Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 1ο
Συναρτήσεις

ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Ορισμός συνάρτησης

Συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου *A* αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου *B*. Το σύνολο *A* λέγεται ***πεδίο ορισμού*** της συνάρτησης, ενώ το *B* λέγεται **πεδίο τιμών**.

Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της *f* στο *x***. Το γράμμα *x*, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του *A*, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το *y*, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο *x* και εξαρτάται από την τιμή του *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

2. Πράξεις με συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις *f*, *g* ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο *A*, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

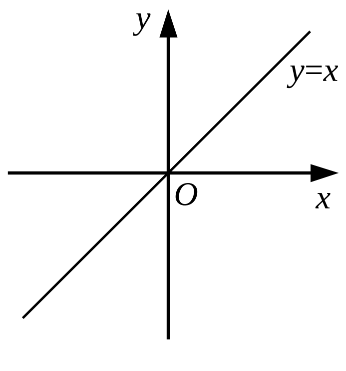
- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- Το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$, με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

3. Γραφική παράσταση συνάρτησης

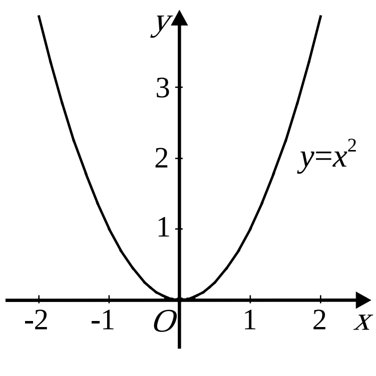
Αν *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *A, τότε* **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της** *f* σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, (f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

4. Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων

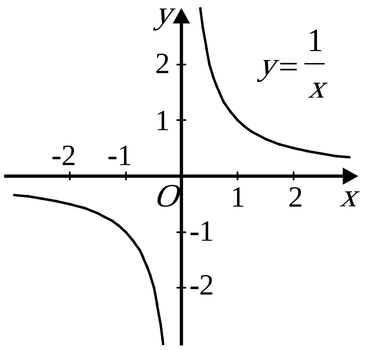
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων που γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.



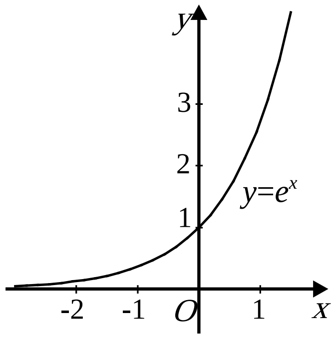
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



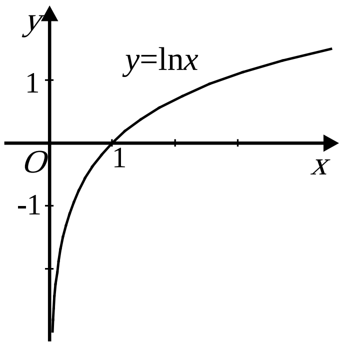
(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια *παραβολή*.



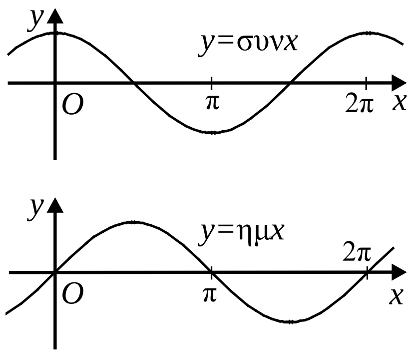
(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι μια *υπερβολή*.



(δ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι "πάνω" από τον άξονα $x'x$, αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.



(ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\ln x$ είναι "δεξιά" του άξονα yy', αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x>0$.



(στ) Οι συναρτήσεις $f(x)=\text{ημ}x$ και $g(x)=\text{συν}x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

5. Μονοτονία – Ακρότατα

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και
- **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει:

- **τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και
- **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

6. Ιδιότητες ορίων

Αν οι συναρτήσεις *f* και *g* έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\ell_1+\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x))=k\ell_1$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\ell_1\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\nu}=\ell_1^{\nu}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$.

7. Συνέχεια συνάρτησης

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $\boldsymbol{x_0\in A}$ ισχύει $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$.

- Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.
- Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις.

8. Παράγωγος της f στο x = x_0

Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο $\boldsymbol{x_0}$ του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0**, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται “ f τονούμενο του x_0”.

Έχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

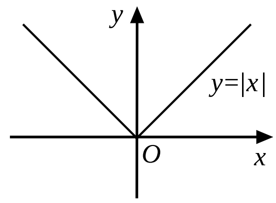
Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει:

- **το ρυθμό μεταβολής** (rate of change) του $y=f(x)$ ως προς το *x*, όταν $x=x_0$.
- τον **συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης** της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$

Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 :

$\upsilon(t_0)=f'(t_0)$,δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t=t_0$.

ΣΧΟΛΙΟ



Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ στο $x_0=0$. Διότι όταν $h<0$, έχουμε: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h}=-1$,

ενώ όταν $h>0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

9. Παράγωγος συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x\in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x\in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) **της *f* και συμβολίζεται με f'**.

- Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της *f* και συμβολίζεται με f''.
- Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητά του θα είναι $\boldsymbol{\upsilon(t)=x'(t)}$. Αν η συνάρτηση *υ* είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή *t* θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει $\alpha(t)=\upsilon'(t)$ ή ισοδύναμα $\alpha(t)=x''(t)$.

10. Βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης

$(c)'=0$	$(cf(x))'=cf'(x)$
$(x)'=1$	
$(x^\rho)'=\rho x^{\rho-1}$	$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(\text{ημ}x)'=\text{συν}x$	
$(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x$	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(e^x)'=e^x$	

$(\ell n x)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

11.Κριτήρια πρώτης παραγώγου

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.
3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.
4. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

ΣΧΟΛΙΟ: Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και η παράγωγός της f′ διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Παραγώγιση βασικών συναρτήσεων (Αποδείξεις)

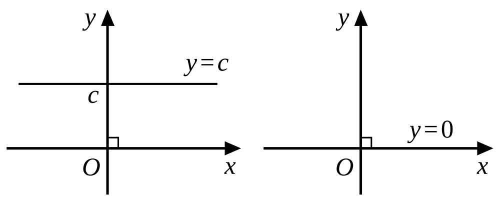
1. Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$



(α) (β)

οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.

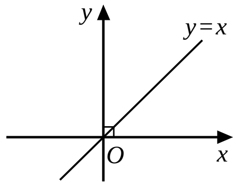
Άρα $(c)' = 0$.

2. Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$

(α)

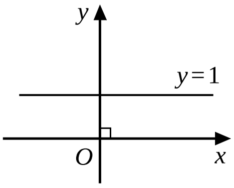
Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1.$$



Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$.

Άρα $\boldsymbol{(x)'=1}$.



(β)

3. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^{\rho}$

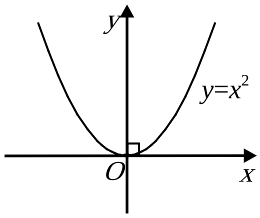
Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h\,,$$

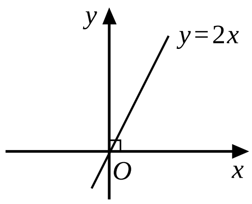
και για $h\neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(2x+h)h}{h}=2x+h$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

Άρα $\boldsymbol{(x^2)'=2x}$



(α)



(β)

Αποδεικνύεται ότι

$$\boldsymbol{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}\text{, όπου } \nu \text{ φυσικός.}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός. Άρα $\boldsymbol{(x^{\rho})'=\rho x^{\rho-1}}$,

όπου ρ ρητός αριθμός . Για παράδειγμα:

- ❖ $\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$,
- ❖ $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Κανόνες Παραγώγισης (Αποδείξεις)

4. Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$, και για $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c(f(x+h)-f(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$.

Άρα $\boldsymbol{(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)}$.

5. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)+g(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))$$

$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)),$$

και για $h\neq 0$, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Άρα $\boldsymbol{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-1$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}$.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Πρέπει $x \geq 0$. Αρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, +\infty)$.

β) Για τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Αρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.

Για τα σημεία τομής με τον άξονα $y'y$, έχουμε $f(0) = \sqrt{0} - 1 = -1$.

Αρα η γραφική παράσταση της fτέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -1)$.

γ) Είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\mathrm{x}^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}^2-1}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(\mathrm{x}+1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{(1+1)\left(\sqrt{1}+1\right)} = \frac{1}{4}.$$

δ) Η εφαπτομένη στο $A(1,0)$ θα έχει εξίσωση $\varepsilon\colon y = \lambda x + \beta$, με $\lambda = f'(1)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$.

Αρα $\lambda = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

Επιπλέον το σημείο $A(1,0)$ είναι σημείο της εφαπτομένης, οπότε ισχύει $0 = \lambda \cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = -\lambda = -1/2$.

Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(1,0)$ είναι $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \cdot x^2 - 5x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 2$, τότε να υπολογίσετε το α.

β) Αν $\alpha = 3$

i. Να υπολογίσετε το όριο $lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

α) Η παράγωγος της συνάρτησης f ισούται με $f'(x) = 2 \cdot \alpha \cdot x - 5$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $f'(1) = 2 \cdot \alpha - 5$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y = x - 2$, είναι ίσος με 1, οπότε ισχύει

$f'(1) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha - 5 = 1 \ \Leftrightarrow \alpha = 3$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x-1}$$

Το τριώνυμο $3x^2 - 5x + 2$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και $\frac{2}{3}$ άρα παραγοντοποιείται ως εξής:

$3x^2 - 5x + 2 = \ 3(x-1)(x-\frac{2}{3})$, οπότε το παραπάνω όριο γίνεται

$$\lim_{x \to 1} \frac{3(x-1)(x-\frac{2}{3})}{x-1} = \lim_{x \to 1} 3(x-\frac{2}{3}) = 1$$

Εχουμε

$f'(x) = (3x^2 - 5x + 2)' = 6x - 5$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{6}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{6}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 5 < 0 \ \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{6}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

Αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6}, +\infty\right)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{5}{6}$, το $f\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{12}$.

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε το α αν η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο ίσο με 5.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$

$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + \alpha)' = 3x^2 - 12x$

β) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$

Το πρόσημο και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	τ. μέγιστο $(0, f(0) = \alpha)$	↘	τ. ελάχιστο $(4, f(4) = \alpha - 32)$	↗	

Από τον πίνακα μεταβολών της f διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 4$, ίσο με $f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + \alpha = 64 - 96 + \alpha = -32 + \alpha$

και τοπικό μέγιστο για $x = 0$, ίσο με $f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + \alpha = \alpha$

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα $f(4) = -32 + \alpha$. Αλλά $f(4) = 5$, οπότε $-32 + \alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 37$

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 + \alpha \cdot x + 4, x \in \mathbb{R}$ όπου α μία πραγματική σταθερά.

i. Να βρείτε το α ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς το x να μηδενίζεται για $x = \frac{1}{3}$.

ii. Για $\alpha = 3$, να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Λύση

i. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η παράγωγος της

$f'(x) = (x^3 - 5x^2 + \alpha \cdot x + 4)' = 3x^2 - 10x + \alpha$

Θέλουμε $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 10 \cdot \frac{1}{3} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3.$

ii. Για $\alpha = 3$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

Για να βρούμε σε ποιο σημείο ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο της $f'(x)$.

$f''(x) = (3x^2 - 10x + 3)' = 6x - 10.$

Λύνουμε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 10 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$

Οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$. Αρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{5}{3}$, δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος στο $x = \frac{5}{3}$

Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης f.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}.$$

Λύση

i. Για να ορίζεται η f πρέπει $x^2 - 2x + 3 > 0$.

Ομως το τριώνυμο x^2-2x+3 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3=-8<0$, άρα $x^2-2x+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (το x^2-2x+3 θα έχει πάντα το πρόσημο του συντελεστή του x^2). Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

ii. Η συνάρτηση f προκύπτει αν στη συνάρτηση $h(x)=lnx$ αντικαταστήσουμε το x με τη συνάρτηση $g(x)=x^2-2x+3$, δηλαδή είναι $f(x)=h(g(x))$, οπότε για την παράγωγο έχουμε

$f'(x)=h'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)=\frac{1}{x^2-2x+3}\cdot(x^2-2x+3)'=\frac{2x-2}{x^2-2x+3}$.

iii. Εχουμε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-2}{x^2-2x+3}=0\Leftrightarrow x=1$$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2x-2}{x^2-2x+3}>0$. Ομως $x^2-2x+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα πρέπει: $2x-2>0$ $\Leftrightarrow x>1$

x	-∞	1	+∞
f′(x)	-	0	+
f(x)	↘	f(1)	↗

Αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το $f(1)=\ln(1^2-2\cdot 1+3)=ln2$.

iv. $\frac{f'(x)}{x^2-1}=\frac{2x-2}{(x^2-2x+3)(x^2-1)}=\frac{2(x-1)}{(x^2-2x+3)(x-1)(x+1)}=\frac{2}{(x^2-2x+3)(x+1)}$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x^2-2x+3)(x+1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε ισχύει: $f'(x_o) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)+f(x_o)}{h}$.
2. Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτόμενης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_o, f(x_o))$ θα είναι $f'(x_o)$ δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της f(x) ως προς x όταν $x = x_o$.
3. Μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως φθίνουσα όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$
4. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.
5. Ισχύει: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
6. Αν για μια συνάρτηση ισχύουν $f'(x_o) = 0$ για κάθε $x_o \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), τότε η f παρουσιάζει στ διάστημα (α, β) για $x = x_o$ μέγιστο.
7. Η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_o του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x_o)$ ως προς το x, όταν $x = x_o$.
8. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση f(x) δεν παρουσιάζει ακρότατα.
9. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο A και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ τότε ισχύει ότι: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$, για κάθε $x \in A$
10. Για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει ότι: $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
11. Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται σε ένα σύνολο A τότε το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$ με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ορίζεται στο A.

12. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο Α ισχύει $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o \in A$.

13. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν f ′ (x_0) = 0, για x_0∈(α,β), f ′ (x) > 0 στο (α, x_0) και f ′(x) < 0 στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α, β) για x = x_0.

14. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

15. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει f ′ (x_0) = 0, για x_0∈(α,β) και η παράγωγός της f ′ διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

ΨΗΦΙΑΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

1. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.
iii. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.
iv. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα x΄x .

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{2011}$.

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2011} - 1}{h}$.
ii. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
iii. Βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x) - 2011x^{2009}}{x - 1}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
ii. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης f .
iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
iv. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ και $g(x)=\sqrt{x}-1$.

i. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

iii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

iv. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4},f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2+4x}$. Να βρεθεί:

i. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f

ii. Να αποδειχθεί ότι $f'(x)+(2x-4)f(x)=0$.

iii. Να δείξετε ότι το μέγιστο της συνάρτησης f είναι το e^4.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+k^2},\ k>0$. Αν το σημείο $M\left(1,\sqrt{2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τότε:

i. Να δείξετε ότι $k=1$.

ii. Να δείξετε ότι $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{g(x)}$, όπου g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο Α(0,1) και η εφαπτομένη της στο Α είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $y=2x+2011$ τότε:

i. Να βρεθεί το $f'(0)$.

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(0,f(0))$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha\ln x+\beta x,\ x>0$ και $\alpha,\beta>0$.

i. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii. Βρείτε τα σημεία Α και Β που η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

iii. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

iv. Αν $\beta=(\alpha-1)^2$, βρείτε το α ώστε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του παραπάνω τριγώνου να είναι μέγιστο.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+3x^2-6x+2011$.

i. Βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda(x)$ της εφαπτομένης της καμπύλης της f σε κάθε σημείο της $M(x,f(x))$.

ii. Για ποια τιμή του x, ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda(x)$ γίνεται ελάχιστος;

iii. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

iv. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$.

10. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μεταβάλλεται έτσι ώστε το άθροισμα της βάσης του ΒΓ και του ύψους του ΑΔ να είναι 20cm.
α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει της βάσης του ΒΓ = x είναι $E(x) = 10x - \frac{1}{2}x^2$
β) Να βρείτε το μήκος της βάσης του ΒΓ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο. Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x} + \mu e^x,\ x \in \mathbb{R}$ όπου ο αριθμός λ είναι το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x}$ και ο αριθμός μ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x) = x \cdot \ln x - x,\ x > 0$.

i. Να υπολογίσετε τους αριθμούς λ και μ.
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
iii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(e^{-3}, g(e^{-3}))$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + k,\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη ε_1 της γραφικής παράστασης στο σημείο με τεταγμένη -4 , είναι παράλληλη στον άξονα x΄x , τότε:
i. Να δείξετε ότι $k = -4$ και να βρείτε την εξίσωση αυτής της εφαπτομένης.
ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 0$ είναι η $y = 2\alpha x - \alpha^2 - 4$.
iii. Αν η εφαπτομένη ε_2 τέμνει την ε_1 στο σημείο Β και τον άξονα x΄x στο Γ, να δείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου ΟΓΒΔ (όπου $\Delta(0, -4)$), δίνεται από τον τύπο $E(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 4}{\alpha},\ \alpha > 0$.
iv. Να βρεθεί το σημείο Α της γραφικής παράστασης της f για το οποίο το εμβαδό $E(\alpha)$ γίνεται ελάχιστο.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f καλείται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την μονοτονία συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) \qquad + g'(x)$$

Μονάδες 7

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας *Σωστό ή Λάθος* δίπλα στο γράμμα που ακολουθεί σε κάθε πρόταση:

α. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o πραγματικό αριθμό, τότε ισχύει πάντα ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

β. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση x = f (t), τη χρονική στιγμή t_o είναι $υ(t_o) = f'(t_o)$.

γ. Για τη συνάρτηση f(x) = ημx ισχύει ότι (ημx)′ = – συνx .

δ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_o) = 0$ για $x_o \in (α, β)$, $f'(x) > 0$ στο $(α, x_o)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_o, β)$, τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_o$ ελάχιστο.

ε. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o \in A$, όταν $f(x) \le f(x_o)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_o.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{2-x}}$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε το σημείο τομής Α της C_f με τον άξονα xx΄. Μονάδες 6

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot(4-x^2)]$ Μονάδες 6

Β4. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Α με τον άξονα x΄x. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)= e^{αx^2+βx}$, με $α, β\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι f ΄(1) = 5f(1) και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, e^3)$, τότε:

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{2x^2+x}$, $x\in\mathbb{R}$ Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε το σημείο τομής Μ της C_f με τον άξονα yy΄ και την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο Μ. Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f''(x) = f'(x)\cdot(4x+1) + 4\cdot f(x)$ Μονάδες 6

Γ4. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης για x = 2.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = \left(f(x^2)\right)' - f'(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $g(x) = 6x^5 - 3x^4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)}{\sqrt{2x+3}-2}$ Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι η ευθεία y = 18x –15 εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g και να βρείτε το σημείο επαφής. Μονάδες 7

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Α λέγεται συνεχής και πότε παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0 \in A$; Μονάδες 8

Α2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$, είναι ίση με $f'(x) = 2x$. Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές **(Σ)** ή λανθασμένες **(Λ)**:

i. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

ii. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

iv. Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισούται πάντα με το $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

v. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha^2}$, με $\alpha > 0$. Αν το σημείο $M(1, \sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τότε:

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$. Μονάδες 5

Β2. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in IR$. Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 0$.
Μονάδες 5

Β4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x} + x$, όπου $x \in IR$, $\lambda \in IR$.

Γ1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f' και f''. Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 1 - 2x$, για κάθε $x \in IR$.

Μονάδες 7

Γ3. Για τη μικρότερη από τις τιμές του λ που βρήκατε στο β) ερώτημα, να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) - \frac{x^2}{4}$.

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. Μονάδες 5

Δ2. Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$. Μονάδες 6

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 9

Δ4. Να δείξετε ότι $x-1 \leq e^{\frac{x^2-4}{4}}$, για κάθε $x > 1$. Μονάδες 5