Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α

Γ΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

(Α΄ΜΕΡΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ

Μονοτονία συνάρτησης

Ακρότατα συνάρτησης

Συνάρτηση «1-1»

Αντίστροφη Συνάρτησης

Θωρία-Σχόλια-Μεθοδολογικές υποδείξεις-Παραδείγματα-Ασκήσεις σε κατηγορίες

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Σχολικό Έτος: 2016-2017

ΜΑΘΗΜΑ 7ο

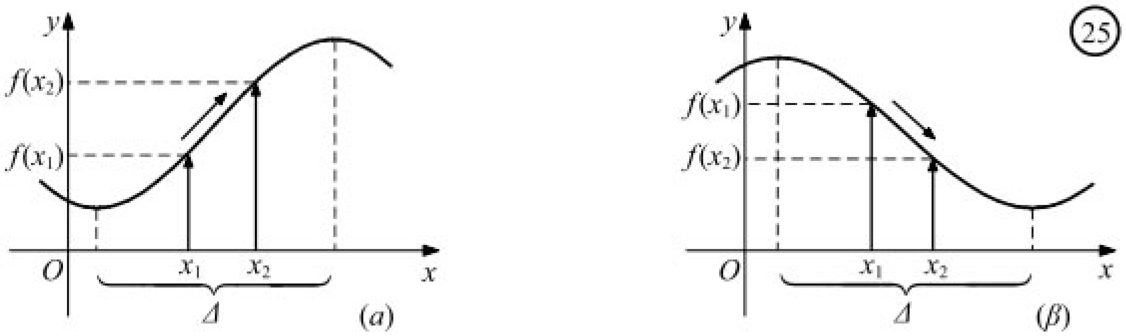
Μονοτονία συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται :

● **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)

● **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)

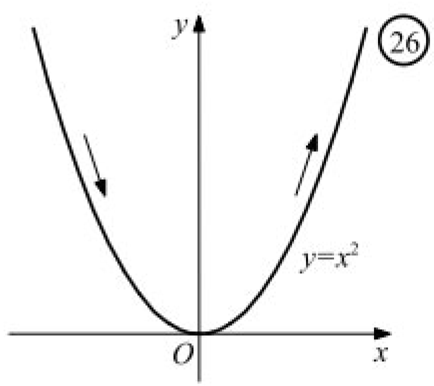


Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$:

— είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, αφού για $0 \le x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$

— είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, αφού για $x_1 < x_2 \le 0$ έχουμε $0 \le -x_2 < -x_1$, οπότε $0 \le x_2^2 < x_1^2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$



Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ**. Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

<u>Σημείωση:</u> Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς:

● **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in$ Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \le f(x_2)$$

● **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in$ Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \ge f(x_2)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ: Πως αποδεικνύουμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

Όταν ζητείται να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) τότε βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της Α και λέμε:

«Εστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ... και κατασκευάζουμε την ανισότητα $f(x_1) < f(x_2)$ (ή $f(x_1) > f(x_2)$ αντίστοιχα).

ΜΕΘΟΔΟΣ-«Δυσεπίλυτης» ανίσωσης

Για να λύσουμε μία ανίσωση της μορφής $f(g(x)) > f(h(x))$ ή $f(g(x)) < f(h(x))$ στο Δ αν γνωρίζουμε (ή έχουμε αποδείξει) ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ, τότε:

Α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ έχουμε:

$$f(g(x)) > f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) > h(x)$$
$$f(g(x)) < f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x)$$

και λύνουμε μία ευκολότερη ανίσωση.

Β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ έχουμε:

$$f(g(x)) > f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x)$$
$$f(g(x)) < f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) > h(x)$$

και λύνουμε μία ευκολότερη ανίσωση.

Γ) Αν έχουμε να λύσουμε μία ανίσωση της μορφής $f(x) > a$ ή $f(x) < a$ στο Α προσπαθούμε να βρούμε με παρατήρηση $\beta \in \mathrm{A}$, τέτοιο ώστε $f(a) = \beta$ και έχουμε:

$$f(x) > a \Leftrightarrow f(x) > f(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \beta, \alpha\nu \text{ f} \uparrow \\ x < \beta, a\nu \text{ f} \downarrow \end{cases} \text{ ή}$$

$$f(x) < a \Leftrightarrow f(x) < f(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \beta, \alpha\nu \text{ f} \uparrow \\ x > \beta, a\nu \text{ f} \downarrow \end{cases}$$

Παράδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες (Άσκηση από το σχολικό βιβλίο)

1/Α. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες

i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ **ii)** $f(x) = 2\ln(x-2)-1$ **iii)** $f(x) = 3e^{1-x}+1$ **iv)** $f(x) = (x-1)^2 - 1$

ΛΥΣΗ

i) Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (-\infty,1]$. Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty,1]$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f.

ii) Πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [2,+\infty)$. Έστω $x_1, x_2 \in [2,+\infty)$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \ln(x_1-2) < \ln(x_2-2) \Leftrightarrow 2\ln(x_1-2) < 2\ln(x_2-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\ln(x_1-2)-1 < 2\ln(x_2-2)-1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f.

iii) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Leftrightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Leftrightarrow 3e^{1-x_1} > 3e^{1-x_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3e^{1-x_1} + 1 > 3e^{1-x_2} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iv) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ και έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 < (x_2 - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

— $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ και έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Leftrightarrow (1 - x_1)^2 > (1 - x_2)^2 \Leftrightarrow (1 - x_1)^2 - 1 > (1 - x_2)^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$.

4/Α. Να δείξετε ότι:

i) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ii) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ.

Α. Κατανοώ

1. Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων:

i) $f(x) = -2e^{2-x} + 3$ **ii)** $g(x) = \sqrt[3]{1-2x} - 1$

2. Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων:

i) $f(x) = 2\log(3-x) + 1$ **ii)** $g(x) = 3\ln\left(\sqrt{x-2} + 1\right) - 1$

Β. Εμπεδώνω

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^5 + 3x^3 + x - 6$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2x^5 + 3x^3 + x = 6$

iii) Να λύσετε την ανίσωση $2e^{5x} + 3e^{3x} + e^x < 6$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a^x + x,\ a > 1$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$a^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} < 2 + \lambda - \lambda^2$$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 12e^{3-x} - 3x$$

i) Να μελετήσετε την ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 3$

iii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$12\left(e^{3-x^2} - e^{3-x}\right) < 3x\left(x-1\right)$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης fog.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left(fog\right)(x^2 - 4x) \geq \left(fog\right)\left(x-4\right)$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + x + 1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{x^2-1}-e^{x+2}>x-x^2+3$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)+x-2,\ x>-1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln\left(\frac{x^4+2}{x^3+1}\right)>2x^3-x^4$$

7. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις , αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα:

i) $f\left(x^2-3x+1\right)>f\left(4x+1\right)$ **ii)** $f\left(2e^{3x}+4\right)<f\left(e^{3x}+5\right)$ **iii)** $f\left(\ln(x+1)+x^2\right)>f\left(x^2\right)$

ΜΑΘΗΜΑ 8^{ο}

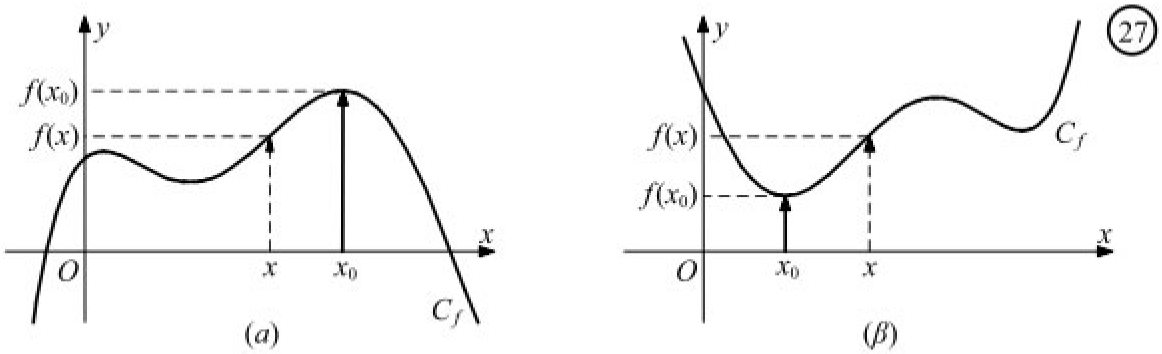
Ακρότατα συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. 27α)

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το το $f(x_0)$, όταν το $f(x_0)$ για κάθε x ϵ A (Σχ. 27β)



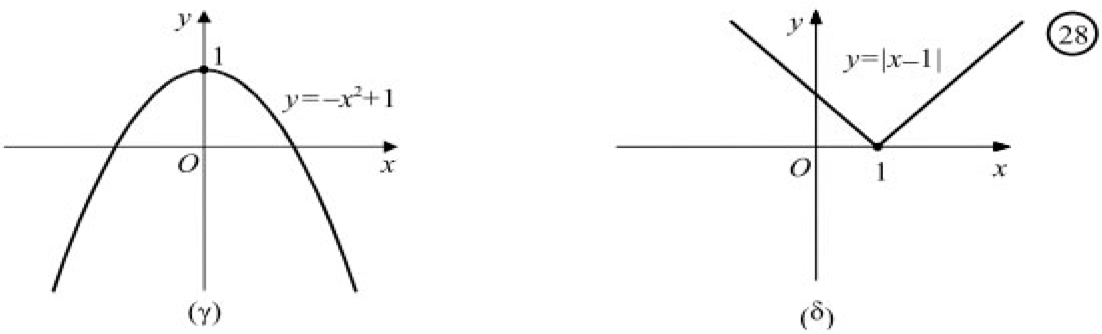
Για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση f (x) = − x^2 + 1 (Σχ. 28α) παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το f (0) = 1 ,

αφού f (x) ≤ f (0) για κάθε x ϵ **R**.

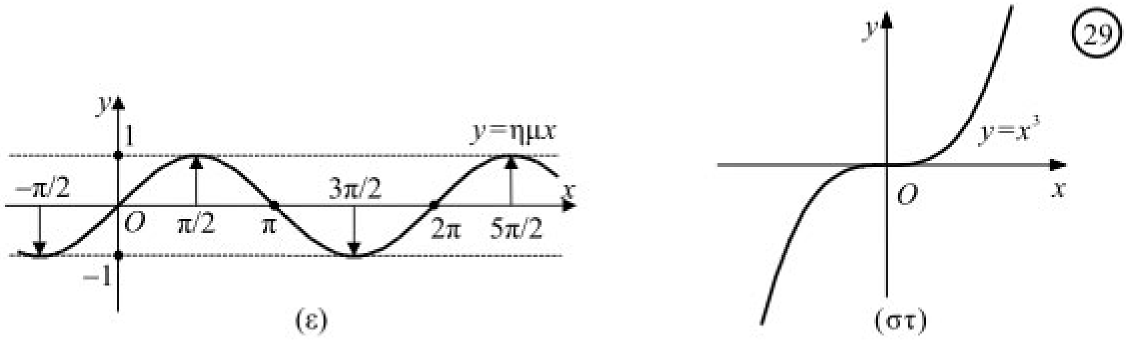
— Η συνάρτηση f (x) = | x−1 | (Σχ. 28β) παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το f (1) = 0,

αφού f (x) ≥ f (1) για κάθε x ϵ **R**.



— Η συνάρτηση f(x) = ημx (Σχ. 29α) παρουσιάζει μέγιστο, το y = 1, σε καθένα από τα σημεία 2κπ + π/2, κ ∊ **Z** και ελάχιστο, το y = −1, σε καθένα από τα σημεία 2κπ − π/2, κ ∊ **Z**, αφού −1 ≤ ημx ≤ 1 για κάθε x ∊ **R**.

— Η συνάρτηση f (x) = x^3 (Σχ. 29β) δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, αφού είναι γνησίως αύξουσα.



Άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f.

Παράδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

1. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)}\ f(x)=1-|x+3| \quad \textbf{ii)}\ g(x)=\frac{1}{x^4+2}$$

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)}\ f(x)=|x-5|+3 \quad \textbf{ii)}$$

Α. Κατανοώ

1. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)}\ f(x)=2-|x+2| \qquad \textbf{ii)}\ f(x)=\frac{3}{x^2+1}$$

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

i) $f(x) = |x+3| + 2$ **ii)** $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

B. Εμπεδώνω

1. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) Αν η f έχει μέγιστο στο x_o και η g είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog έχει ελάχιστο στο x_o.

ii) Αν η f έχει ελάχιστο στο x_o και η g είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog έχει μέγιστο στο x_o.

2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) Αν η f έχει μέγιστο στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $-f$ έχει ελάχιστο στο x_o.

ii) Αν η f έχει ελάχιστο στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση κf με $\kappa < 0$ έχει μέγιστο στο x_o.

Οι ασκήσεις με τα ακρότατα λύνονται ευκολότερα με όσα θα μάθουμε στο 2ο Κεφάλαιο. Για το λόγο αυτό μας αρκεί να καταλάβουμε τις έννοιες τώρα.

ΜΑΘΗΜΑ 9ο

Συνάρτηση «1−1»

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$«\text{Αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)»$$

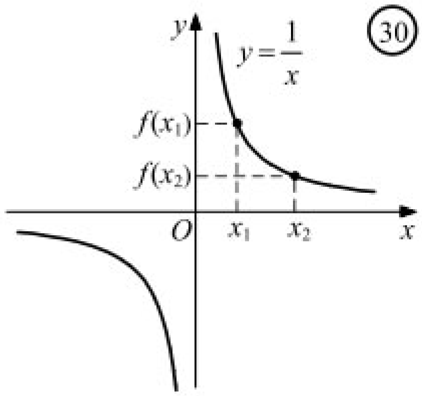
που σημαίνει ότι: "Τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες

Εναλλακτικά:

Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1−1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$«\text{Αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2»$$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \neq 0$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.



ΣΧΟΛΙΑ

— Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν:

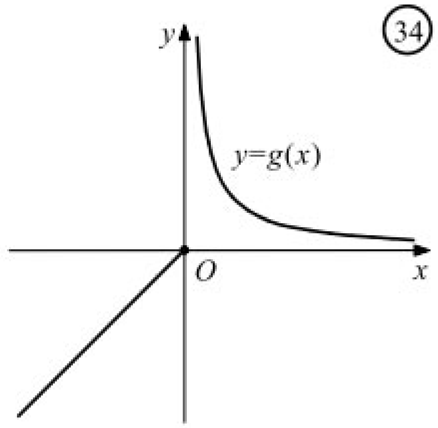
— Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

— Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

— Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1-1"

— Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases} x \ , & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} \ , & x>0 \end{cases} \ (\Sigma\chi.\ 34).$$



— Μια συνάρτηση που είναι άρτια στο A δεν είναι και «1-1» αφού ισχύει $f(x)=f(-x)$ για κάθε $x\in A$.

Παράδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

1. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού τους:

$$\textbf{i)}\ f(x)=1+e^{x-2} \qquad \textbf{ii)}\ g(x)=2-\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

ΛΥΣΗ

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 1+e^{x_1-2}=1+e^{x_2-2}\Leftrightarrow e^{x_1-2}=e^{x_2-2}\Leftrightarrow x_1-2=x_2-2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Επομένως η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$.

ii) Πρέπει αρχικά να έχουμε:

$$x\neq 1 \text{ και}$$

$$\frac{1}{x-1}>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$ είναι $D_g=(1,+\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $g(x_1) = g(x_2)$ έχουμε:

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 2 - \ln\left(\frac{1}{x_1 - 1}\right) = 2 - \ln\left(\frac{1}{x_2 - 1}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x_1 - 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{x_2 - 1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η g είναι «1-1» στο $(1,+\infty)$.

2. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις δεν είναι «1-1»

i) $f(x) = 1 - |x+3|$ **ii)** $g(x) = \dfrac{3}{x^4 + 1}$

ΛΥΣΗ

Μπορούμε, εκτός από τη γενικότητα, να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις δεν είναι «1-1» βρίσκοντας ένα αντιπαράδειγμα, δηλαδή ένα ζεύγος $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 \neq x_2$ αλλά με ίσες εικόνες.

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g είναι το $\mathbb{R}$.

i) Αν $x_1 = -2, x_2 = -4$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(-2) = 0 = f(-4) = f(x_2)$$

Επομένως η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν $x_2 = -x_1 \neq 0$ έχουμε: $g(x_1) = g(-x_1) = g(x_2)$

Επομένως η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(fof)(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι:

i) περιττή **ii)** «1-1»

ΛΥΣΗ

i) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή θα πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ-Πως αποδεικνύουμε ότι μία συνάρτηση f (δεν) είναι «1-1»

— Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f είναι «συνάρτηση 1-1» βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της Α (αν δεν δίνεται) και λέμε: «Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \ldots . \Rightarrow x_1 = x_2$.

— Αν η παραπάνω διαδικασία οδηγεί σε αδιέξοδο, τότε μπορούμε να δοκιμάσουμε να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθινουσα).

— Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f **δεν** είναι «συνάρτηση 1-1» βρίσκουμε ένα τουλάχιστον αντιπαράδειγμα, δηλαδή δύο σημεία x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της f με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$.

— Αν ζητείται να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση f είναι «συνάρτηση 1-1» βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της Α (αν δεν δίνεται) και λέμε: «Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Καταλήγουμε σε σχέση από την οποία αν δεν μπορούμε **οπωσδήποτε** να έχουμε **μόνο** $x_1 = x_2$, αλλά και κάτι εναλλακτικό, τότε η f δεν είναι «1-1» .

ΜΕΘΟΔΟΣ-Λύση «δυσεπίλυτης» εξίσωσης

Αν έχουμε να λύσουμε μία εξίσωση:

Α) Της μορφής $f(x) = a$ (1) με $a \in \mathbb{R}$, τότε αν η συνάρτηση f είναι «1-1» η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα. Ειδικότερα αν Α είναι το πεδίο ορισμού της f και $a \in f(A)$ η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μία λύση η οποία μορεί να βρεθεί με παρατήρηση ή να αποδειχθεί η ύπαρξη της, όπως θα μάθουμε παρακάτω. Αν $a \notin f(A)$, τότε η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο Α.

Β) Της μορφής $f(g(x)) = f(h(x))$ με την f να είναι «1-1» στο Α, τότε έχουμε να λύσουμε την ευκολότερη εξίσωση $g(x) = h(x)$.

Α. Κατανοώ

1. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού τους:

i) $f(x) = 2 - e^{x-1}$ **ii)** $g(x) = 1 - \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$

2. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις δεν είναι «1-1»

i) $f(x) = 1 + |x-5|$ **ii)** $g(x) = \dfrac{3}{x^{10}+1}$

3. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1»

i) $f(x)=\begin{cases}3x-2, & αν\ x\le 0\\ x^2+1, & αν\ x\ge 3\end{cases}$ **ii)** $g(x)=\begin{cases}x+2, & αν\ x<3\\ x^2+1, & αν\ x>0\end{cases}$

B. Εμπεδώνω

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $e^x=1-x^7$ **ii)** $\ln(x-1)=2-x$ **iii)** $e^x+2=\sqrt{8+\sqrt{1-x}}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2015}+x^{2017},\ x\in\mathbb{R}$

i) Να βρείτε το $f(1)$

ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι «1-1»

iii) Να λύσετε την εξίσωση $x^{2015}+x^{2017}=2$

3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(fof)(x)+f^3(x)=2x+3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι «1-1»

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2x^3+x\right)-f\left(4-x\right)=0$

4. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η σνάρτηση $g(x)=f\left(x^{2015}\right)-f\left(x^{2014}\right)-2016$ δεν είναι «1-1».

ii) Να λύσετε στο $(1,+\infty)$ την ανίσωση:

$$\left(x^2-2014x\right)\cdot\left(g(x)+2016\right)>0$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις, αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι «1-1»

i) $f\left(x^2-3x+1\right)=f\left(4x+1\right)$ **ii)** $f\left(2e^{3x}+4\right)=f\left(e^{3x}+5\right)$ **iii)** $f\left(\ln(x+1)+x^2\right)=f\left(x^2\right)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)+x-2,\ x>-1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln\left(\frac{x^4+2}{x^3+1}\right)=2x^3-x^4$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^x+x+1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

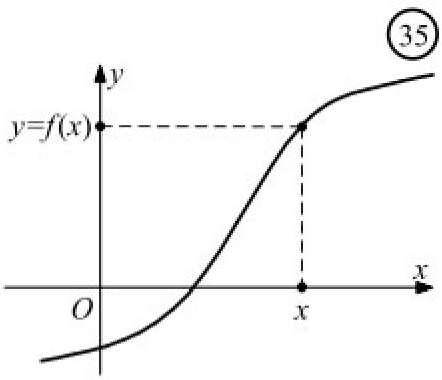
ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2-1}-e^{x+2}=x-x^2+3$$

ΜΑΘΗΜΑ $10^{ο}$

Αντίστροφη συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της Αγια το οποίο ισχύει $f(x) = y$.



Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g : f(A) \to \mathbf{R}$$

με την οποία κάθε y ∊ $f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x ∊ A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

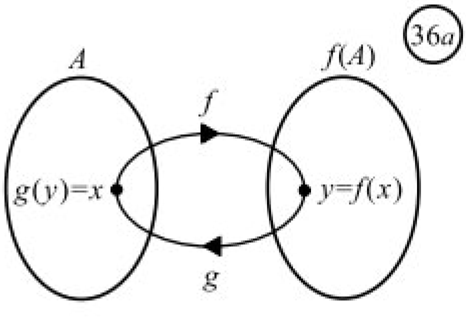
— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε



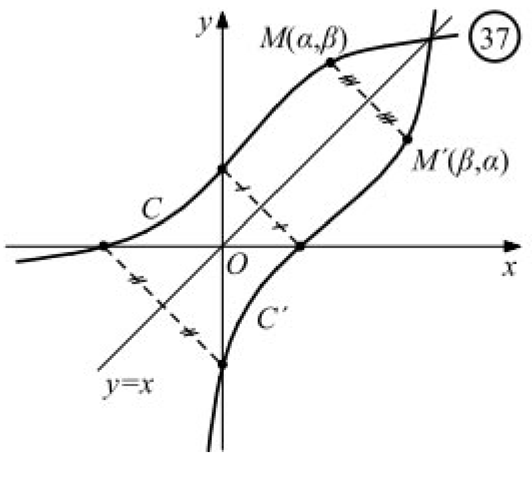
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x, x \in A \text{ και } f\left(f^{-1}(y)\right) = y, y \in f\left(A\right)$$

Λόγω του παραπάνω συμπεράσματος έχουμε:

Αν ένα σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο Μ΄(α,β) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.



Έτσι, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x) = α^x και g(x) = $\log_\alpha x$, 0< α ≠1, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x.

Προφανώς ισχύει $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

ΜΕΘΟΔΟΣ-Εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης και του συνόλου τιμών της f

Έστω $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$

Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f

— Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της Α (αν δεν δίνεται). Κατόπιν αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f που δόθηκε είναι «1-1» στο Α και επομένως υπάρχει η αντίστροφη της f^{-1} στο Α.

— Θέτουμε: $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x [με $x = f^{-1}(x)$], θέτοντας όλους τους περιορισμούς που προκύπτουν ως προς y και με $x \in A$. Τέλος εναλλάσουμε τα x, y και έχουμε τον τύπο της f^{-1} με το πεδίο ορισμού της (δηλαδή το σύνολο τιμών της f).

— Με την παραπάνω διαδικασία και θέτοντας όλους τους περιορισμούς ως προς y βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f (ή $D_{f^{-1}} = f\left(D_f\right)$).

ΒΑΣΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ

Αν λύνοντας την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς $x \in A$ διαπιστώσουμε ότι έχει:

— Το πολύ μία ρίζα στο Α για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ή

— Μία ακριβώς ρίζα στο Α για κάθε $y \in \mathbb{R}$

, τότε η συνάρτηση f είναι «1-1».

ΜΕΘΟΔΟΣ-Λύση εξισώσεων $f^{-1}\left(x\right) = x$ και $f\left(x\right) = x$

— Οι εξισώσεις $f^{-1}\left(x\right) = f(x)$, $f^{-1}\left(x\right) = x$ και $f\left(x\right) = x$ είναι ισοδύναμες μόνο όταν η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**. Ο ισχυρισμός αυτός, όταν χρησιμοποιείται, χρειάζεται απόδειξη αφού δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Στην περίπτωση αυτή λύνουμε την πιο εύκολη από τις δύο εξισώσεις.

— Δηλαδή τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ της f και f^{-1}, όταν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$, μόνο όταν η f είναι γνησίως αύξουσα.

— Στη λύση εξισώσεων που περιέχουν όρους της μορφής $f^{-1}\left(g(x)\right)$ πρέπει να απαιτούμε η $g(x) \in f\left(D_f\right)$, δηλαδή η $g(x)$ να ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ (που μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις αφού πρώτα αποδειχθεί).

«Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο A, τότε η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο $f(A)$.»

Απόδειξη:

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A. Έστω $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Έστω ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια, ώστε $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε διαδοχικά:

$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Rightarrow f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Rightarrow y_1 \geq y_2$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ και άρα η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η περίπτωση που η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A (τότε και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(A)$.

Η πρόταση αυτή ενδεχομένως να μας χρειαστεί όταν μας ζητείται η μονοτονία της f στο A και είναι δύσκολη (ή και αδύνατη) η κατασκευή με τις ανισότητες. Τότε πιθανόν η εύρεση της μονοτονίας της αντίστροφης στο $f(A)$ να είναι ευκολότερη .

ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ (που μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις αφού πρώτα αποδειχθεί).

«Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και οι γραφικές παραστάσεις C_f, $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f, f^{-1} τέμνονται , *τότε τα κοινά τους σημεία βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$.*

Απόδειξη

Έστω ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, $C_{f^{-1}}$ *των συναρτήσεων* f, f^{-1} τέμνονται στο σημείο $M(\kappa, \lambda)$ το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία $y = x$, δηλαδή $\kappa \neq \lambda$. Ακόμα έχουμε $f(\kappa) = \lambda$ (1) , $f^{-1}(\kappa) = \lambda \Leftrightarrow f(\lambda) = \kappa$ (2), αφού το σημείο Μ είναι κοινό σημείο της C_f, $C_{f^{-1}}$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Αν $\kappa > \lambda$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$\kappa > \lambda \Rightarrow f(\kappa) > f(\lambda) \Rightarrow \lambda > \kappa$, που είναι άτοπο.

Αν $\kappa < \lambda \Rightarrow f(\kappa) < f(\lambda) \Rightarrow \lambda < \kappa$, που είναι άτοπο.

Επομένως $\kappa = \lambda$ και άρα το κοινό σημείο Μ των C_f, $C_{f^{-1}}$ ανήκει στην ευθεία $y = x$.

Άρα αν μας ζητείται να βρούμε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ (Ι) (αν έχουμε βρει την $f^{-1}(x)$). Αν όμως έχουμε (ή μπορούμε να αποδείξουμε) ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της ,τότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x$, ($x \in D_f \cap D_{f^{-1}}$) που πιθανόν να είναι πιο εύκολη από την (Ι) για να βρούμε τα κοινά σημεία των$C_f, C_{f^{-1}}$ χωρίς να βρούμε την f^{-1} (Άσκηση 5 στα επόμενα).

Παραδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

2/Α. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i) $f(x) = 3x - 2$ **ii)** $f(x) = x^2 + 1$ **iii)** $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$ **iv)** $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

v) $f(x) = \ln(1-x)$ **vi)** $f(x) = e^{-x} + 1$ **vii)** $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ **viii)** $f(x) = |x-1|$

ΛΥΣΗ

Θα εξετάσουμε αρχικά ποιες από αυτές τις συναρτήσεις είναι «1-1».

i) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^2 + 1$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 2 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3} \text{ ή } y = \frac{x+2}{3} .$$

Επομένως η αντίστροφή της είναι:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3},\ x \in \mathbb{R}$$

ii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=x^2+1$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^{\ 2}+1=x_2^{\ 2}+1\Leftrightarrow x_1^{\ 2}=x_2^{\ 2}\Leftrightarrow\left(x_1=x_2\ ή\ x_1=-x_2\right)$$

Επομένως η f δεν είναι «1-1» και άρα δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση (θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι «1-1» με ένα αντιπαράδειγμα όπως π.χ $f(2)=f(-2)=5$

iii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=(x-1)(x-2)+1$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}&f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow(x_1-1)(x_1-2)+1=(x_2-1)(x_2-2)+1\\&\Leftrightarrow x_1^{\ 2}-2x_1-x_1+2=x_2^{\ 2}-2x_2-x_2+2\Leftrightarrow x_1^{\ 2}-3x_1=x_2^{\ 2}-3x_2\\&\Leftrightarrow x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-3(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2-3)=0\Leftrightarrow\left(x_1=x_2\ ή\ x_1+x_2=3\right)\end{aligned}$$

Επομένως η f δεν είναι «1-1» και άρα δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση (θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι «1-1» με ένα αντιπαράδειγμα όπως π.χ $f(1)=f(2)=1$).

iv) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$ είναι το $(-\infty,1]$. Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\sqrt[3]{1-x_1}=\sqrt[3]{1-x_2}\Leftrightarrow 1-x_1=1-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt[3]{1-x}=y\Leftrightarrow 1-x=y^3\Leftrightarrow x=1-y^3\ \text{ή}\ y=1-x^3$$

Πρέπει όμως :

$$x=1-y^3\in(-\infty,1]\Leftrightarrow 1-y^3\le 1\Leftrightarrow -y^3\le 0\Leftrightarrow y^3\ge 0\Leftrightarrow y\ge 0$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x)=1-x^3, x\in[0,+\infty)$.

v) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\ln(x-1)$ είναι το $D_f=(1,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \ln(x_1-1)=\ln(x_2-1)\Leftrightarrow x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x)=y\Leftrightarrow \ln(x-1)=y\Leftrightarrow x-1=e^y\Leftrightarrow x=e^y+1 \text{ ή } y=e^x+1$$

Πρέπει όμως :

$$x=e^y+1\in(1,+\infty)\Leftrightarrow e^y+1>1\Leftrightarrow e^y>0\Leftrightarrow y\in\mathbb{R}$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x)=e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

vi) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=e^{-x}+1$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow e^{-x_1}+1=e^{-x_2}+1\Leftrightarrow e^{-x_1}=e^{-x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+1=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-1\Leftrightarrow -x=\ln(y-1)\Leftrightarrow x=-\ln(y-1), \text{ με } y-1>0\Leftrightarrow y>1$$

$$\text{ή } y=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right),\ x>1\ .$$

Επομένως η αντίστροφή της είναι:

$$f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right),\ x>1$$

vii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow \left(e^{x_1}-1\right)\cdot\left(e^{x_2}+1\right)=\left(e^{x_1}+1\right)\cdot\left(e^{x_2}-1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}+e^{x_1}-e^{x_2}-1=e^{x_1+x_2}+e^{x_2}-e^{x_1}-1\Leftrightarrow 2e^{x_1}=2e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=y\Leftrightarrow \left(e^x-1\right)\cdot y=e^x+1\Leftrightarrow e^x y-y=e^x+1\Leftrightarrow e^x y-e^x=1+y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y+1}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$ ή

$$y=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Πρέπει:

$$\frac{y+1}{y-1}>0\Leftrightarrow (y+1)\cdot(y-1)>0\Leftrightarrow (y<-1 \text{ ή } y>1)$$

Επομένως η αντίστροφη της είναι:

$$f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

viii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=|x-1|$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:΄

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow |x_1-1|=|x_2-1|\Leftrightarrow (x_1-1=x_2-1 \text{ ή } x_1-1=1-x_2)\Leftrightarrow (x_1=x_2 \text{ ή } x_1+x_2=2)$$

Επομένως η f δεν είναι «1-1» και άρα δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(ae^x+1\right)$, $a\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $A\left(2\ln 2,\ 2\ln 3\right)$.

i) Να βρείτε την τιμή του α.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη .

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}\left(\ln 7\right)$.

ΛΥΣΗ

i) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από το σημείο A πρέπει:

$$f\left(2\ln 2\right) = 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(ae^{\ln 2}+1\right) = 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(2a+1\right) = \ln 9 \Leftrightarrow 2a+1=9 \Leftrightarrow a=4$$

ii) $D_f = \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(4e^{x_1}+1\right) = \ln\left(4e^{x_2}+1\right) \Leftrightarrow 4e^{x_1}+1 = 4e^{x_2}+1 \Leftrightarrow 4e^{x_1} = 4e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

iii) Θέτουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(4e^x+1\right) \Leftrightarrow 4e^x+1 = e^y \Leftrightarrow e^x = \frac{e^y-1}{4} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e^y-1}{4}\right)$$

Πρέπει:

$$\frac{e^y-1}{4} > 0 \Leftrightarrow e^y - 1 > 0 \Leftrightarrow e^y > 1 \Leftrightarrow y > 0$$

Άρα $f^{-1}\left(x\right) = n\left(\frac{e^x-1}{4}\right)$, $x > 0$.

iv) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (αυτό θα μπορούσαμε να το έχουμε ήδη αποδείξει στο (ii) ερώτημα και να εξασφαλίζαμε το «1-1»). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε διαδοχικά:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 4e^{x_1} < 4e^{x_2} \Leftrightarrow 4e^{x_1}+1 < 4e^{x_2} \Leftrightarrow \ln\left(4e^{x_1}+1\right) < \ln\left(4e^{x_2}+1\right) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Η ανίσωση γίνεται:

$$f(x) < f^{-1}\left(\ln 7\right) \Leftrightarrow x < \ln 7$$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x - \ln\left(x-2\right)$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της f^{-1} με την ευθεία $y=3$.

ΛΥΣΗ

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(2,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \ln\frac{x_1}{x_1-2}=\ln\frac{x_2}{x_2-2}\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1-2}=\frac{x_2}{x_2-2}\Leftrightarrow x_1x_2-2x_1=x_1x_2-2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

ii) Θέτουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\ln\frac{x}{x-2}\Leftrightarrow \frac{x}{x-2}=e^y\Leftrightarrow (x-2)e^y=x\Leftrightarrow xe^y-x=2e^y\Leftrightarrow x\left(e^y-1\right)=2e^y\Leftrightarrow x=\frac{2e^y}{e^y-1}$$

Πρέπει:

$$e^y-1\neq 0\Leftrightarrow y\neq 0$$

$$x>2\Leftrightarrow \frac{2e^y}{e^y-1}>2\Leftrightarrow \frac{2e^y}{e^y-1}-2>0\Leftrightarrow \frac{2}{e^y-1}>0\Leftrightarrow e^y-1>0\Leftrightarrow e^y>1\Leftrightarrow y>0$$

Άρα:

$$f^{-1}(x)=\frac{2e^x}{e^x-1},\ x>0$$

iii) Έχουμε:

$$f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x-1}=3\Leftrightarrow 2e^x=3e^x-3\Leftrightarrow e^x=3\Leftrightarrow x=\ln 3$$

Επομένως το κοινό σημείο είναι $A\left(\ln 3, f^{-1}(\ln 3)\right)$ ή το $A(\ln 3,3)$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-2}$ και $g(x)=\sqrt{x^2-4}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $(gof)^{-1}(x)$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=[2,+\infty)$ και η g το $D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

Η gof έχει πεδίο ορισμού το**:**

$$D_{gof}=\{x\in[2,+\infty)\,/\,f(x)\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\}=\{x\geq 2\,/\,f(x)\leq -2 \text{ ή } f(x)\geq 2\}$$

Έχουμε:

$$f(x)\leq -2\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\leq -2 \text{ το οποίο προφανώς ισχύει ή}$$

$$f(x)\geq 2\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\geq 2\Leftrightarrow x-2\geq 4\Leftrightarrow x\geq 6$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της gof είναι:

$$D_{gof}=\{x\in[2,+\infty) \text{ και } x\geq 6\}=[6,+\infty).$$

Για κάθε $(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x-2}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-4}=\sqrt{x-6}$

Έστω $(gof)(x)=h(x)=\sqrt{x-6}$. Θα βρούμε την αντίστροφη της $h(x)$, δηλαδή την $(gof)^{-1}$.

Έχουμε:

$$h(x)=y\Leftrightarrow \sqrt{x-6}=y\Leftrightarrow x-6=y^2\Leftrightarrow x=y^2+6, \text{ με } y\geq 0 \text{ και } y^2+6\geq 6\Leftrightarrow y^2\geq 0 \text{ (αληθής για κάθε } y\in\mathbb{R}\text{)}$$

Επομένως $y=x^2+6$ ή $(gof)^{-1}(x)=x^2+6,\ x\geq 0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=x$

iii) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των γραφικων παραστάσεων της f και f^{-1}

ΛΥΣΗ

i) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

$$x_1 < x_2 \ (1)$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{\ 5} < x_2^{\ 5} \ (2)$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{\ 3} < x_2^{\ 3} \ (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) , (2), (3) έχουμε $x_1^{\ 5} + x_1^{\ 3} + x_1 < x_2^{\ 5} + x_2^{\ 3} + x_2$ ή ισοδύναμα $f(x_1) < f(x_2)$.Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο f (άρα και «1-1» οπότε υπάρχει η f^{-1}) η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ θα είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$, δηλαδή έχουμε:

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x = x \Leftrightarrow x^5 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^3 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

iii) Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και f^{-1}, αν υπάρχουν, θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$, δηλαδή θα αποτελούν λύση της εξίσωσης $f(x) = x$ (επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα). Επομένως είναι το σημείο $O(0, f(0))$ ή το $O(0,0)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x, x > 0$¨.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.

Σημαντική παρατήρηση για τη λύση ανισώσεων της μορφής $f^{-1}(\varphi(x)) >< \omega(x)$ (1)

— Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού D_φ, D_ω των συναρτήσεων φ και ω.
— Βρίσκουμε το $f(A)$.
— Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$\omega(x) \notin A$ και εξετάζουμε αν υπάρχουν λύσεις της (1) ή

$\omega(x) \in A$ και τότε έχουμε:

$$f^{-1}(\varphi(x)) > \omega(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > f(\omega(x)), \ \textit{αν η } f \textit{ είναι γν. αύξουσα} \\ \varphi(x) < f(\omega(x)), \ \textit{αν η } f \textit{ είναι γν. φθίνουσα} \end{cases}$$

και λύνουμε την ανίσωση που προκύπτει (που πιθανόν είναι ευκολότερη) στην οποία δεν εμφανίζεται η f^{-1}.

ΛΥΣΗ

i) $D_f=(0,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη (άρα θα είναι και «1-1» επομένως θα αντιστρέφεται).

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \ (1)$$
$$x_1<x_2 \ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα αντιστρέφεται.

ii) Έχουμε:

$$Αν\ x\le 0, τότε\ f^{-1}(x)\in(0,+\infty)\Rightarrow f^{-1}(x)>0\ που\ είναι\ αληθής$$

$$Αν\ x<0, τότε\ f^{-1}(x)>x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>f(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>x+\ln x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln x<0\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,0]\cup(0,1)=(-\infty,1)$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε την αντίστροφή της (**προσέξτε το σημείο αυτό στη λύση**).

ΛΥΣΗ

i) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ (1). Είναι $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1» και επομένως η f αντιστρέφεται.

ii) Αφού η δοθείσα σχέση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε:

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3+f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x^3+x=f^{-1}(x) \ (3)$$

Άρα η συνάρτηση $f^{-1}(x)=x^3+x, x\in\mathbb{R}$ (Ι) είναι η αντίστροφη της f; Όχι διότι η σχέση (3) ισχύει μόνο για κάθε $x\in f(A)$ και όχι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (είναι πιθανή αντίστροφη της f).

Άρα οφείλουμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $g(x)=x^3+x$ να αποτελεί την αντίστροφη της f.

Αν $y_o\in\mathbb{R}$, τότε αν $x_0=2y_0+{y_0}^3$ έχουμε διαδοχικά:

$$f^3(x_0)+2f(x_0)=x_0=2y_0+{y_0}^3$$
$$f^3(x_0)+2f(x_0)-2y_0-{y_0}^3=0\Leftrightarrow (f(x_0)-y_0)\left(f^2(x_0)+f(x_0)y_0+{y_0}^2+2\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)=y_0$$

Επομένως $f^{-1}(x)=x^3+x, x\in\mathbb{R}$ (Ι) είναι η αντίστροφη της f.

Α. Κατανοώ

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i) $f(x)=-2x+3$ **ii)** $f(x)=-2x+3$ **iii)** $f(x)=(x-3)(x-5)-7$ **iv)** $f(x)=\sqrt[5]{3-x}$

v) $f(x)=\ln(3+5x)$ **vi)** $f(x)=e^{-3x}-5$ **vii)** $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ **viii)** $f(x)=|3x+1|$

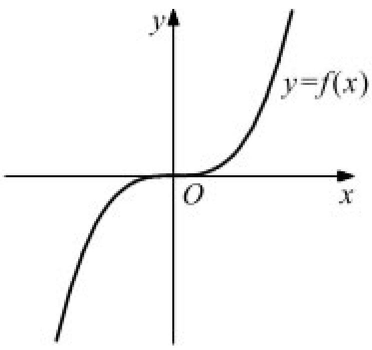
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των επόμενων συναρτήσεων

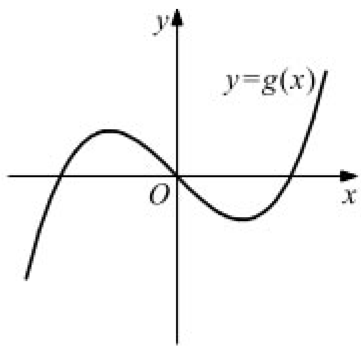
i) $f(x)=\ln\left(x^3-1\right)+2$ **ii)** $g(x)=e^{x^3-1}+2$

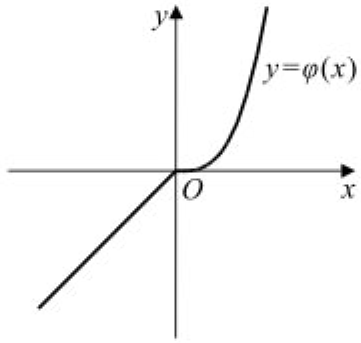
Β. Εμπεδώνω

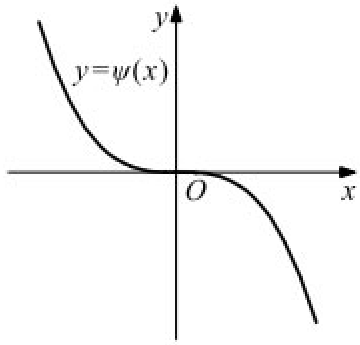
3 (Άσκηση από το σχολικό βιβλίο)

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, φ και ψ.









Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f, g, φ, ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \ln x-2, & \alpha\nu\ 0<x<1 \\ \sqrt{x-1}, & \alpha\nu\ x\geq 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=10$ και $\left(fof\right)(x)=3x-5$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστέψιμη

ii) Να βρείτε το $f^{-1}\left(2\right)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}\left((|x|-2)-5\right)\right)=2$$

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

ii) Η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)+2f(x)=12e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»

iv) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(|x|-3\right)=e^{2\ln 2}+\ln\frac{1}{e^2}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a-e^x}{1+e^x}$, $a\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 3,\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

i) Να βρείτε την τιμή του α

ii) Να αποείξετε ότι η f είναι «1-1»

iii) Να βρείτε την f^{-1}

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+1$, $g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1»

ii) Να βρείτε την f^{-1}

iii) Να βρείτε την gof^{-1}

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)+2f(x)+x=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

iii) Να βρείτε την f^{-1}

9. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της , να αποδείξετε ότι και η αντίστροφή της f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο πεδίο ορισμού της.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)-3f^2(x)+2f(x)=3x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

11. Δίνονται οι αντιστρέψιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=4x+2$ και $g(x)=2f^{-1}(x)+1$. Να βρείτε την συνάρτηση g^{-1}.

ΜΑΘΗΜΑ 11ο

Γενική επανάληψη

Προετοιμάζομαι για τις εξετάσεις

Α. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

2. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x **.**

3. Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

4. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}

5. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}\left(f(x)\right) = x,\ x \in A$ και $f\left(f^{-1}(y)\right) = y,\ y \in f(A)$

6. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε υπάρχουν σημεία της με την ίδια τεταγμένη.

7. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

8. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.

9. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

10. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

11. Κάθε συνάρτηση, που είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, είναι και 1-1 .

12. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

13. Δύο συναρτήσεις που έχουν τον ίδιο τύπο εναι πάντα ίσες.

14. Οι συναρτήσεις fof^{-1} και $f^{-1}of$, όταν ορίζονται, είναι πάντα ίσες.

Β. Ερωτήσεις Πολλαπλής επιλογής

Στις επόμενες προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot g$ είναι:

α. Το $\mathbb{R}$ **β.** Το Β **γ.** Το $A \cup B$ **δ.** $A \cap B$

2. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι:

α. $A \cap B$ β. $\{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\}$ **γ.** $\{x \in A \cap B / f(x) \neq 0\}$ **δ.** Το Α

3. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης gof

α. $\{x \in A / f(x) \in B\}$ **β.** $\{x \in B / f(x) \in A\}$ **γ.** $A \cap B$ **δ.** $A \cup B$

4. Η εξίσωση y = f(x) επαληθεύεται

α. μόνο από τα σημεία της C_f **β.** Από όλα τα σημεία του επιπέδου xOy

γ. Μόνο από τα σημεία με $x > 0$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

5. Η συνάρτηση $f(x) = -x^4$ είναι :

α. Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **β.** Γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

γ. «1-1» **δ.** Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$

Γ. Ασκήσεις Λυμένες

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y.

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \dfrac{2016^3 - 4 \cdot 2014}{2016^2 + 2 \cdot 2014}$

ΛΥΣΗ

Α. Για το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+2x}$ έχουμε:

$$x^2+2x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 0 \;\kappa\alpha\iota\; x+2\neq 0)\Leftrightarrow (x\neq 0 \;\kappa\alpha\iota\; x\neq -2)$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-2,0\}$$

Επομένως $D_f=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

Β. Για κάθε $x\in D_f$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+2x}=\frac{x\left(x^2-4\right)}{x(x+2)}=\frac{x(x+2)(x-2)}{x(x+2)}=x-2$$

Γ. Η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$. Για τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^3-4x}{x^2+2x}=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow (x=0 \;ή\; x=2 \;ή\; x=-2)$$

Επομένως τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(2,0)$.

Δ. Έχουμε:

$$\Pi=\frac{2016^3-4\cdot 2014}{2016^2+2\cdot 2014}=f(2016)=2016-2=2014$$

ΘΕΜΑ 2^{O}

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β. Να απλοποιήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)\right]^2\cdot\left(4-x^2\right)$.

Γ. Αν $h(x)=\dfrac{2+x}{x-4}$, $x\neq 4$ να αποδείξετε ότι η h είναι «1-1» και να βρείτε την αντίστροφή της.

ΛΥΣΗ

Α. Πρέπει:

$$-x^2+6x-8>0\Leftrightarrow 2<x<4$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(2,4)$

Β. Έχουμε:

$$h(x)=[f(x)]^2\cdot(4-x^2)=\frac{1}{-x^2+6x-8}\cdot(4-x^2)=\frac{1}{(2-x)(x-4)}\cdot(2-x)(2+x)=\frac{x+2}{x-4}$$

Γ. Έστω $x_1,\ x_2\neq 4$ με $h(x_1)=h(x_2)$

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow\frac{x_1+2}{x_1-4}=\frac{x_2+2}{x_2-4}\Leftrightarrow x_1x_2-4x_1+2x_2-8=x_1x_2-4x_2+2x_1-8\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -6x_1=-6x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η συνάρτηση h είναι «1-1» και επομένως υπάρχει η αντίστροφή της. Έχουμε:

$$y=h(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+2}{x-4}\Leftrightarrow y(x-4)=x+2\Leftrightarrow yx-x=4y+2\Leftrightarrow x=\frac{4y+2}{y-1},y\neq 1$$

Ακόμα πρέπει $x\neq 4\Leftrightarrow\frac{4y+2}{y-1}\neq 4\Leftrightarrow 2\neq -4$, που είναι αληθής.

Άρα η αντίστροφη της h είναι η $h^{-1}(x)=\frac{4x+2}{x-1},x\neq 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}$ *και* $g(x)=\frac{1}{2}$.

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

Β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y

Γ. Να απλοποιήσετε το τύπο της συνάρτησης f .

Δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

ΛΥΣΗ

Α. Πρέπει:

$$2x^2-3x+1\neq 0\Leftrightarrow\left(x\neq 1,x\neq\frac{1}{2}\right)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=\mathbb{R}-\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}$

Για τη g είναι $D_g=\mathbb{R}$

Β. Το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0,-1)$, αφού $f(0)=-1$

Για τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}=0 \Leftrightarrow 4x^2-1=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{2}\right)$$

Επομένως είναι $B\left(\frac{1}{2},0\right),\Gamma\left(-\frac{1}{2},0\right)$

Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{2}$ έχει κοινό σημείο μόνο με τον άξονα $y'y$, το $\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Γ. Για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}-\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{(x-1)(2x-1)}=\frac{2x+1}{x-1}$$

Δ. Τα κοινά σημεία των C_f,C_g προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 8x^2-2=2x^2-3x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+3x-3=0\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\Leftrightarrow\left(x=\frac{1}{2},x=-1\right)$$

Επομένως τα κοινά τους σημεία είναι $K\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\Lambda\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\lambda x+\kappa$, $x\in\mathbb{R}$

Α. Να βρείτε τα κ και λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ να διέρχεται από τα σημεία Α(-1,-3) και Β($-\frac{1}{2}$,-2)

Β. Για $\kappa=-1,\lambda=2$, να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση φ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη της φ.

ΛΥΣΗ

Α. Για να διέρχεται η συνάρτηση φ από τα σημεία Α(-1,-3) και Β($-\frac{1}{2}$,-2) πρέπει να ισχύει:

$$\varphi(-1)=-3 \Leftrightarrow -\lambda+\kappa=-3 \ (1)$$
$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=-2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\lambda+\kappa=-2 \Leftrightarrow -\lambda+2\kappa=-4 \ (2)$$

Από τη λύση του συστήματος (1) και (2) προκύπτει $\kappa=-1, \lambda=2$

Β. Για $\kappa=-1, \lambda=2$ η συνάρτηση γίνεται $\varphi(x)=2x-1, x\in\mathbb{R}$. Αφού $\varphi(0)=-1$ η φ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{K}(0,-1)$ και τον άξονα $y'y$ όταν $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, δηλαδή στο σημείο $\Lambda\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Γ. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η φ είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$. Έχουμε:

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_2) \Leftrightarrow 2x_1-1=2x_2-1 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα υπάρχει η αντίστροφη φ^{-1} της φ και έχουμε:

$$y=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{2}, y\in\mathbb{R}$$

Επομένως $\varphi^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}, x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=5^x+3^x-1$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να λύσετε την εξίσωση :

$$5^{x^2-x}-3^{x+1}=5^{x+1}-3^{x^2-x}$$

iii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$5^{x^2+x+1}-5^{x+3}>3^{x+3}-3^{x^2+x+1}$$

ΛΥΣΗ

i) Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f (αφού δεν είναι εύκολη η χρήση του ορισμού της «1-1» συνάρτησης).

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 5^{x_1} < 5^{x_2} \quad (1)$$
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$5^{x_1} + 3^{x_1} < 5^{x_2} + 3^{x_2} \Rightarrow 5^{x_1} + 3^{x_1} - 1 < 5^{x_2} + 3^{x_2} - 1 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα και «1-1».

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$5^{x^2-x} - 3^{x+1} = 5^{x+1} - 3^{x^2-x} \Leftrightarrow 5^{x^2-x} + 3^{x^2-x} = 5^{x+1} + 3^{x+1} \Leftrightarrow$$
$$f\left(x^2 - x\right) = f\left(x+1\right) \Leftrightarrow x^2 - x = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

iii) Έχουμε διαδοχικά:

$$5^{x^2+x+1} - 5^{x+3} > 3^{x+3} - 3^{x^2+x+1} \Leftrightarrow 5^{x^2+x+1} + 3^{x^2+x+1} > 5^{x+3} + 3^{x+3} \Leftrightarrow 5^{x^2+x+1} + 3^{x^2+x+1} + 1 > 5 \Leftrightarrow 5^{x+3} + 3^{x+3} + 1$$
$$\Leftrightarrow f\left(x^2 + x + 1\right) > f\left(x+3\right) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \left(x < -\sqrt{2} \text{ ή } x > \sqrt{2}\right)$$

Δ. Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{(2x^2 + 7x - 15)(4x - 4)}{8x - 12}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

Β. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

Γ. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{f(3)} + \sqrt[3]{8f(4)}}{\sqrt{f(2)} - 3} = -5(\sqrt{7} + 3)$

ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$

Β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f έχει:

Β.1. θετικές τιμές

Β.2. αρνητικές τιμές

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$

ΘΕΜ 3^{O}

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)+3f(x)=14e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι «1-1».

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(|x|-5)=e^{2\ln 2}+\ln\frac{1}{e^2}$.

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την fog να ορίζεται και να είναι «1-1»

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1».

Β. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g\left(f\left(|\ln x|\right)+1\right)=g(x+2)$, να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5^{O}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(\mathbb{R})=\mathbb{R} \text{ και } (fof)(x)+(gof)(x)=5x-2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να βρείτε την αντίστροφη της f στναρτήσει των g,f.

ΘΕΜΑ 6^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=x^{2015}+x^{2017}+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι η φ είναι «1-1».

Β. Να λύσετε την ανίσωση $\varphi(\varphi(x))<-1$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\varphi(\varphi(x))=-1$.

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(ae^{x}+1\right)$, $a\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(2\ln 2, 2\ln 3\right)$.

Α. Να βρείτε το α.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της f.

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x\right)< f^{-1}\left(\ln 7\right)$

ΘΕΜΑ 8Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική παράστασή της C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(3,2\right), B\left(5,9\right)$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Β. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(2+f^{-1}(x^2+x)\right)=9$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(f^{-1}(x^2-8x)-2\right)<2$

ΘΕΜΑ 9Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(2)=10 \text{ και } \left(fof\right)(x)=3x-5\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(|x|-2\right)-5\right)=2$

ΘΕΜΑ 10Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^3+2x$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να βρείτε το $f^{-1}(3)$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(f\left(x^2-5\right)+15\right)=2$

ΘΕΜΑ 11^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

iii) Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της f καθώς και το σύνολο τιμών της f.

iv) Να λύσετε την εξίσωση**:**

$$\ln\left(\frac{\left(e^{a^3-2a^2+1}-1\right)\cdot\left(e^{a^2+1}+1\right)}{\left(e^{a^3-2a^2+1}+1\right)\cdot\left(e^{a^2+1}-1\right)}\right)=0$$

ΘΕΜΑ 12^{Ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+1$ και $g(x)=1-\ln x$

i) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως μονότονες στο πεδίο ορισμού τους.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ και τα διαστήματα στα οποία η C_g βρίσεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης $f-g$ με την ευθεία $y=e$.

iv) Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και $f^{-1}og$

v) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(\dfrac{a^{2016}-a}{1-a}\right)<0$

ΘΕΜΑ 13^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f^3(x)+2f^2(x)+3f(x)=2x+1,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

ΘΕΜΑ 14^{Ο}

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha$ με $x>0$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$, τότε:

Α. Να αποδείξετε οτι $\alpha=-1$.

Β. Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln\left(2x^2+2\right)-\frac{1}{x^2+3}>\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{2x^2+2}$$

ΘΕΜΑ 15^{Ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f\left(f(x)\right)=x,\ f(3)=1,\ g(x)=e^{f(x)}+e^x$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\left(gof\right)(x)=e^x+e$.

Διαγώνισμα θεωρίας (30΄)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζουμε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ;

Β. Τι ονομάζουμε συνάρτηση «1-1» στο πεδίο ορισμού της;

Γ. Να δώσετε ένα παράδειγμα συνάρτησης «1-1» που δεν είναι γνησίως μονότονη.

Δ. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f;

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

3. Κάθε συνάρτηση, που είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, είναι και 1-1 .

4. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν για κάθε x ∈ A ισχύει $f(x) = g(x)$.

5. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

Β. Στις επόμενες προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot g$ είναι:

α. Το $\mathbb{R}$ **β.** Το Β **γ.** Το $A \cup B$ **δ.** $A \cap B$

2. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ είναι:

α. $A \cap B$ β. $\{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\}$ **γ.** $\{x \in A \cap B / f(x) \neq 0\}$ **δ.** Το Α

3. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης gof

α. $\{x \in A / f(x) \in B\}$ **β.** $\{x \in B / f(x) \in A\}$ **γ.** $A \cap B$ **δ.** $A \cup B$

4. Η εξίσωση y = f(x) επαληθεύεται

α. μόνο από τα σημεία της C_f **β.** Από όλα τα σημεία του επιπέδου xOy

γ. Μόνο από τα σημεία με $x > 0$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

5. Η συνάρτηση $f(x) = -x^4$ είναι :

α. Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **β.** Γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

γ. «1-1» **δ**. Γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\ 0\right]$

Επαναληπτικό Διαγώνισμα στις Συναρτήσεις

Θέμα Α

Α.1 Πότε μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 ;

(Μονάδες 8)

Α.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

(Μονάδες 7)

Α.3 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(Μονάδες 5Χ2=10)

1. Μια συνάρτηση f που είναι «1-1» σε ένα διάστημα Δ είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ.

2. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f: A \to \mathbb{R}$, τότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f.

3. Αν μία συνάρτηση είναι «1-1» τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

4. Αν για μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ισχύει $-2015 \le f(x) < 2015$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2015 και ελάχιστη τιμή το -2015.

5. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄ των αξόνων x΄x και y΄y.

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση g : (0, ∞) →R που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,-2)$. Αν για την συνάρτηση f ισχύει:

$$f(x) = \ln x - g(x) \text{ για κάθε } x > 0$$

Β.1 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 10)

Β.2 Να λύσετε την ανίσωση:

$$2\ln x < 2 + g(x^2) \text{ στο } (0, +\infty) .$$

(Μονάδες 15)

Θέμα Γ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f\left(1+f(x)\right)=2x-6+f(x)\ (1),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

A. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 8)

ii) $f(3)=2$

(Μονάδες 7)

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(1+f\left(x^2+x+1\right)\right)=f\left(1+f(3)\right)$$

(Μονάδες 10)

Θέμα Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f\left(x-y\right)=f(x)\cdot f(y)\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Δ.1 Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ ή $f(0)=1$.

(Μονάδες 7)

Δ.2 Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

Δ. 3 Αν $f(0)\neq 0$, τότε:

Δ. 3. 1 Να αποδείξετε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Δ. 3. 2 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)