ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ 1ο :

Α1. Θεωρία του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία του σχολικού βιβλίου.

Α3.
α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Σωστό.

ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι:

$$\begin{aligned} D_f &= (-\infty, 1] \\ D_g &= \mathbb{R} \end{aligned}.$$

Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \le 1\} = [-1, 1]$$

Για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2} - 1, x \in [-1, 1]$$

Το πεδίο ορισμού της gof είναι:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\} = \{x \le 1 \,/\, \sqrt{1-x} - 1 \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 1]$$

Για κάθε $(-\infty, 1]$ έχουμε:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \left(\sqrt{1-x} - 1\right)^2 = 1 - x + 1 - 2\sqrt{1-x} = 2 - x - 2\sqrt{1-x}, x \in (-\infty, 1]$$

Β2. Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη αφού:

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1 - x_1} > \sqrt{1 - x_2} \Rightarrow \sqrt{1 - x_1} - 1 > \sqrt{1 - x_2} - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,1\right]$, δηλαδή και «1-1», επομένως η f είναι αντιστέψιμη.

Για την αντίστροφη της f έχουμε:

$y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}-1\Leftrightarrow \sqrt{1-x}=y+1\Leftrightarrow 1-x=\left(y+1\right)^2\Leftrightarrow x=1-\left(y+1\right)^2\ (y+1\geq 0\Leftrightarrow y\geq -1)$

Πρέπει ακόμα $1-\left(y+1\right)^2\leq 1\Leftrightarrow -\left(y+1\right)^2\leq 0$, που αληθεύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Άρα η αντίστροφη f^{-1} της f είναι :

$$f^{-1}\left(x\right)=1-\left(x+1\right)^2=1-\left(x^2+2x+1\right)=-x^2-2x,\ x\geq -1$$

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)-\frac{1}{4},\ x\in\left[-1,1\right]$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την h στο $\left[-1,1\right]\subset\mathbb{R}$.

- Η h είναι συνεχής στο $\left[-1,1\right]$(ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)
- $h(-1)=f(-1)+g(-1)-\dfrac{1}{4}=\sqrt{2}-1+1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4\sqrt{2}-1}{4}>0$
  $h(1)=f(1)+g(1)-\dfrac{1}{4}=-1+1-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}<0$

Επομένως $h(-1)\cdot h(1)<0$ και άρα υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα

$$\xi\in\left(-1,1\right):h\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow f\left(\xi\right)=\frac{1}{4}-g\left(\xi\right)$$

B4. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,1\right]$ το σύνολο τιμών της θα είναι:

$$\left[f(1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[-1,\infty\right)$$

Ή αλλιώς το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή το $D_{f^{-1}}=\left[-1,\infty\right)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Όταν $x\to+\infty$ είναι $x>0$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0$$

Όταν $x \to -\infty$ είναι $x<0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right) \quad (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ και:

$$\left|\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right| \le \frac{1}{x^{2016}} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^{2016}} \le \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} \le \frac{1}{x^{2016}}$$

$$\text{με } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{2016}} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^{2016}}\right) = 0$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} = 0.$$

Επομένως από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} = 1+0 = 1$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι:

- Συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 0)$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)
- Συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο σημείο $x_0 = 0$.

Είναι $f(0) = 1$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 1$$

Ακόμα:

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^{2016} = 1$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} = 0+1=1$$

Οπότε $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ και άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

Επομένως η f είναι συνεχής και στο 0, αφού $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Γ3. Επειδή:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = 0-\infty = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = 1+\infty = +\infty$$

υπάρχουν $x_1>0,\ x_2<0$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $h(x_1)<0,\ h(x_2)>0$.

Επομένως θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)-x, x\in[x_2,x_1]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[x_2,x_1]\subset\mathbb{R}$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων)
- $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$

Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(x_2,x_1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία , τουλάχιστον, πραγματική λύση.

Γ4. Για $x\geq 0$ έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Ισχύει:

$$0\leq x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2<x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1<x_2^2+1 \Rightarrow \sqrt{x_1^2+1}<\sqrt{x_1^2+1}$$

, δηλαδή έχουμε:

$$x_1<x_2 \ (1)$$
$$\sqrt{x_1^2+1}<\sqrt{x_1^2+1} \ (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) , (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\sqrt{x_1^2+1}+x_1<\sqrt{x_1^2+1}+x_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}+x_1}>\frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}+x_1} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα έχουμε:

$$1<2<3<4<5 \Leftrightarrow f(1)>f(2)>f(3)>f(4)>f(5)$$
$$f(1)>f(2)>f(5) \Leftrightarrow 2f(5)<2f(2)<2f(5)\ (3)$$
$$f(1)>f(3)>f(5) \Leftrightarrow 3f(5)<3f(3)<3f(1)\ (4)$$
$$f(1)>f(4)>f(5) \Leftrightarrow 4f(5)<4f(4)<4f(1)\ (5)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3), (4) και (5) κατά μέλη έχουμε:

$$9f(5)<2f(2)+3f(3)+4f(4)<9f(1) \Leftrightarrow f(5)<\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}<f(1)$$

Άρα , σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9} \Leftrightarrow 9f(\xi)=2f(2)+3f(3)+4f(4)$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. i) Για $x=y=0$ έχουμε:

$$f(0+0)=f(0)\cdot f(0) \Leftrightarrow f(0)=f^2(0) \Leftrightarrow f(0)(f(0)-1)=0 \Leftrightarrow (f(0)=0 \text{ ή } f(0)=1)$$

Δεκτή τιμή είναι η $f(0)=1\in(0,\infty)$.

ii) Για $x=1, y=-1$ έχουμε:

$$f(1-1)=f(1)\cdot f(-1) \Leftrightarrow f(0)=ef(-1) \Leftrightarrow 1=ef(-1) \Leftrightarrow f(-1)=\frac{1}{e}$$

Δ2. i) Αφού η f είναι συνεχής στο 0 θα είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ (Ι)

Θέτουμε:

$$x-x_0=h \Leftrightarrow x=x_0+h$$
$$x\to x_0 \Leftrightarrow h\to 0$$

Τότε η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0)\cdot f(h)\right)=f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0} f(h)=f(x_0)$$

ii) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, αφού γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως μονότονη και $f(0)=1,\ f(-1)=\frac{1}{e}$. Επομένως και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας (το οποίο πρέπει να αποδείξουμε ως πρόταση και υπάρχει αποδεδειγμένο στις σημειώσεις), δηλαδή η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. i) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι είτε πραγματικός αριθμός είτε $+\infty$.

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Έχουμε $f(1)=e$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l>e$. Είναι:

$$l>e>2 \Rightarrow l>2 \Rightarrow l-1>1$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=l-1$. Επομένως έχουμε:

$$f(x_0+x_0)=f(x_0)\cdot f(x_0) \Leftrightarrow f(2x_0)=f^2(x_0)=(l-1)^2>l$$

Δηλαδή το $f(2x_0)$ δεν βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f που είναι άτοπο. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Ακόμα έχουμε:

Για $y=-x$ έχουμε:

$$f(x+(-x))=f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(0)=f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow 1=f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{y\to+\infty} f(-y)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

(ii)

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(1)\cdot f(-x)}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(1)}{f^2(x)}=f(1)\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{f^2(x)}=\frac{f(1)}{f^2(0)}=\frac{e}{1}=e$$

Δ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$, αφού είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $0<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$, έχουμε:

$$f(0)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1) \quad (1)$$

$$f(0)<f\left(\frac{1}{3}\right)<f(1) \quad (2)$$

$$f(0)<f\left(\frac{1}{4}\right)<f(1) \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) ,(2) , (3) έχουμε:

$$3f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) < 3f(1) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} < f(1)$$

Επομένως από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} \Leftrightarrow 3f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)$$