# Ερωτήσεις κατανόησης κεφ. 2 σελίδων 295 - 299

## Ι

**Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας .**

**1.**

Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$ Α Ψ

**Αιτιολογία**

Αν ήταν $f(0) = f(1)$, τότε από το Θ.Rolle στο $[0, 1]$, θα υπήρχε ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο.

**2.**

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) < 0$. Α Ψ

**Αιτιολογία**

Αν ήταν $f'(x_o) \geq 0$ για κάθε $x_o \in (\alpha, \beta)$, τότε η $f$ θα ήταν γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, οπότε δεν θα μπορούσε να είναι $f(\beta) < f(\alpha)$

**3.**

Αν οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_o, f(x_o))$ και $B(x_o, g(x_o))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες . Α Ψ

**Αιτιολογία**

Για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει το Θ. Rolle, οπότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h'(x_o) = 0 \Rightarrow$

$$f'(x_o) - g'(x_o) = 0$$

$$f'(x_o) = g'(x_o) .$$

Δηλαδή οι εφαπτόμενες στα Α και Β είναι παράλληλες.

## 4.

Αν $f\,'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :

α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της $f$ — Α Ψ

β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f$ — Α Ψ

**Αιτιολογία**

Οι ρίζες και το πρόσημο της $f\,'$ φαίνονται στον πίνακα

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | ↘ | ↘ | ↘ | | ↗ | |

Βλέπουμε ότι η $f$ δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 1, ενώ έχει τοπικό ελάχιστο στο 2

## 5.

**α)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη. — Α Ψ

**β)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη — Α Ψ

**Αιτιολογία**

**α)** Η πρώτη παράγωγος θα είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού, που ως γνωστόν έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα, συνεπώς θα έχουμε μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.

**β)** Η πρώτη παράγωγος θα είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού, οπότε δεν είναι υποχρεωτικό να έχει πραγματικές ρίζες.

## 6.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. — Α Ψ

**Αιτιολογία**

Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι η $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, η οποία έχει πάντα μία τιμή μηδενισμού αφού $\alpha \neq 0$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο, άρα πάντα έχουμε ένα σημείο καμπής.

## 7.

Αν οι συναρτήσεις $f, g$ έχουν στο $x_o$ σημείο καμπής, τότε και η συνάρτηση $h = f \cdot g$ έχει στο $x_o$ σημείο καμπής. Α Ψ

**Αιτιολογία**

Ένα αντιπαράδειγμα.
$f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$
Οι $f''$ και $g''$ μηδενίζονται στο $x_0 = 0$ και αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν αυτού, άρα παρουσιάζουν καμπή στο 0.
Αλλά $h(x) = x^8 \Rightarrow h'(x) = 8x^7$ και $h''(x) = 56x^6$
Οπότε η $h''$ μηδενίζεται στο $x_0 = 0$, αλλά δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Άρα δεν παρουσιάζει καμπή στο 0.

## 8.

Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα των x .
Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ της $C_f$ του οποίου η απόσταση από τον άξονα των x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε η εφαπτομένη σ' αυτό θα είναι οριζόντια. Α Ψ

**Αιτιολογία**

Είναι φανερό ότι το σημείο Α θα βρίσκεται σε σχέση με τα υπόλοιπα ψηλότερα ή χαμηλότερα από τον άξονα των x οπότε η συνάρτηση θα έχει ακρότατο στο $x_o$ και επειδή παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ σύμφωνα με το Θ.Fermat θα είναι $f'(x_o) = 0$ , οπότε η εφαπτομένη οριζόντια

**9.**

Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ Α Ψ

β) $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$ Α Ψ

**Αιτιολογία**

**α)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x - 1} = -1$

άρα η $x = 1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

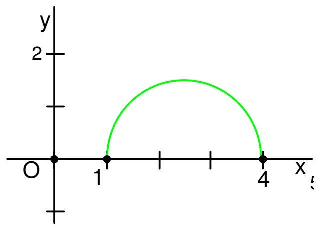
**β)** $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x - 1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x - 1}$

και επειδή $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 2}{x - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x - 2}{x - 1} = +\infty$ ,

η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

## 10.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε




i) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1, 4)$ Α Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1, 4]$ Α Ψ

iii) $f\,'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$ Α Ψ

iv) υπάρχει $x_o \in (1, 4) : f\,'(x_o) = 0$ Α Ψ

**Αιτιολογία**

**i)** Όπως φαίνεται από την γραφική παράσταση, υπάρχει σημείο $x_o \in (1, 4)$ το οποίο είναι ψηλότερα από όλα τα άλλα και στο οποίο η $f$ παραγωγίζεται, άρα από Θ.Fermat θα είναι $f'(x_o) = 0$

**ii)** Ομοίως με το (i)

**iii)** Όχι, διότι η συνάρτηση είναι και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 4]$

**iv)** Η εξήγηση δίνεται στο (i)

## 11.

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει

α) μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ Α Ψ

β) μία ακριβώς ρίζα στο $(-1, 0)$ Α Ψ

γ) τρεις πραγματικές ρίζες Α Ψ

**Αιτιολογία**

**α)** Όχι επειδή όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί

**β)** Ισχύει Bolzano και είναι γνησίως αύξουσα, αφού $f\,'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

**γ)** Καλύπτεται από το (ii)

**12.**

Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις $f$, $g$ ισχύουν

$f(0) = 4, \quad f'(0) = 3, \quad f'(5) = 6, \quad g(0) = 5, \quad g'(0) = 1, \quad g'(4) = 2,$

τότε $(fog)'(0) = (gof)'(0)$ Α Ψ

**Αιτιολογία**

$(fog)'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(5)\cdot 1 = 6$

$(gof)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(4)\cdot 3 = 6$

# II

**Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε την σωστή απάντηση .**

**1.**

Το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+h)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Β $\dfrac{4}{3}$ Γ. $\sqrt{3}$ Δ. $\dfrac{3}{4}$

**2.**

Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με

Α. $\dfrac{1}{x^2}$ Β. $-\dfrac{2}{x^2}$ Γ $-\dfrac{1}{x^2}$ Δ. $-\dfrac{2}{x}$ Ε. 0

**3.**

Αν $f(x) = 5^{3x}$ , τότε η $f\,'(x)$ ισούται με

Α. $3x\cdot 5^{3x-1}$ Β. $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ Γ . $3\cdot 5^{2x}$ Δ . $3\cdot 5^{3x}$ Ε $5^{3x}\ln 125$

**4.**

Αν $f(x)=$ συν$^3(x+1)$, τότε η $f'(\pi)$ ισούται με

Α. 3συν$^3(\pi+1)$ημ$(\pi+1)$ Β. 3συν$^2(\pi+1)$ Γ $-3$συν$^2(\pi+1)$ημ$(\pi+1)$

Δ. 3πσυν$^2(\pi+1)$

**5.**

Αν $f(x) = (x^2 - 1)^3$ , τότε η $7^{\eta}$ παράγωγος είναι

Α . 1 Β. $-1$ Γ 0 Δ.. 27 Ε. δεν υπάρχει

**6.**

Αν οι εφαπτομένες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x^2$ στα σημεία με τετμημένη $x_o$ είναι παράλληλες τότε το $x_o$ είναι

Α. 0 Β. $\frac{1}{4}$ Γ $\frac{1}{2}$ Δ.1 Ε.2

**7.**

Αν $f(x) = e^{\beta x}$ , $g(x) = e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με :

Α. $\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}$ Β. $\frac{\alpha^2}{\alpha + 1}$ Γ. $\frac{\alpha + 1}{\alpha^2}$

Δ. $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$ Ε $\frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$

**8.**

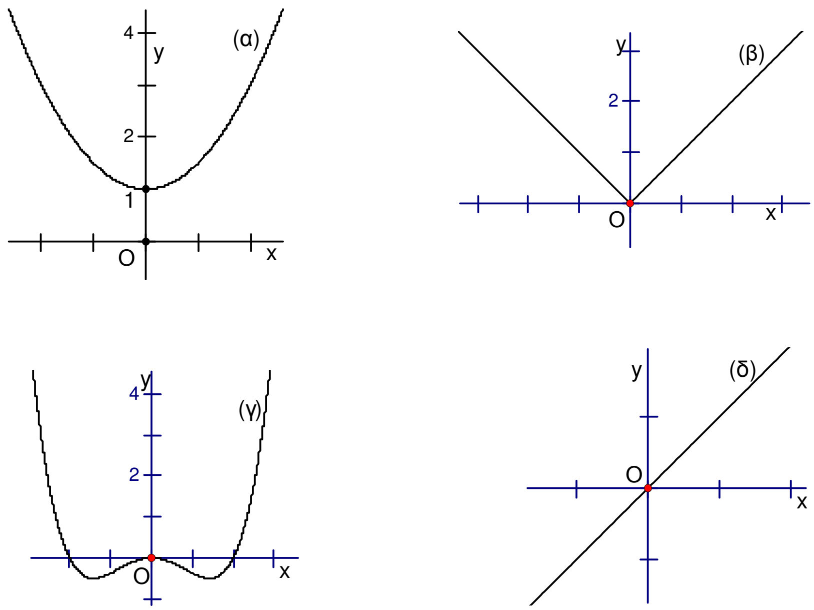
Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = 0$, τότε

Α. $f(1) = -1$ Β .$f(-1) > 0$ Γ $f(1) > 0$ Δ. $f(-1) = 0$

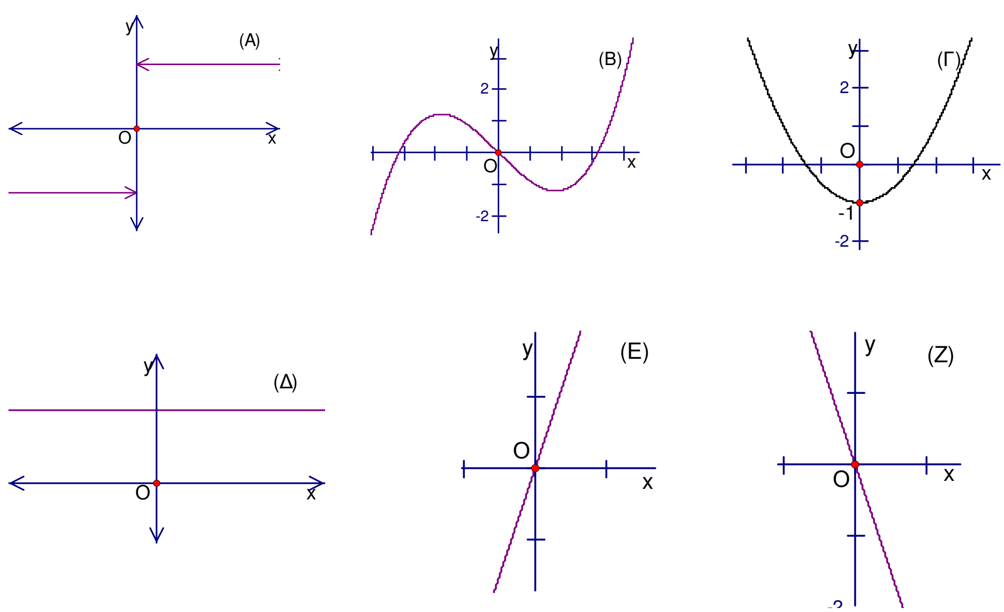
# III

**1.**

**Να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζεται ότι είναι η παράγωγός της .**




……………………………………………………………………………………




α ⟶ Ε , β ⟶ Α , γ ⟶ Β , δ ⟶ Δ

**2.**

**Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$**

| **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** | **ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ** |
| --- | --- |
| $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ | $\psi = 2$ |
| $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$ | $\psi = x - 1$ |
| $f(x) = 2 + \frac{3}{x-2}$ | $\psi = -x+1$ |
| | $\psi = x$ |
| | $\psi = -x$ |