Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α

Γ΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

(Α΄ΜΕΡΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Σχολικό Έτος: 2016-2017

Συνέχεια συνάρτησης

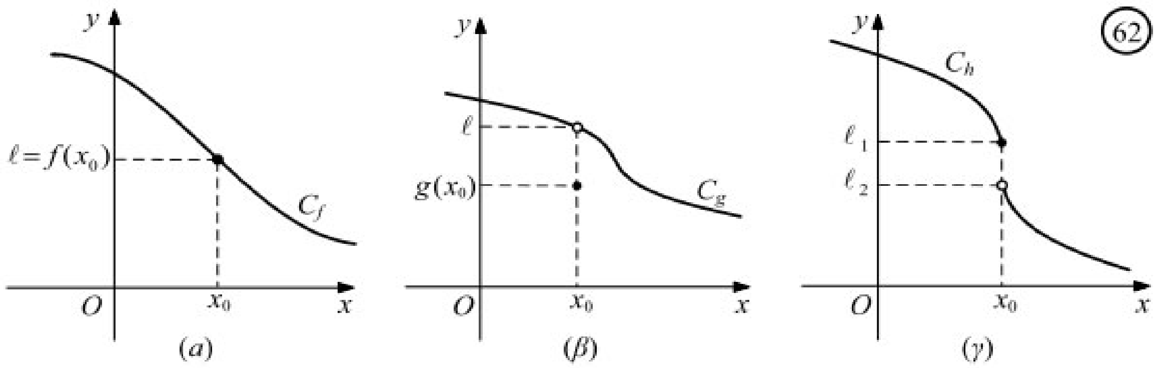
Θεώρημα Bolzano και οι συνέπειές του

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών-Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής

ΜΑΘΗΜΑ 17^o
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι :

— Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

— Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \neq g(x_0)$$

— Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση f. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f(x) = |x| είναι συνεχής στο 0, αφού:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν :

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0

Για παράδειγμα :

— Η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x \le 0 \\ 2-x, & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2+1) = 1, \qquad \text{ενώ} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (2-x) = 2,$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

— Η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x \ne 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 1, αφού:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2, \quad \text{ενώ} \quad f(1) = 3.$$

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Για παράδειγμα :

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής** , αφού για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ ισχύει .

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής** , αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις f(x) = ημx και g(x) = συνx είναι συνεχείς** , αφού για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

— **Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς**

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο και οι συναρτήσεις

$$f+g, \quad c \cdot f, \quad \text{όπου} \quad c \in \mathrm{R}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0

Για παράδειγμα:

— Οι συναρτήσεις **f(x) = εφx και g(x) = σφx** είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

— Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3x-2}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της [2/3, +∞), αφού η συνάρτηση g(x)=3x−2 είναι συνεχής.

— Η συνάρτηση f(x) = |xημx| είναι συνεχής, αφού είναι της μορφής f(x) = |g(x)|, όπου

g(x) = xημx η οποία είναι συνεχής συνάρτηση ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων

$f_1(x) = x$ και $f_2(x) = ημx$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι για τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

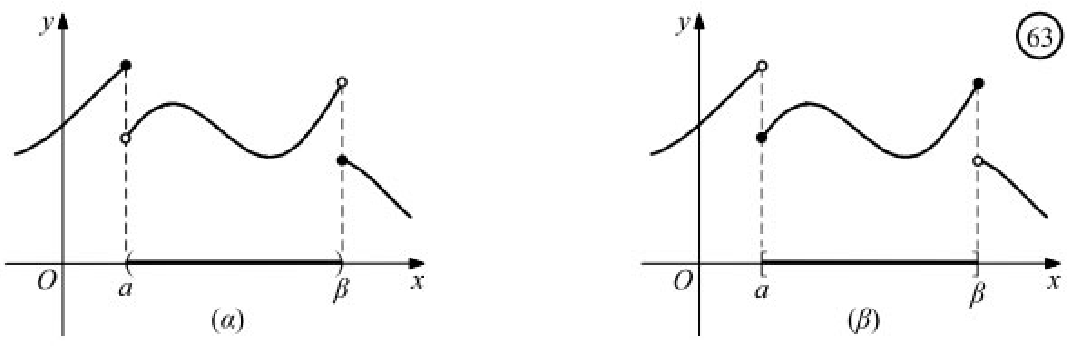
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β). (Σχ. 63α)

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta) \quad (\Sigma\chi.\ 63\beta)$$



Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής (α, β] , [α, β)

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 (Πως εξετάζουμε αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής)

Όταν ζητείται να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής

1ο. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f

2ο. Εξετάζουμε τη συνέχεια μόνο στα σημεία $x \in D_f$

3ο. Αν η f αλάζει τύπο εκατέρωθεν του $x_0 \in D_f$, τότε εξετάζουμε αρχικά την ύπαρξη του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ βρίσκοντας τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και διαπιστώνοντας ότι:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$$

Στα σημεία όπου η f δεν αλλάζει τύπο δικαιολογούμε τη συνέχεια συνήθως ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}, & \alpha\nu\ x>1 \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}, & \alpha\nu\ x\le 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ΛΥΣΗ

Για να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ η συνάρτηση f πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = \frac{1}{4}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Για ποια τιμή του α η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\alpha, & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής;

ΛΥΣΗ

— Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η f έχει τύπο $f(x) = x^2 + 2\alpha$ και επομένως είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η f έχει τύπο:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

και επομένως είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι η f συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, δηλαδή αρκεί:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$.

Έχουμε όμως :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 2\alpha) = 2\alpha \text{ ,}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \qquad \text{και}$$

$$f(0) = 2\alpha \text{ .}$$

Επομένως $2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 (Εύρεση παραμέτρου σε μια κλαδική συνάρτηση, ώστε η f να είναι συνεχής)

Όταν μας ζητούν να βρούμε την τιμη παραμέτρου (ή παραμέτρων) ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής, τότε:

1$^{\text{ο}}$. Παρατηρούμε σε ποια σημεία $x_0 \in D_f$ η f αλλάζει τύπο δεξιά και αριστερά του x_0.

2ο. Βρίσκουμε τα $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και απαιτούμε να είναι:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{(I)}$$

Από τη σχέση (I) προκύπτει μία σχέση μεταξύ των παραμέτρων.

3ο. Απαιτούμε ακόμα να ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_o) \quad \text{(II)}$$

Από τη σχέση (II) προκύπτει άλλη μία σχέση μεταξύ των παραμέτρων που, συνήθως, μαζί με την προηγούμενη σχέση αποτελούν σύστημα εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} + 2\alpha x, & \alpha\nu\ x > 1 \\ ax^2 + x - 1, & \alpha\nu\ x \le 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(1,\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Στο σημείο $x_0 = 1$ θα απαιτήσουμε τη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2-x}{x^2-1} + 2ax\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} + \lim_{x\to 1^-} 2ax = \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x+1} + 2a = \frac{1}{2} + 2a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(ax^2 + x + 1\right) = a + 2 = f(1)$$

Επομένως $a + 2 = \dfrac{1}{2} + 2a \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}$

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 (Εύρεση τιμής $f(x_0)$ ή του τύπου της f)

1. Αν ζητείται να βρούμε την τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $x_0 \in D_f$ (δηλαδή το $f(x_0)$) και δεν είναι εύκολη η άμεση εύρεσή του, τότε:

$$f(x_o)=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

2. Αν ζητείται να βρούμε την τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $x_0 \in D_f$ (δηλαδή το $f\left(x_0\right)$) και δίνεται συναρτησιακή ανισωτική σχέση , τότε χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια στο x_0 και αφού:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_o),$$

καταλήγουμε σε σχέσεις της μορφής:

$$f\left(x_0\right)\geq a \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f\left(x_0\right)\leq a,$$

, οπότε $f\left(x_0\right)=a$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $x^3 f\left(x\right)=x^5, x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

ΛΥΣΗ

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$ άρα θα είναι:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^3}=\lim_{x\to 0} x^2=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $x^2 f\left(x\right)=\eta\mu^2 2x, x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε:

i) Τον τύπο της συνάρτησης $f\left(x\right)$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ΛΥΣΗ

i) Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$x^2 f\left(x\right)=\eta\mu^2 2x \Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}$$ (η οποία είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων).

Για $x_0=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ θα είναι:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}\right)^2=2^2=4$$

Επομένως:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x^2}, & \alpha\nu \;\; x\neq 0\\ 4, & \alpha\nu \;\; x=0\end{cases}$$

ii) Ζητούμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}$. Έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

, οπότε από το Κριτήριο της Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4 (Θεωρητικές ασκήσεις)

Είναι ασκήσεις όπου, συνήθως, δίνεται μία συναρτησιακή σχέση της μορφής:

1. $f(x+y) = \ldots$ για κάθε $x, y \in A$. Τότε θέτουμε: $\begin{array}{l} x - x_0 = h \Leftrightarrow x = x_0 + h \\ x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0 \end{array}$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(\ldots)$$

2. $f(x\cdot y) = \ldots$, για κάθε $x, y \in A$. Τότε θέτουμε: $\begin{array}{l} \frac{x}{x_0} = h \Leftrightarrow x = x_0 \cdot h \ \ (x_0 \ne 0) \\ x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 1 \end{array}$ και

έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 1} f(x_0 \cdot h) = \lim_{h\to 1}(\ldots)$$

3. $f(x+\lambda y) = \ldots$, για κάθε $x, y \in A$. Τότε θέτουμε: $\begin{array}{l} x - x_0 = \lambda h \Leftrightarrow x = x_0 + \lambda h \ \ (\lambda \ne 0) \\ x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0 \end{array}$ και

έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + \lambda h) = \lim_{h\to 0}(\ldots)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$ **ii)** Η συνάρτηση f είναι περιττή.

Β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι :

i) συνεχής στο $x_0 = 0$ **ii)** συνεχής στο $\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Α. i) Θέτουμε στη συναρτησιακή σχέση $x = y = 0$ και έχουμε:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

ii) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow 0 = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Β. i) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

Θέτουμε: $\begin{array}{l} -x = t \\ x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0 \end{array}$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(-x) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{x\to 0} f(x) = l$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0} f(-x) = \lim_{x\to 0}\left(-f(x)\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow l = -l \Leftrightarrow l = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Επομένως η η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$(x-2) f(x) \geq x^2 - 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Να βρείτε την τιμή $f(2)$

ΛΥΣΗ

Αφού η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&Αν\ x-2>0 \Leftrightarrow x>2, τότε:\\
&f(x) \geq \frac{x^2-3x+2}{x-2}\\
&Αν\ x-2>0 \Leftrightarrow x>2, τότε:\\
&f(x) \leq \frac{x^2-3x+2}{x-2}
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \geq \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x-2} \Rightarrow f(2) \geq \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \Rightarrow f(2) \geq 1 \ (1)$$

Ακόμα:

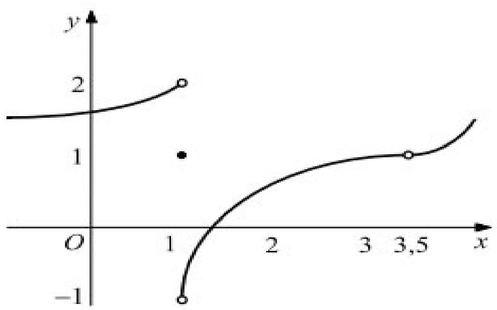
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \leq \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{x-2} \Rightarrow f(2) \leq \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \Rightarrow f(2) \leq 1 \ (2)$$

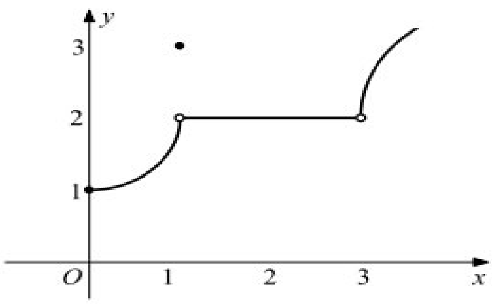
Από τις σχέσεις (1) , (2) έχουμε $f(2)=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ (Σχολικό βιβλίο)

1/Α. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





2/Α. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις :

i) $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3 & , x\geq 2 \end{cases}$, αν $x_0=2$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ \sqrt{3+x}, & x\geq 1 \end{cases}$, αν $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, & x\neq -2 \\ -3 & , x=-2 \end{cases}$, αν $x_0=-2$.

3/A. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συνρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & |x|\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & , |x|>1 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} & , x\neq 2 \\ 5 & , x=2 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} x & , x<1 \\ \ln x & , x\geq 1 \end{cases}$

iv) $f(x)=\begin{cases} e^x & , x\leq 0 \\ -x^2+1 & , x>0 \end{cases}$.

4/A. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & , x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , x>1 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x} & , x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , x\geq 0 \end{cases}$.

5/A. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς :

i) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$

ii) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

iii) $f(x)=\eta\mu\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

iv) $f(x)=e^{\eta\mu x}$

v) $f(x)=\ln(\ln x)$

Β. Εμπεδώνω (Σχολικό βιβλίο)

1/Β. Αν

$$f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa) & , \ x\le 2\\ \kappa x+5 & , \ x>2\end{cases}$$

,να προσδιορίσετε το κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

2/Β. Αν

$$f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\beta x-12 & , \ x<1\\ 5 & , \ x=1\\ \alpha x+\beta & , \ x>1\end{cases},$$

να βρείτε τις τιμές των α, β ∈ **R** για τις οποίες η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

3/Β. i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Να βρείτε το f(0), αν για κάθε x ∈ $\mathbf{R}^*$ ισχύει xf(x) = συνx − 1

ii) Ομοίως, να βρείτε το g(0) για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε x ∈ **R** ισχύει $|xg(x) - \eta\mu x| \le x^2$

Γ. Προτεινόμενες

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}, & \alpha\nu\, x\neq 1\\ 2, & \alpha\nu\, x=1\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}, & \alpha\nu\, x\neq 3\\ x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{8x}, & \alpha\nu\, x=3\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2\alpha x-\beta, & \alpha\nu\ x\leq 1\\ 3x-1, & \alpha\nu\ 1<x\leq 2\\ \beta x^2-a, & \alpha\nu\ x>2\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{x^2+3}-\lambda}{x-1}, & \alpha\nu\ x\neq 1\\ \kappa & ,\ \alpha\nu\ x=1\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

5. A. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_1=0$ και ισχύει :

$$x^3 f\left(x\right)\leq\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\cdot\eta\mu 4x,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}^*$$

, να βρείτε την τιμή $f\left(0\right)$.

B. Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_1=0$ και ισχύει :

$$\left|xg(x)-\eta\mu x\right|\leq x^4\eta\mu^2\frac{1}{x}\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}^*$$

να βρείτε την τιμή $g\left(0\right)$.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_1=0$ και ισχύει :

$$\sqrt{16-x^5\eta\mu\frac{1}{x^{11}}}\leq 4+x^2 f\left(x\right)\leq\sqrt{16+x^4}\ \ \text{για κάθε}\ x\in\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$$

να βρείτε την τιμή $f\left(0\right)$.

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=3$ και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=2016$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=2016$$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

$$f^2(x)+g^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x \le 2xf(x)+2g(x)\sigma\upsilon\nu x \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^2(x)+g^2(x) \le 2\left[xf(x)+g(x)\cdot \eta\mu x + x\eta\mu x\right] \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$

10. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \text{, για κάθε } x, y\in\mathbb{R}$$

A. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

B. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = a \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

11. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y) \text{, για κάθε } x, y>0$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$

ii) Αν η f είναι συνεχής κάποιο $x_0 = a \in (0,\infty)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,\infty)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$1+(x^2+1)f(x)=(1+f(x))\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x + x^2 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

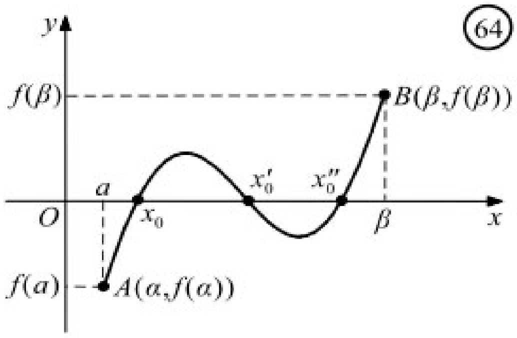
$$f(x)+\sqrt{x^2+x+2}=1+x\left(f(x)+1\right) \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$

ΜΑΘΗΜΑ 18ο
ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β]. Επειδή τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x΄x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.



ΘΕΩΡΗΜΑ ΒΟΛΖΑΝΟ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

— η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει

— f(α) • f(β) < 0 .

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, x_0∊ (α, β) τέτοιο, ώστε f(x_0) = 0 .

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (α, β).

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 (Ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης $f(x)=0$ σε ένα διάστημα (α,β))

« Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ (ή η συνάρτηση f) έχει μία , τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(\alpha,\beta\right)$» ή εναλλακτική εκφώνηση: «Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x΄x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο».

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν το διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ <u>δεν</u> δίνεται προσπαθούμε να το εντοπίσουμε με δοκιμές, ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

  (παράδειγμα 1)

- Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση f έχει περισσότερες από μία ριζες στο $\left[\alpha,\beta\right]$, τότε χωρίζουμε το $\left[\alpha,\beta\right]$ σε ισάριθμα (και χωρίς κοινά σημεία) υποδιαστήματα ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano. Μια «καλή» διαίρεση σε ν-διαστήματα είναι η $[\alpha,\kappa],[\kappa,2\kappa],...[(\nu-1)\kappa,\beta]$ (π.χ για 2 υποδιαστήματα είναι $\left[\alpha,\frac{\beta-\alpha}{2}\right],\left[\frac{\beta-\alpha}{2},\beta\right]$.

(παράδειγμα 2)

- Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι στο κλειστό διάστημα, δηλαδή ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(a)\cdot f(\beta)\le 0$, διότι:

  -Αν $f(a)\cdot f(\beta)<0$, τότε από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ ενώ,

  -Αν $f(a)\cdot f(\beta)=0 \Leftrightarrow \left(f(a)=0 \text{ ή } f(\beta)=0\right)$, οπότε $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$ αντίστοιχα.

  (παράδειγμα 3)

- Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση $g(x)=0$, <u>η οποία περιέχει παρονομαστές</u>, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (a,β) και η $g(x)$ δεν ορίζεται σε ένα (ή και στα δύο) άκρα α,β τότε κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και μετά θεωρώντας ως συνάρτηση $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ εξετάζουμε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano για να το εφαρμόσουμε.

  (παράδειγμα 4)

- Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση $g(x)=0$, έχει ακριβώς μια ρίζα (μοναδική ρίζα), τότε αποδυκνείουμε την ύπαρξη της με το θεώρημα του Bolzano και την μοναδικότητα της με την μονοτονία της στο διάστημα (a,β) (ή το «1-1» στο διάστημα (a,β)). Αν η f δεν είναι γνηίως μονότονη τότε εφαρμόζουμε την απαγωγή σε άτοπο.

  (παράδειγμα 5)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+x-e=0$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$f(x)=x^3+x-e, x\in[0,2]$ (γιατί π.χ στο διάστημα $[0,1]$ δεν πληρείται η 2^{η} προϋπόθεση του θεωρήματος του Bolzano).

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$(ως πολυωνυμική)
- $f(0)=-e<0$
$f(2)=10-e>0$

Άρα $f(0)\cdot f(2)<0$. Επομένως από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της f στο $[0,1]\subset\mathbb{R}$.

2. Αν $\beta>0$ και $a+\beta+1<0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+ax^2+\beta=0$ έχει δύο ,τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα$(-1,1)$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$f(x)=x^3+ax^2+\beta, x\in[-1,0]\cup[0,1]$ («σπάσαμε» το διάστημα σταδύο υποσδιαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$).

- Η Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήμα $[-1,0],[0,1]$ (ως πολυωνυμική)
- $f(-1)=-1+a+\beta<2+(-1+a+\beta)=1+\alpha+\beta<0$
- $f(0)=\beta>0$
- $f(1)=1+a+\beta$

Άρα από το θεώρημα του Bolzano υπάρχουν $\xi_1\in(-1,0)$ και $\xi_2\in(0,1)$,τέτοια ώστε:

$f(\xi_1)=0$ και $f(\xi_2)=0$

3. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής ($\alpha,\beta>0$) και $\alpha\le f(x)\le\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{a\beta}{x_0}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=xf(x)-a\beta, x\in[a,\beta]$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ (ως γινόμενο-διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,\beta]$).

- $h(a)=af(a)-a\beta=a\left(f(a)-\beta\right)$
  $h(x)=\beta f(\beta)-a\beta=\beta\left(f(\beta)-\alpha\right)$

Όμως $\alpha\le f(x)\le\beta$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, οπότε είναι και:

$$\alpha\le f(\alpha)\le\beta\Rightarrow f(\alpha)-\beta\le 0$$
$$\alpha\le f(\beta)\le\beta\Rightarrow f(\beta)-\alpha\ge 0$$

Άρα . $h(a)\cdot h(\beta)\le 0$. Επομένως:

- Αν $h(a)\cdot h(\beta)<0$ από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow f\left(x_0\right)=\frac{a\beta}{x_0}$$

- Αν $h(a)=0$, τότε $x_0=a$
- Αν $h(\beta)=0$, τότε $x_0=\beta$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f\left(x_0\right)=\dfrac{a\beta}{x_0}$

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x^{2016}+2016}{x-1}+\frac{x^{2015}+2015}{x-2}=0$$

Έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ΛΥΣΗ

Η δοθείσα εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^{2016}+2016}{x-1}+\frac{x^{2015}+2015}{x-2}=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^{2016}+2016\right)+(x-1)\left(x^{2015}+2015\right)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=(x-2)\left(x^{2016}+2016\right)+(x-1)\left(x^{2015}+2015\right),x\in[1,2]$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)
- $h(1)=-2017<0$
  $h(2)=2016>0$

Άρα $h(1)\cdot h(2)<0$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano και επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{\xi^{2016}+2016}{\xi-1}+\frac{\xi^{2015}+2015}{\xi-2}=0$$

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+2x-1=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=x^3+2x-1, x\in[0,1]$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$
- $f(0)=-1<0$
  $f(1)=2>0$

  Άρα από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον (στην περίπτωσή μας είναι μοναδική. Γιατί;), $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0^{\ 3}+2x_0-1$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 (Ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης $f(x)=g(x)$ σε ένα διάστημα (α,β))

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α΄μέλος, δηλαδή:
$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$$
- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[a,\beta]$
- Εφαμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $h(x)$ στο $[a,\beta]$.
- Αν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=g(\xi)$ πάλι θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[a,\beta]$, δηλαδή θέτουμε όπου $\xi=x$ και μεταφέρουμε όλους τουςόρους στο α΄μέλος.

Ισχύουν οι ίδιες χρήσιμες παρατηρήσεις με την προηγούμενη μέθοδο 1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να δειχτεί ότι η εξίσωση x + συνx = 4 έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (π, 2π).

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) = x + συνx − 4, x ϵ [π, 2π]. Τότε:

- Η f είναι συνεχής στο [π, 2π] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι f(π) • f(π) < 0, αφού

f(π) = π + συνπ − 4 = π − 5 < 0 f(2π) = 2π + συν2π − 4 = 2π − 3 > 0.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, οπότε $x_0 + συνx_0 - 4$ και συνεπώς $x_0 + συνx_0 = 4$. Άρα, η εξίσωση x + συνx = 4 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (π, 2π).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ και $g(x) = 9x^3 - 3x + 1$ έχουν ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (-1,1)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^4 + 3x^2 + 2 - 9x^3 + 3x - 1 = x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 3x + 1, x \in [-1,1]$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ (ως πολυωνυμική)

  $h(-1) = 11 > 0$
- $h(1) = -2 < 0$

  $h(-1) \cdot h(1) < 0$

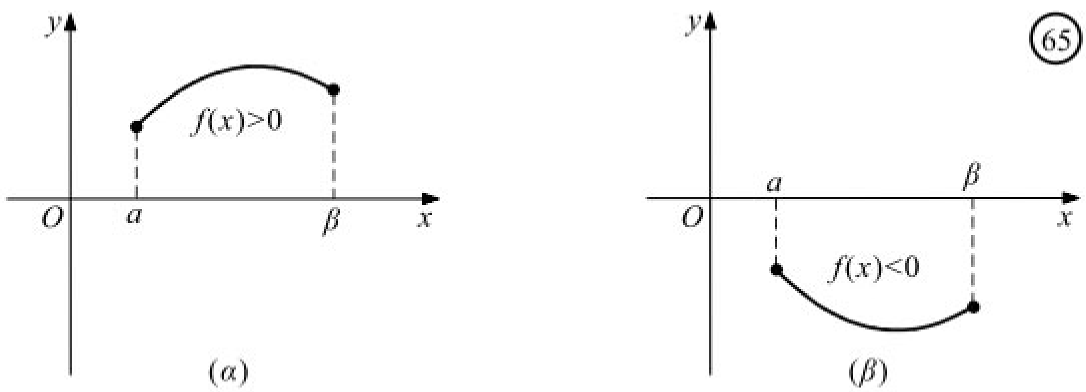
Άρα από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε :

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$, δηλαδή έχουν ένα ,τουλάχιστον, κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (-1,1)$.

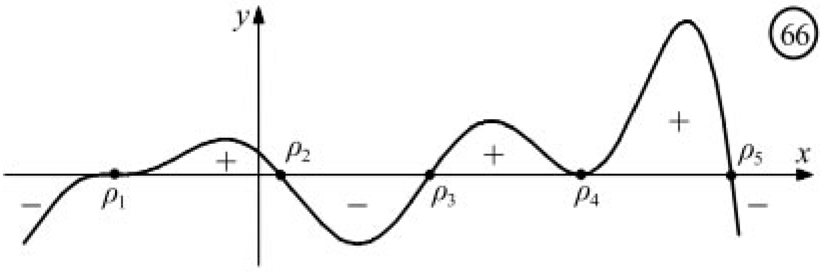
ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x ∈ Δ ή είναι αρνητική για κάθε x ∈ Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 (Προσδιορισμός του προσήμου της f)

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$f(x) = ημx - συνx \,,\ x \in [0, 2π].$$

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της στο [0, 2π].. Έχουμε:

$$ημx - συνx = 0 \ \text{ή}\ ημx = συνx \ \text{ή}\ εφx = 1 \ η\ (x = π/4 \quad \text{ή} \quad x = 5π/4)$$

Έτσι οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα:

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ και } \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$$

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
$f(x_0)$	-1	1	-1
Πρόσημο	$-$	$+$	$-$

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$, είναι f(x) < 0, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ είναι f(x) > 0.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4 (Συνέπεια του θεωρήματος του Bolzano-Εύρεση τύπων συνεχούς συνάρτησης)

Αν θέλουμε να βρούμε τον τύπο μίας συνεχούς συνάρτησης f στο Δ που ικανοποιούν σχέση της μορφής $|f(x)| = g(x)$ ή $f^2(x) = g(x)$ (με $g(x) > 0$), τότε:

Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (ή αλλιώς η f δεν έχει ρίζες στο Δ) και αφού η f είναι συνεχής στο Δ τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο (δηλαδή ή θα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική). Άρα :

- Αν για κάποιο $x_1 \in \Delta$ είναι $f(x_1) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Δηλαδή:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$f^2(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{g(x)}$$

- Αν για κάποιο $x_2 \in \Delta$ είναι $f(x_2) < 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Δηλαδή:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = -g(x)$$
$$f^2(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = -\sqrt{g(x)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$f^2(x) = e^{2x}, \ x \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$f^2(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=e^x, x\in\mathbb{R} \ (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως:

- Αν $f(x)>0$, τότε $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$
- Αν $f(x)<0$, τότε $f(x)=-e^x, x\in\mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το πλήθος των συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x)=e^{2x}, x\in\mathbb{R}$ είναι άπειρες. Ωστόσο, από αυτές οι συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση είναι μόνο δύο. Αυτό είναι συνέπεια του ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ το οποίο είναι συνέπεια της συνέχειας της f.

2. Αξίζει να επισημάνουμε ότι δεν ισχύει γενικά η σχέση:

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)=0 \ \acute{\eta} \ g(x)=0\right)$$

Δείτε παρακάτω έναν **λανθασμένο συλλογισμό** για το προηγούμενο παράδειγμα:

$$f^2(x)=e^{2x} \Leftrightarrow f^2(x)-e^{2x}=0 \Leftrightarrow \left(f(x)+e^x\right)\cdot\left(f(x)-e^x\right)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)=-e^x, x\in\mathbb{R} \ \acute{\eta} \ f(x)=-e^x, x\in\mathbb{R}\right)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 5 (Συνέπεια του θεωρήματος του Bolzano-Ύπαρξη ρίζας της f και διατήρηση σταθερού προσήμου στο Δ)

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση $f(x)=0$, με f συνεχή στο διάστημα Δ (ή μία εξίσωση:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=0, \mu\varepsilon \ h(x)=f(x)-g(x), x\in\Delta)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano (π.χ γιατί δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις), τότε ακολουθούμε την επόμενη μέθοδο:

Έστω ότι η f (ή η h αντίστοιχα) δεν έχει ρίζα στο διάστημα (a,β). Τότε, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και επειδή η συνάρτηση f (ή η h αντίστοιχα) είναι συνεχής στο Δ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο (ή παντού θα είναι θετική ή παντού θα είναι αρνητική). Άρα:

Ή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (και καταλήγουμε σε άτοπο) ή

Ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (και καταλήγουμε σε άτοπο)

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ (ή η εξίσωση $h(x) = 0$) έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο Δ.

ΜΕΘΟΔΟΣ 6 (Θεωρητικές ασκήσεις)

Στην κατηγορία αυτή, συνήθως, δίνονται θεωρητικές χρησιμεύουν στην εξέταση της 2ης προϋπόθεσης του θεωρήματος του Bolzano.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(a) \neq 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha} = \frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha} = \frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)\left(f(a)+f(\beta)\right)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x)(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\left(f(a)+f(\beta)\right),\ x \in [\alpha,\beta]$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$)
- $h(a)=f(a)(\beta-\alpha)$
  $h(\beta)=-(\beta-\alpha)(f(a)+f(\beta))$

Άρα $h(a)\cdot h(\beta)=-(\beta-\alpha)^2 f(a)(f(a)+f(\beta))$.

Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ και αφού $f(a)\neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $f(a)>0$, τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, οπότε και $f(\beta)>0$ άρα $(f(a)+f(\beta))>0$. Επομένως $h(a)\cdot h(\beta)<0$ και άρα , σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)(f(a)+f(\beta))=0\Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

β) Αν $f(a)<0$, τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, οπότε και $f(\beta)<0$, άρα $(f(a)+f(\beta))<0$. Επομένως $h(a)\cdot h(\beta)<0$ και άρα , σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)(f(a)+f(\beta))=0\Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

γ) Αν $f(\beta)=0\Rightarrow h(a)\cdot h(\beta)=-(\beta-\alpha)^2 f^2(a)<0$. Επομένως $h(a)\cdot h(\beta)<0$ και άρα , σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)(f(a)+f(\beta))=0\Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο, ώστε $\eta\mu x_0 = \frac{1}{3}(1+\sigma\upsilon\nu x_0)$

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

4. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f(0) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ και $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)\eta\mu^2 x + g(x)\sigma\upsilon\nu^2 x = x$$

Έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

5. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $\begin{matrix} f(a) = g(\beta) = \alpha \\ g(a) = f(\beta) = \beta \end{matrix}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

$$f(g(\xi)) + g(f(\xi)) = 2\xi$$

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(a) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \frac{f(a) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$$

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 3\eta\mu x = x^2, x \in \mathbb{R}$$

Α) Να βρείτε τη συνάρτηση f

Β) Να βρείτε το όριο $K = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχε μία, τουλάχιστον, θετική λύση.

8. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$ και $\left(f(x)+x^2\right)\left(f(x)-x^2\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

9. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

10. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης:

11. Αν $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(0)=f(2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_0,y_0\in[0,2]$ με $|x_0-y_0|=1$, ώστε $f(x_0)=f(y_0)$.

12. Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(0)=f(1)$ και n θετικός φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

13. Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(a)\neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο (διαφορετικά μεταξύ τους) $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$$\left|f(\xi_1)-f(\xi_2)\right|=\frac{|f(\beta)-f(a)|}{2n+1}\ \text{(όπου } n \text{ θετικός ακέραιος)}$$

14. Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $x_1,x_2,...,x_n\in[a,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[a,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots f(x_n)}{n}$$

ΜΑΘΗΜΑ 18ο
ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ –ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.**

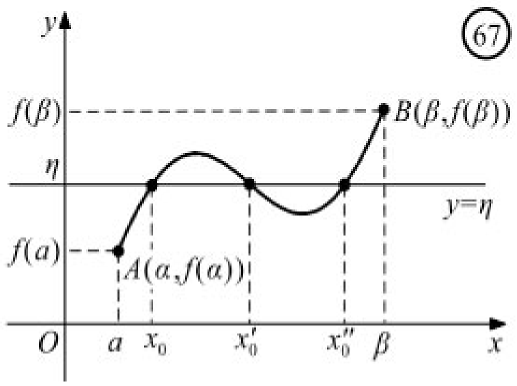
ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

— η f είναι συνεχής στο [α, β] και

— $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

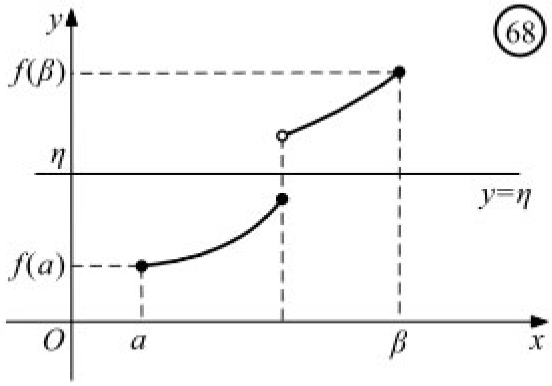
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο [α, β] και
- $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano,υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■

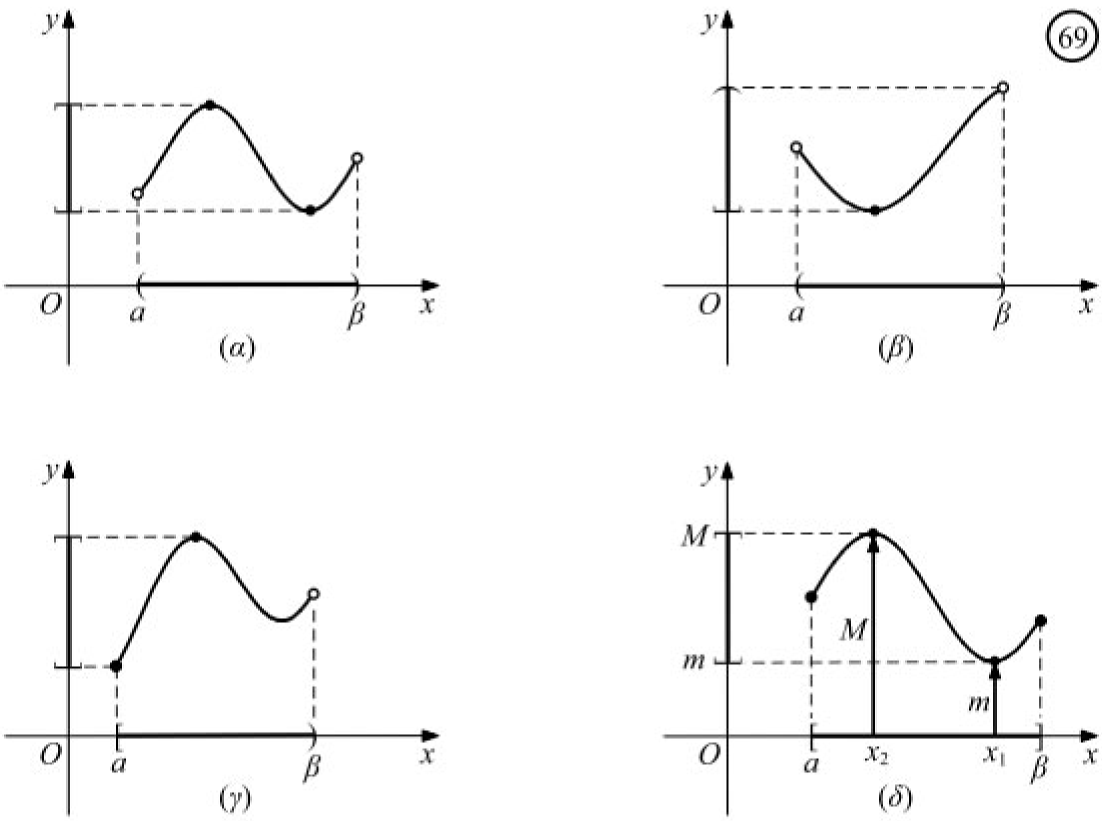
ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



● Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι :

Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα [α, β] , ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΜΕΘΟΔΟΣ 1

(Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{\kappa_1 f(x_1) + \kappa_2 f(x_2) + \ldots \kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots \kappa_\nu}$$, **όπου f συνεχής στο $[a, \beta]$**

Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή M, m αντίστοιχα, δηλαδή $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Άρα θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&m \le f(x_1) \le M \Rightarrow \kappa_1 m \le \kappa_1 f(x_1) \le \kappa_1 M \\
&m \le f(x_2) \le M \Rightarrow \kappa_2 m \le \kappa_2 f(x_2) \le \kappa_2 M \\
&\ldots. \\
&\ldots. \\
&\ldots. \\
&m \le f(x_\nu) \le M \Rightarrow \kappa_\nu m \le \kappa_\nu f(x_\nu) \le \kappa_\nu M
\end{aligned}
$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&(\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\nu) m \le \kappa_1 f(x_1) + \kappa_2 f(x_2) + \ldots \kappa_\nu f(x_\nu) \le (\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\nu) M \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow m \le \frac{\kappa_1 f(x_1) + \kappa_2 f(x_2) + \ldots \kappa_\nu f(x_\nu)}{(\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\nu)} \le M
\end{aligned}
$$

- Αν $m < M$, τότε από το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα , τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{\kappa_1 f(x_1) + \kappa_2 f(x_2) + \ldots \kappa_\nu f(x_\nu)}{(\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\nu)}$$

- Αν $m = M$, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή και επομένως το ζητούμενο είναι κάθε σημείο του $[a, \beta]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται μία ορισμένη και συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 6]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 6]$ τέτοιο, ώστε:

$$2f(1) + 4f(3) + 5f(5) = 11f(x_0)$$

ΛΥΣΗ

Αφού η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[0,6\right]$ θα παίρνει μέγιστο και ελάχιστο M,m αντίστοιχα. Άρα $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in \left[0,6\right]$.

Άρα:

$$\begin{aligned} m \le f(1) \le M &\Rightarrow 2m \le 2f(1) \le 2M \ \ (1) \\ m \le f(3) \le M &\Rightarrow 4m \le 4f(3) \le 4M \ \ (2) \\ m \le f(5) \le M &\Rightarrow 5m \le 5f(5) \le 5M \ \ (3) \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1), (2), (3) έχουμε:

$$11m \le 2f(1)+4f(3)+5f(5) \le 11M \Rightarrow m \le \frac{2f(1)+4f(3)+5f(5)}{11} \le M$$

Άρα ο αριθμός $\frac{2f(1)+4f(3)+5f(5)}{11}$ ανήκει στο σύνολο τομών της συνάρτησης f και επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in \left(0,6\right)$ τέτοιο, ώστε :

$$f\left(x_0\right) = \frac{2f(1)+4f(3)+5f(5)}{11} \Leftrightarrow 2f(1)+4f(3)+5f(5) = 11f\left(x_0\right)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. 69δ)

Δηλαδή, υπάρχουν x_1 , $x_2 \in$ [α, β] τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$m \le f(x) \le M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 (Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή η)

Αν ζητείται να εξετάσουμε (ή να αποδείξουμε) ότι η f παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή η , τότε:

- Αποδυκνείουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\Delta = \left[\alpha,\beta\right]$ και
- $\eta \in f\left(\Delta\right)$ (ή ότι το η είναι μεταξύ των $f\left(a\right), f\left(\beta\right)$ ($f\left(a\right) \ne f\left(\beta\right)$))

- Άρα από το θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\eta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2+3x-2\sigma\upsilon\nu(\pi x)$, να εξετάσετε αν η f μπορεί να πάρει την τιμή 18.

ΛΥΣΗ

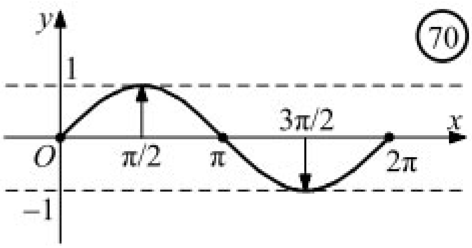
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,5]$(ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων). Ο αριθμός 18 βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές $f(0)=-1$, $f(5)=42$ και άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,5)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=18$.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α, β] είναι το κλειστό διάστημα

[m, M] , όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f(x) = ημx, x ϵ [0, 2π] έχει σύνολο τιμών το [−1,1] , αφού είναι συνεχής στο [0, 2π] με m = −1 και M = 1.



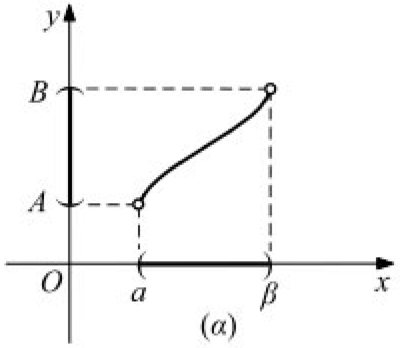
ΜΕΘΟΔΟΣ 3 (Εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης)

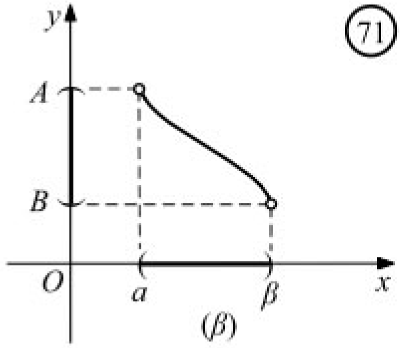
- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα διάστημα $[a,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $[f(a), f(\beta)]$.
- Αν η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο $[a,\beta]$,τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα$[f(\beta), f(\alpha)]$.

- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) (Σχ. 71α), όπου

$$A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$$

- Αν η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Β, Α) (Σχ. 71β).

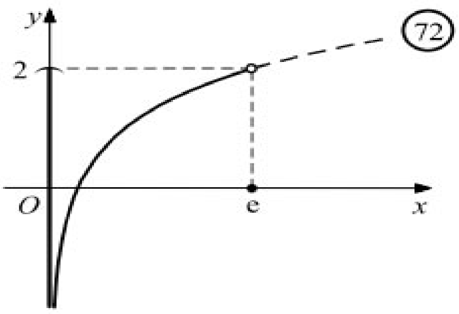


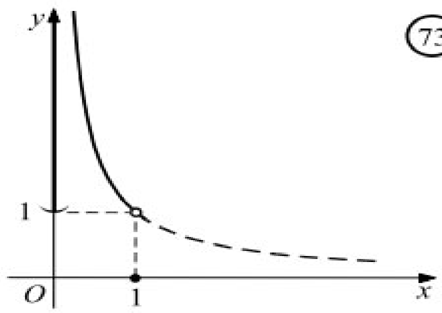


Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της f(x) = lnx + 1, x ϵ (0, e), η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα (−∞, 2), αφού

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to e^-} f(x) = 2 .$$





Το σύνολο τιμών της $f(x) = \frac{1}{x}$, x ϵ (0, 1), η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα (1, +∞), αφού:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 1 .$$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής [α,β] , [α, β) και (α, β].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{2-x}-1$ **ii)** $g(x)=x^4+3x+1, x\in[1,3]$

ΛΥΣΗ

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι $(-\infty,2]$ (αφού πρέπει $2-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$).

Εξετάζουμε την μονοτονία της f:

Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,2]$ με

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow 2-x_1>2-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x_1}>\sqrt{2-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{2-x_1}-1>\sqrt{2-x_2}-1 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty,2]$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$\left[f(2),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-1,\infty)$$

ii) Η g είναι συνεχής συνάρτηση (ως πολυωνυμική). Εξετάζουμε την μονοτονία της f:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^4<x_2^4 \quad (1)$$
$$x_1<x_2 \Leftrightarrow 3x_1<3x_2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$x_1^4+3x_1<x_2^4+3x_2 \Leftrightarrow x_1^4+3x_1+1<x_2^4+3x_2+1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως το σύνολο τιμών της είναι $[f(1),f(3)]=[5,91]$.

Βασική πρόταση (η οποία θα πρέπει να αποδειχθεί πριν χρησιμοποιηθεί σε ασκήσεις)

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και «1-1». Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2<x_3$, ώστε να έχουμε $f(x_1)>f(x_2)$ και $f(x_2)<f(x_3)$.

Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών έχουμε ότι:

Αν $y\in\mathbb{R}$ με $f(x_2)<y<\min\{f(x_1),f(x_2)\}$ θα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $a\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(a)=y$ και ένα, τουλάχιστον $\beta\in(x_2,x_3)$ τέτοιο ώστε $f(\beta)=y$. Αλλά η συνάρτηση

f είναι «1-1» και άρα $y = f(a) = f(\beta) \Rightarrow a = \beta$ ο οποίο είναι άτοπο (αφού $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ (Σχολικό βιβλίο)

6/Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ημx − x + 1 έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,π).

7/Α. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις f, να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα (α, α+1) η εξίσωση f(x) = 0 να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

i) $f(x) = x^3 + x - 1$ ii) $f(x) = x^5 + 2x + 1$

iii) $f(x) = x^4 + 2x - 4$ iv) $f(x) = -x^3 + x + 2$.

8/Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0,$$

όπου α, β, γ > 0 και λ < μ < ν, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ,μ) και μια στο (μ,ν).

9/Α. Να βρείτε το πρόσημα της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν :

i) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ ii) $f(x) = x^4 - 9x^2$

iii) $f(x) = \text{εφ}x - \sqrt{3}$, $x \in (-\pi, \pi)$ iv) $f(x) = \text{ημ}x + \text{συν}x$, $x \in [0, 2\pi]$.

10/Α. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i) $f(x) = \ln x - 1$, $x \in [1, e]$ ii) $f(x) = -x + 2$, $x \in (0, 2)$

iii) $f(x) = 2\text{ημ}x + 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ iv) $f(x) = e^x + 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

Β. Εμπεδώνω (Σχολικό βιβλίο)

4/Β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο [0,1] και πληρούν τις σχέσεις f(0) < g(0) και f(1) > g(1), να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ϵ (0,1) τέτοιο ώστε f(ξ) = g(ξ).

5/Β. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις :

α) $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^6+1}{x-2}=0$ β) $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0$

6/Β. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

i) $f(x)=e^x$ και $g(x)=\frac{1}{x}$ ii) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\frac{1}{x}$

7/Β. i) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$, για την οποία ισχύει:

$$x^2 + f^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [-1,1]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

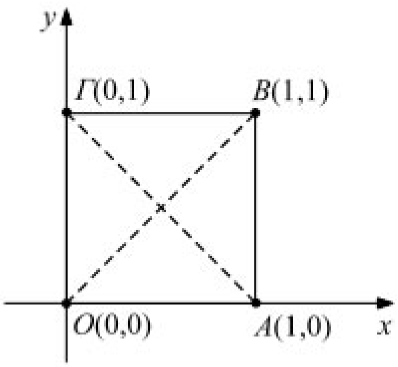
γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο **R**, για την οποία ισχύει $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in$ **R**

8/Β. Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

ii) Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.



9/Β. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο [α, β] και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου,

i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης d(x) = (M_0M) του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ από το σημείο M(x,f(x)) της C_f για κάθε x ϵ [α, β] .

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο [α,β] και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία .

Γ. Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνεται μία ορισμένη και συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[1,10]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,10]$ τέτοιο, ώστε:

$$3f(2)+5f(6)+4f(9)=12f(\xi)$$

2. Αν $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής , να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $\xi\in[0,2]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f(0)}{2}+\frac{f(1)}{3}+\frac{f(2)}{6}$$

3. Αν $f:[1,4]\to\mathbb{R}^*$ συνεχής με $f(1)\cdot f(2)\cdot f(4)=8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in[1,4]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi$.

4. Αν f συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2,x_3\in[a,\beta]$ υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\sqrt[3]{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)}$$

5. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^5+3x^3+1, x\in\mathbb{R}$ **ii)** $g(x)=\sigma\upsilon\nu x-2x,\ x\in[0,\pi]$

6. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x)=\ln x+e^{x-2}-2016$$

7. Αν $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii)Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$2\xi\ln\xi=2-3\xi$$

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(1)=\frac{1}{2}$$
$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f\left(\frac{3}{y}\right)+f(y)\cdot f\left(\frac{3}{x}\right), \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3)=\frac{1}{2}$ **ii)** Η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Β) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=f\left(\frac{3}{x}\right), x\neq 0$ **ii)** $f(x\cdot y)=2f(x)\cdot f(y)$

Γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και περιττή με $\lim_{x\to 1} f(x)=2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με αντίστοιχες τεταγμένες 1 και -1.

10. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x^2-3\eta\mu\frac{\pi x}{2}-5\sigma\upsilon\nu^2(\pi x)+4$ μπορεί να πάρει τις τιμές $0,\ -1,\ 2,\ \sqrt{5}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

ΜΑΘΗΜΑ 20ο

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΖΟΜΑΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g\circ f)(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in R^*$ Α Ψ

β) $(f\circ g)(x) = -x$, $x \in R$ Α Ψ

2. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = l \in R$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Α Ψ

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x} = 0\cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x} = 0$. Α Ψ

4. Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in R$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > 1$. Α Ψ

5. Ισχύει: α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right) = 1$ Α Ψ

β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.

6. Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$. Α Ψ

7. Αν $f(x) \le \dfrac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Α Ψ

8. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$. Α Ψ

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -1$. Α Ψ

10. Αν $\lim_{x\to x_0} |f(x)|=0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$. Α Ψ

11. Αν η f είναι συνεχής στο R και για $x \neq 4$ ισχύει $f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1. Α Ψ

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\pi$. Α Ψ

II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$, $l,m \in R$ και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

Α) $l<m$ Β) $l \le m$ Γ) $l \ge m$

Δ) $l=m$ Ε) $m<l$.

2. Το όριο $\lim_{x\to +\infty} \frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

Α) 8 Β) 1 Γ) 0 Δ) $+\infty$ Ε) -8.

3. Το $\lim_{x\to +\infty} \frac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α) $+\infty$ Β) $-\infty$ Γ) 1 Δ) -1 Ε) 0.

4. Αν το $\lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α) $x_0=0$ Β) $x_0=2$ Γ) $x_0=-1$ Δ) $x_0=1$.

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο :

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^{20}-x+1}$ Β) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^{9}+x-1}$ Δ) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^{9}+x-1}$

Ε) $\lim_{x\to 0} [\ln(x^3+x+1)]$ ΣΤ) $\lim_{x\to 0} [\ln(x^3+x-1)]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα Δ = [0,3] , με f(0) =2, f(1) =1 και
f(3) = −1. Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$.

Β) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$

Γ) $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Δ) $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο [0,3] είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το −1.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

1. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, τότε $f(a)\cdot f(\beta)<0$

2. Αν f συνεχής στο Δ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

3. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

4. Αν f συνεχής σε ένα σύνολο Α και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Α.
στο Δ.

5. Αν f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, τότε παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή.

6. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

7. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

8. Μία συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ παίρνει υποχρεωτικά ολες τις ενδιάμεσες τιμές.

9. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

ΤΕΣΤ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής σ΄ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

β) Αν η f είναι συνεχής σ΄ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ΄ανάγκη $f(\beta) > 0$

γ) Ισχύει: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

δ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

ε) Για οποιοδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Να διατυπώσετε τους ορισμούς:

i) «1-1» συνάρτηση **ii)** f συνεχής στο $[a, \beta]$

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία σχεδιάζοντας μια πρόχειρη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Β. Να αποδείξετε το Θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Β. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο ν-βαθμού είναι συνεχής συνάρτηση στο R.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ-BOLZANO

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

(Μονάδες 7)

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

(Μονάδες 8)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$, τότε κατ΄ανάγκη $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

β) Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ «κοντά» στο $x_0\in\mathbb{R}$.

δ) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,\beta]$, τότε η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $[a,\beta]$.

ε) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-x}$$

(Μονάδες 8)

Β2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to3}\frac{|1-x^2|+|x^2-3|-14}{x^2-2x-3}$$

(Μονάδες 8)

Β3. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0=1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}, & \alpha\nu\ x>1\\ \dfrac{x^2-x}{\eta\mu 3x}, & \alpha\nu\ x<1\end{cases}$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Αν f, g οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}-1$ και $g(x)=(x-2)^2$ αντίστοιχα, να βρείτε τα επόμενα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(fog)(x)}{x^2-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{x}$

(Μονάδες 4x2=8)

Γ2. Να βρείτε τα α και β ώστε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^3-\beta x^2+x-1}{x^2-x-2}=-2$$

(Μονάδες 9)

Γ3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} g(x)$$

για όλες τις τιμές των λ, μ **∊ R.**

(Μονάδες 4x2=8)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-2xy \text{ για κάθε } x,y\in(0,\infty)$$

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \infty) \text{ και } \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \beta > 0$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».

(Μονάδες 8)

Δ3. Αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x^2)}{x^2}, & \alpha\nu \ x > 0 \\ \beta, & \alpha\nu \ x = 0 \\ x^5 \eta\mu \dfrac{2015}{x^{2015}} - a, & \alpha\nu \ x < 0 \end{cases}$$

, να βρείτε το α και το β, ώστε η g να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2xf(x+1) = (x+1)f(x)$$

έχει μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

(Μονάδες 6)