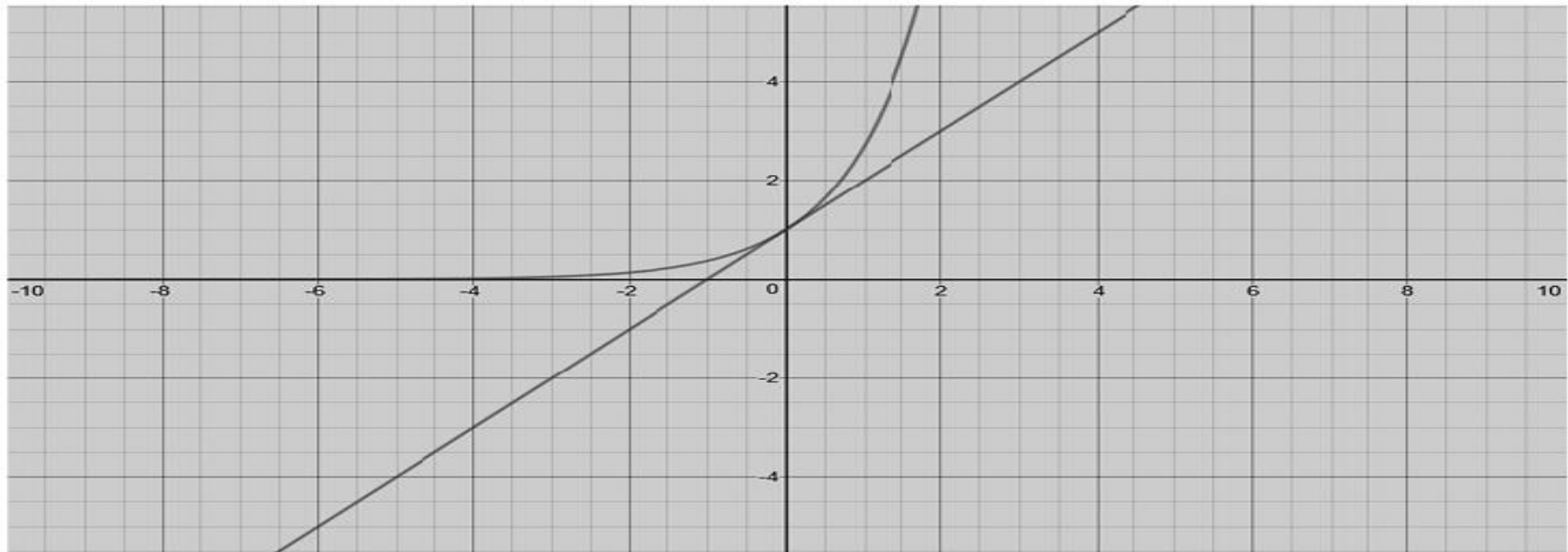
και από τη (2), με διάκριση περιπτώσεων, οι ανισότητες

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq 1, x \in (1, +\infty) \quad \text{και} \quad 1 \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$$

που γράφονται ισοδύναμα:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, x \in (1, +\infty) \quad \text{και} \quad x - 1 \leq \ln x \leq 1 - \frac{1}{x}, x \in (0, 1)^5$$

Στο πλαίσιο αυτής της δραστηριότητας η ανισότητα (1) χρησιμοποιείται ως λήμμα και μπορεί να αιτιολογηθεί γεωμετρικά με χρήση των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων: <sup>6</sup>



Η ανισότητα  $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$

## Εφαρμογή

Επαναληπτικές Εξετάσεις Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 2006  
ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

β. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$  Μονάδες 5

Ο κλασικός υπολογισμός αυτού του ορίου ακολουθεί την «πεπατημένη», δηλαδή τη χρήση του κανόνα de l'Hospital μέσω του μετασχηματισμού

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}.$$

Στο πλαίσιο όμως της προηγούμενης δραστηριότητας, που είχε ως αντικείμενο τον προσδιορισμό της παραγώγου της λογαριθμικής συνάρτησης, αξίζει να αναφερθεί και ο ακόλουθος μετασχηματισμός

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \ln 1}{\left( 1 + \frac{1}{x} \right) - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u - \ln 1}{u - 1} = f'(1)$$

που αναγάγει απ' ευθείας το ζητούμενο όριο στην τιμή της παραγώγου της λογαριθμικής συνάρτησης  $f(u) = \ln u$  στο σημείο 1.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

### Διδακτικές παρατηρήσεις

Ως τέταρτο και τελευταίο παράδειγμα για το περιεχόμενο της διδακτικής πρότασης θα αναπτύξουμε ένα πλάνο παρουσίασης των λεγόμενων «υπαρξιακών» θεωρημάτων που περιέχονται στα σχολικά βιβλία Ανάλυσης. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο πρώτο μέρος της εισήγησης, μέσα στο καθιερωμένο πλαίσιο διδασκαλίας της Ανάλυσης τα σπουδαία αυτά θεωρήματα δεν λειτουργούν για το σκοπό για τον οποίο επινοήθηκαν, δηλαδή ως ακρογωνιαίοι συνδετικοί λίθοι στο θεωρητικό οικοδόμημα της Ανάλυσης.<sup>7</sup> Αντίθετα εκφυλίζονται σε «γεννήτριες» ασκήσεων που επιχειρούν να συνδυάσουν τα πιο ετερόκλιτα στοιχεία της σχολικής ύλης οδηγώντας συνήθως σε «τερατογενέσεις». Σε αυτήν ακριβώς την κατηγορία ανήκουν πολλά θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων της τελευταίας 15ετίας, τα οποία βέβαια οδήγησαν σε μια ανεξέλεγκτη υπερπαραγωγή που καλύπτει τόμους «βοηθημάτων».

### Εφαρμογή

Επαναληπτικές Εξετάσεις Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 2005  
ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι “1 – 1”.

Μονάδες 7

### Διδακτικές παρατηρήσεις

Στο Παράδειγμα 1 δώσαμε μια έμμεση απόδειξη αυτής της πρότασης με απαγωγή σε άτοπο, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Rolle. Για να τονίσουμε ακόμη περισσότερο τις μεγάλες αποδεικτικές δυνατότητες των «υπαρξιακών» θεωρημάτων, θα δώσουμε και μια άμεση απόδειξη σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης  $1 - 1$ :

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$  ισχύει  $f(x_1) \neq f(x_2)$

Επειδή το δεδομένο της πρότασης αναφέρεται σε ιδιότητα των τιμών της παραγώγου και το ζητούμενο σε ιδιότητα των τιμών της συνάρτησης, προσφέρεται μεθοδολογικά η αξιοποίηση του θεωρήματος μέσης τιμής του οποίου οι προϋποθέσεις ισχύουν στη συγκεκριμένη περίπτωση σε κάθε διάστημα της μορφής  $[x_1, x_2]$ .

### Απόδειξη

Θεωρούμε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$  και ειδικότερα  $x_1 < x_2$ . Από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού συμπεραίνουμε ότι για τη συνάρτηση  $f$  θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Άρα, σύμφωνα με την υπόθεση, θα είναι  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$  δηλαδή

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$