Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Β΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Συνοπτική Θεωρία

Ασκήσεις της Τράπεζας Θεμάτων

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Διαγωνίσματα

Επιμέλεια: Συντακτική ομάδα mathp.gr

Συντονισμός Καραγιάννης Ιωάννης ,Σχολικός Σύμβουλος

Συνοπτική θεωρία

1. Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής $αx^ν$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.

Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

2. Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής:

$$α_ν x^ν + α_{ν-1} x^{ν-1} + \dots + α_1 x + α_0,$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και $α_0, α_1, \dots, α_ν$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα μονώνυμα $α_ν x^ν$, $α_{ν-1} x^{ν-1}$, …, $α_1 x$, $α_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $α_ν$, $α_{ν-1}$, …, $α_1$, $α_0$**συντελεστές** αυτού. Ειδικότερα ο $α_0$ λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

3. Τα πολυώνυμα της μορφής $α_0$, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά πολυώνυμα.** Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο.**

4. Δυο πολυώνυμα

$$α_μ x^μ + \dots + α_1 x + α_0 \quad \text{και} \quad β_ν x^ν + \dots + β_1 x + β_0, \quad \text{με } μ \geq ν$$

θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:

$$α_0 = β_0,\ α_1 = β_1,\ \dots,\ α_ν = β_ν \quad \text{και} \quad α_{ν+1} = α_{ν+2} = \dots = α_μ = 0$$

5. Έστω ένα πολυώνυμο $P(x) = α_ν x^ν + α_{ν-1} x^{ν-1} + \dots + α_1 x + α_0$. Αν αντικαταστήσουμε το x με ένα ορισμένο πραγματικό αριθμό ρ, τότε ο πραγματικός αριθμός $P(ρ) = α_ν ρ^ν + α_{ν-1} ρ^{ν-1} + \dots + α_1 ρ + α_0$ που προκύπτει λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** του πολυωνύμου για $x = ρ$.

Αν είναι **$P(ρ) = 0$,** τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου

6. Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x, τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και

7. Αν δυο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x, τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

8. Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.

9. Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των *βαθμών των πολυωνύμων αυτών.*

10. (Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $δ(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε: $Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x)$, όπου το υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

11. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x - ρ$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = ρ$. Είναι δηλαδή $υ = P(ρ)$

Απόδειξη:

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x - ρ$ γράφεται.

$P(x) = (x - ρ)π(x) + υ(x)$

Επειδή ο διαιρέτης $x - ρ$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε:

$$P(x) = (x - ρ)π(x) + υ$$

και, αν θέσουμε $x = ρ$, παίρνουμε

$$P(ρ) = (ρ - ρ)π(ρ) + υ = 0 + υ = υ$$

Επομένως:

$$P(x) = (x - ρ)π(x) + P(ρ)$$

12. Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x - ρ$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν $P(ρ) = 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι το $x - ρ$ είναι παράγοντας του P(x). Τότε

$P(x) = (x - ρ)π(x)$

Από την ισότητα αυτή για $x = ρ$ παίρνουμε:

$$P(ρ) = (ρ - ρ)π(ρ) = 0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(ρ) = 0$. Τότε από τη σχέση

$P(x) = (x - ρ)π(x) + P(ρ)$

Παίρνουμε:

$$P(x) = (x - ρ)π(x),$$

που σημαίνει ότι το $x - ρ$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

Ασκήσεις της Τράπεζας Θεμάτων

ΘΕΜΑ 2ο (19 θέματα)

ΘΕΜΑ 1

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $\left(x^3-6x^2+11x-2\right):(x-3)$

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x):(x-3)$ να έχει υπόλοιπο 0. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x)=-2x^3+\lambda^2\left(x^2-1\right)+\lambda\left(x^3-1\right)+\lambda+9$ και

$Q(x)=(\lambda+12)x^2+(\lambda-2)x^3+\left(\lambda^2-9\right)x$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+x-12$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x-3$ είναι παράγοντας του P(x).

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

(Μονάδες 12)

β) Για $\alpha=-4$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-11x+30$ με α∈IR, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x=1$ είναι 16.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

(Μονάδες 12)

β) Για $\alpha=-4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με β,γ,δ∈IR, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

α) Να δείξετε ότι $\beta=-4$, $\gamma=3$ και $\delta=0$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda^2x^3-4\lambda x+3$, με λ∈IR.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το $x-1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda=3$, να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου P(x).

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4-x^3+\alpha x^2-5x+6$ διέρχεται από το σημείο M(−2,0),

α) να αποδείξετε ότι $\alpha=-14$

(Μονάδες 12)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής, της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f, βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 11

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$ με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι ίσο με -4, να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+2$. Αν το P(x) έχει παράγοντα το $x+1$ και $P(2)=18$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x)=0$

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x)\le 0$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(\kappa-6)x^2-7x+\kappa$.

α) Να βρείτε για ποιά τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του P(x).

(Μονάδες 12)

β) Αν $\kappa=6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$.

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x=1$ είναι ίση με 10 και $P(2)=10$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

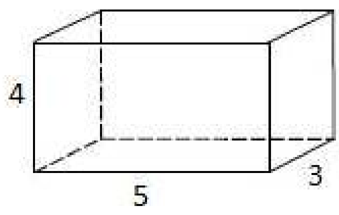
(Μονάδες 12)

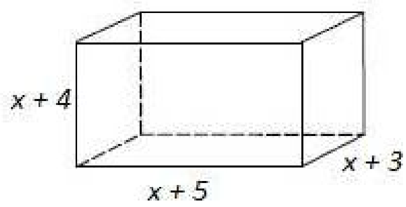
β) Αν $\alpha=-5$ και $\beta=8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)>10$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 15

Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3 cm, 4 cm και 5 cm. Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3, δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.





Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x.

α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3+12x^2+47x-60=0$.

(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: $V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$)

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=\left(\alpha^3+2\right)x^3+x^2+1$ και $Q(x)=3\alpha x^3+x^2+1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha=1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 17

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2-4x+\lambda$.

α) Αν $P(-1)=6$, να δείξετε ότι $\lambda=1$.

(Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 18

Το πολυώνυμο $P(x)=\left(\lambda^2-1\right)x^4-2(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+\lambda+1$ είναι 3ου βαθμού.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=-1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το P(x).

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του P(x).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 19

Το πολυώνυμο P(x) αν διαιρεθεί με το $x-2$ δίνει πηλίκο $\left(x^2-3x+2\right)$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό υ.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Αν $P(1)=10$, να βρείτε το υ.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $υ=10$, να βρείτε το P(x).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4ο (*11 Θέματα)*

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+\alpha x+\beta$, όπου α,β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με $x+1$ αφήνει υπόλοιπο $16+P(1)$ και διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο $16-P(-1)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $P(1)=0$ και $P(-1)=16$

(Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-3$

(Μονάδες 9)

γ) να αποδείξετε ότι $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)\neq 0$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=30\ cm^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x,y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y=\dfrac{60}{x}$ και $(x+1)^2=x^2+y^2$

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0$

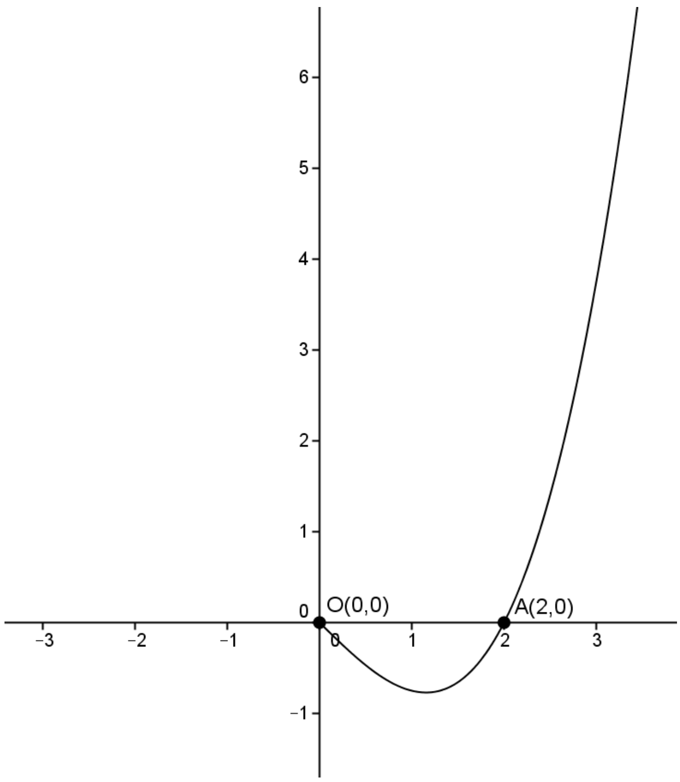
(Μονάδες 4)

γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου. (Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα (γ) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3+\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$ και γ, δ πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma=-1$ και $\delta=0$

(Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$

(Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1)=-\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=-\frac{3}{4}$ και $f(x)=\frac{3}{4}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Έστω P(x) πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε $P(1)=0$ και $P(2)=8$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=8$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(0,1) και Β(1,−2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

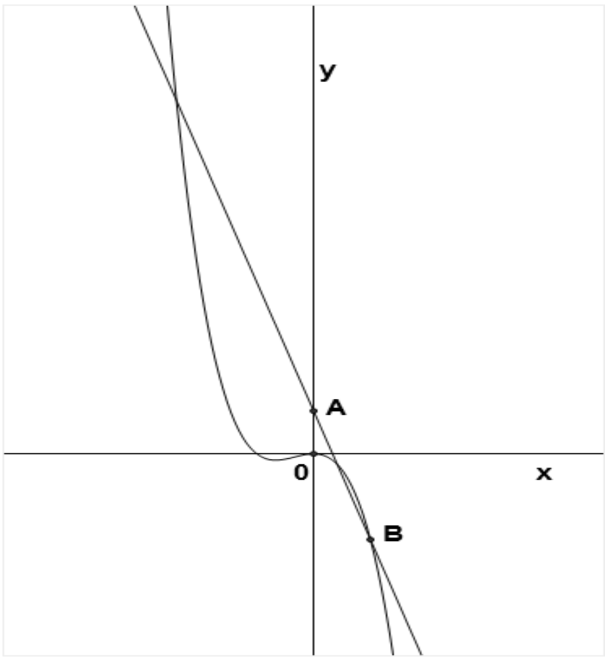
(Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 6

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x^3 + (\kappa - 1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$, κ, λ∈IR.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο P(x) είναι 3^{ου} βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x - 1$ είναι ίσο με −4.

(Μονάδες 7)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το $x - 1$

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$

(Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 1$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ με α, β ∈IR

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι ίσο με −6, να βρείτε τα α, β ∈IR.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 8

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με κ, λ ∈IR.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ,λ∈IR όταν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x + 2$.

(Μονάδες 7)

β) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$ να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x-5}\geq 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-7x+\alpha+5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x)\geq 0$

(Μονάδες 8)

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha^3x^2-\alpha^2x-\alpha$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-\alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x-\alpha)$ διαιρεί το P(x).

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha=-1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)\,P(x)\leq 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 11

Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν: $P(x)=-0{,}5x^3+1{,}9x^2+1, 0\leq x<4$, όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

α) **i.** Να χρησιμοποιήσετε την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος.

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i.

(Μονάδες 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ;

(Μονάδες 10)

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$

2. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 1

3. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$, δηλαδή είναι $\upsilon=P(\rho)$.

4. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

5 . Δύο οποιαδήποτε πολυώνυμα είναι ίσα όταν έχουν τον ίδιο βαθμό.

6. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$

7. Σε οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$ η αριθμητική τιμή $P(0)$ είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου.

8. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού

9. Η εξίσωση $x^4+3x^2+3x+1=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

10. Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζεται κάθε διαιρέτης του σταθερού όρου του.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$

β. Σε οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$ η αριθμητική τιμή $P(0)$ είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου.

γ. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού

δ. Η εξίσωση $x^4+3x^2+3x+1=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

ε . Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζεται κάθε διαιρέτης του σταθερού όρου του.

(Μονάδες 2x5=10)

Β. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$, δηλαδή είναι $\upsilon=P(\rho)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $\mathrm{P(x)}=\left(\alpha^3+2\right)x^3+x^2+1$ και $\mathrm{Q(x)}=3\alpha x^3+x^2+1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha=1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{P(x)}=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2-5x-3a$, το οποίο έχει ρίζα το -1.

Α. Να αποδείξετε ότι $a=2$.

(Μονάδες 6)

Β. Να λύσετε τη εξίσωση $P(x)=0$

(Μονάδες 9)

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x+1} < 6$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - \alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x - \alpha)$ διαιρεί το P(x).

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = -1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)\,P(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$

β. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 1

γ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$, δηλαδή είναι $\upsilon=P(\rho)$.

δ. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

ε . Δύο οποιαδήποτε πολυώνυμα είναι ίσα όταν έχουν τον ίδιο βαθμό.

(Μονάδες 2x5=10)

Β. Έστω πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\alpha_1 x+\alpha_0$ με $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in R$ και $x\in R$.

Πότε λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα του $P(x)$;

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+2}$. Αν το P(x) έχει παράγοντα το $x+1$ και $P(2)=18$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x)=0$

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x)\le 0$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+6$, όπου x πραγματικός αριθμός.

Α. Αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x=3$ είναι ίση με 30 και το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=-7$.

(Μονάδες 13)

Β. Κατόπιν αφού αντικαταστήσετε τα α, β που βρήκατε στο ερώτημα (Α), να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^3-x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(0,1) και Β(1,−2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

(Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y=-3x+1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3-x^2<-3x+1$

(Μονάδες 9)