Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α

Γ΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

(Α΄ΜΕΡΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ

Έννοια Συνάρτησης

Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης

Γραφικές Παραστάσεις

Ισότητα συναρτήσεων-Πράξεις συναρτήσεων

Σύνθεση συναρτήσεων

Θωρία-Σχόλια-Μεθοδολογικές υποδείξεις-Παραδείγματα-Ασκήσεις σε κατηγορίες

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

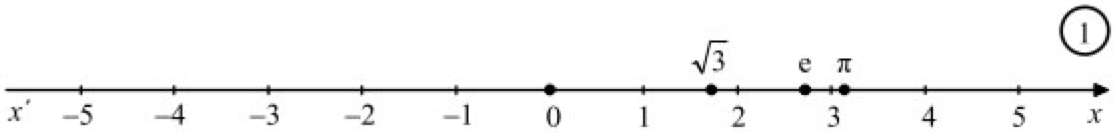
Σχολικό Έτος: 2016-2017

ΜΑΘΗΜΑ 1ο

Βασικές γνώσεις-Επαναλήψεις

Τα βασικά σύνολα είναι:

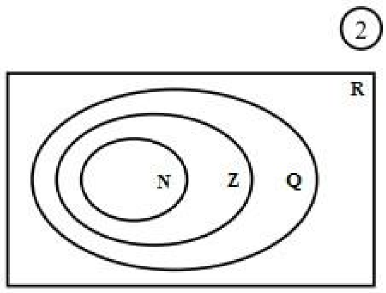
- Το σύνολο των φυσικών αριθμών **N** = {0, 1, 2, 3,.......},
- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών **Z** = {......., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,.......},
- Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με **Q** και είναι όλοι οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$.
- Το σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνεται με τα σημεία ενός άξονα, *τ ο υ ά ξ ο ν α τ ω ν π ρ α γ μ α τ ι κ ώ ν α ρ ι θ μ ώ ν.*



Για τα σύνολα N**,** Z**,** Q και R ισχύει:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Σχηματικά έχουμε:



Πράξεις και διάταξη στο R

Οι σπουδαιότερες ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών είναι οι:

1	Αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$, τότε $\alpha \geq \gamma$
2	$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma \geq \beta+\gamma$
3	$\begin{cases} \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma & , \text{ όταν } \gamma > 0 \\ \text{ενώ} & \\ \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma & , \text{ όταν } \gamma < 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \text{Αν} \quad \alpha \geq \beta \quad \text{και} \quad \gamma \geq \delta \text{ , τότε } \alpha+\gamma \geq \beta+\delta \\ \text{Αν} \begin{pmatrix} \alpha \geq \beta \quad \text{και} \quad \gamma \geq \delta \\ \text{και} \\ \alpha,\beta,\gamma,\delta > 0 \end{pmatrix} \text{, τότε } \alpha\gamma \geq \beta\delta. \end{cases}$
5	Αν α, $\beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbf{N}^*$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu \geq \beta^\nu$
6	$\frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha \geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \beta > 0)$
7	Αν $\alpha\beta > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}$

Διαστήματα πραγματικών αριθμών

Αν α, β ∈ **R** με α < β , τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα α, β** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

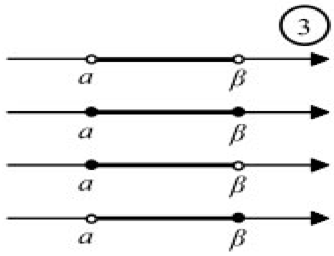
$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x < \beta\}$: **ανοικτό διάστημα**

$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$: **κλειστό διάστημα**

$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$: **κλειστό-ανοικτό διάστημα**

$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$: **ανοικτό-κλειστό διάστημα.**

(Σχ. 3)



Αν α ∊ **R**, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το α** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

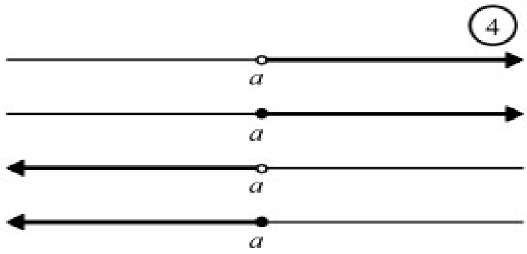
$$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > \alpha\}$$

$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq \alpha\}$$

(Σχ. 4)

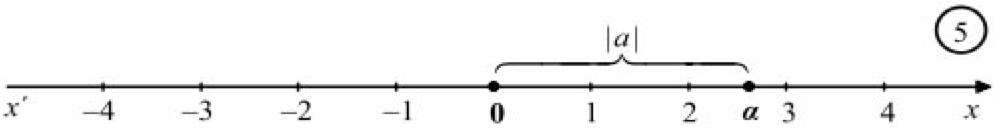


Υπό μορφή διαστήματος το σύνολο **R** το συμβολίζουμε με $(-\infty,+\infty)$.
Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του Δ.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α, που συμβολίζεται με | α |, ορίζεται ως εξής:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu\ \ \alpha < 0 \end{cases}$$



Οι βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι οι εξής:

1	$\lvert\alpha\rvert^2 = \alpha^2$
2	$\sqrt{\alpha^2} = \lvert\alpha\rvert$
3	$\lvert\alpha \cdot \beta\rvert = \lvert\alpha\rvert \cdot \lvert\beta\rvert$

4	$\left\|\frac{\alpha}{\beta}\right\| = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\ (\beta \neq 0)$
5	$\big\|\|\alpha\| - \|\beta\|\big\| \leq \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$
6	$\|x\| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta\ (\theta > 0)$
7	$\|x\| > \theta \Leftrightarrow (x > \theta \text{ ή } x < -\theta)\ (\theta > 0)$
8	$\|x - x_0\| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$
9	$\|x - x_0\| > \delta \Leftrightarrow x > x_0 + \delta \text{ ή } x < x_0 - \delta$

Α. Κατανοώ

1. Να γράψετε σε ποια σύνολα ανήκουν οι επόμενοι αριθμοί:

$$3,\ -4,\ \frac{1}{3},\ -\sqrt{2}$$

2. Αν $\alpha \geq 2$ και $\beta > -1$ να βρείτε σε ποιο διάστημα ανήκουν οι παραστάσεις:

$$2\alpha + 3\beta \text{ και } 5\alpha - 3\alpha$$

3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

1	$\|-3\| = \ldots$
2	$\left\|\frac{1}{2}\right\| = \ldots$
3	$\|\sqrt[3]{5}\| = \ldots$
4	$\|\alpha\| = \ldots$
5	$\|-\alpha\| = \ldots$
6	$\|\sqrt{\alpha}\| = \ldots$
7	$\|\alpha \cdot \beta\| = \ldots$
8	$\left\|\frac{\alpha}{\beta}\right\| = \ldots (\beta \neq 0)$
9	$\|\alpha^2\| = \ldots$

4. Να γράψετε σε μορφή διαστήματατος τις επόμενες ανισώσεις:

Ανίσωση	**Διάστημα**
$x \le -1$	
$x > 2$	
$-1 \le x < \frac{1}{3}$	
$-2 \le x \le 2$	
$-3 < x \le 8$	

5. Να γράψετε τα επόμενα διαστήματα σε μορφή ανισώσεων:

Διάστημα	**Ανίσωση**
$(-\infty, \ -1)$	
$[2, \ +\infty)$	
$(-3, 7]$	
$[0, \frac{2}{5}]$	
$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$	

Β. Εμπεδώνω

1. Να γράψετε τα παρακάτω σύνολα σε μορφή διαστήματος

$$\mathrm{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-1}{3} - 1 \le \frac{x-2}{2} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1 - 2\left| x + \frac{1}{2} \right| > -1 \right\}$$

ΜΑΘΗΜΑ 2^{ο}

Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω Α ένα υποσύνολο του **R**. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο x ϵ A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με f(x).

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbf{R}$$

$$x \to f(x)$$

Χρήσιμες παρατηρήσεις

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

—Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f.

— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα x ϵ A, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A)=\{y \,/\, y=f(x) \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o \ x\in A\}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ- Εύρεσης του πεδίου ορισμού μίας συνάρτησης

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού D_f μίας συνάρτησης f διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1^{η} περίπτωση:

Αν $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$, τότε λύνουμε την εξίσωση $B(x)=0$ και εξαιρούμε από το $\mathbb{R}$ τα x που μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \,/\, B(x)\neq 0\}$$

Σχόλιο: Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $A(x),\ B(x)$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν δεν έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε και γι αυτές το πεδίο ορισμού τους και παίρνουμε την τομή αυτών με το σύνολο D_f.

$2^η$ περίπτωση:

Αν $f(x)=\sqrt[ν]{A(x)}$, τότε λύνουμε την ανίσωση $A(x)\geq 0$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,A(x)\geq 0\}$$

Σχόλιο: Υποθέτουμε ότι οι συνάρτηση $A(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε και για την $A(x)$ το πεδίο ορισμού της και παίρνουμε την τομή αυτού με το σύνολο D_f.

$3^η$ περίπτωση:

Αν $f(x)=\ln A(x)$ ή $f(x)=\log A(x)$, τότε λύνουμε την ανίσωση $A(x)>0$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,A(x)>0\}$$

Σχόλιο: Υποθέτουμε ότι οι συνάρτηση $A(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε και για την $A(x)$ το πεδίο ορισμού της και παίρνουμε την τομή αυτού με το σύνολο D_f.

Προφανώς η εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης μπορεί να αποτελεί και συνδυασμό των παραπάνω περιπτώσεων.

Παραδείγματα- Ασκήσεις Λυμένες

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ **β)** $g(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-3x+4}$

ΛΥΣΗ ($1^η$ περίπτωση)

α) Πρέπει:

$$x^2-4\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 4\Leftrightarrow (x\neq 2\ και\ x\neq -2)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$$

β) Πρέπει:

$$x^2-3x+4\neq 0\Leftrightarrow (x\neq 2\ και\ x\neq 1)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_g=\mathbb{R}-\{1,\ 2\}$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt[3]{3x-1}$ **β)** $g(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

ΛΥΣΗ (2η περίπτωση)

α) Πρέπει:

$$3x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq \frac{1}{3}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\left[\frac{1}{3},\ +\infty\right)$$

β) Πρέπει:

$$x^2-4x+3\geq 0\Leftrightarrow (x\leq 1 \text{ ή } x\geq 3)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_g=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$ **β)** $g(x)=\log\left(x^3-x^2-2x+2\right)$

ΛΥΣΗ (3η περίπτωση)

α) Πρέπει:

$$x^2-1>0\Leftrightarrow\Leftrightarrow(x<-1 \;\kappa\alpha\iota\; x>1)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

β) Πρέπει:

$$x^3-x^2-2x+2>0\Leftrightarrow x^2(x-1)-2(x-1)>0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-2\right)>0$$

	$-\infty$ $\quad$ $-\sqrt{2}$	$\quad$ **1**	$\quad$ $\sqrt{2}$	$\quad$ $+\infty$
$(x-1)$	-	-	+	+
$\left(x^2-2\right)$	+	-	-	+
x^3-x^2-2x+2	-	+	-	+

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_g=\left(-\sqrt{2},1\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}+\ln\left(x^2-5x+4\right)$ **β)** $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}-\dfrac{1}{\ln(x^3-2x^2+x-2)}$

ΛΥΣΗ (συνδυαστική περίπτωση)

α) Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

$$x^2-9\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 0 \Leftrightarrow \left(x\neq 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x\neq -3\right) \;\; \kappa\alpha\iota$$
$$x^2-5x+4>0 \Leftrightarrow \left(x<1 \;\; \acute{\eta} \;\; x>4\right)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-3,1\right)\cup\left(4,+\infty\right)$$

β) Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

$$x^2-1>0 \Leftrightarrow \left(x<-1 \text{ ή } x>1\right)$$
$$x^3-2x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)+\left(x-2\right)>0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2+1\right)>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\left(2,+\infty\right)$$

Α. Κατανοώ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$ **Β)** $g(x)=\ln\left(x^2-3x-4\right)$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\sqrt{5x-15}$ **Β)** $g(x)=\sqrt[5]{x^2-25}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\dfrac{x+2}{3x-1}$ **Β)** $g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$

Ασκήσεις από το Σχολικό Βιβλίο

1/A. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

i) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$; ii) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

iii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ iv) $f(x)=\ln(1-e^x)$

B. Εμπεδώνω

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-6x^2+11x-6}$ **B)** $g(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x^3-6x^2+11x-6}}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2-2x-2}}{\ln\left(x^3-8\right)}$ **B)** $g(x)=\dfrac{1}{\ln\left(\sqrt[4]{x^3+x^2-2x-2}+1\right)}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\ln\left(\sqrt[3]{x^2-6x+5}\right)$ **B)** $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt[5]{x^2-4x+4}}-\dfrac{1}{\ln(x^4-2x^2+1)}$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}, & \alpha\nu\ x\neq 1\\ 0, & \alpha\nu\ x=1\end{cases}$ **B)** $g(x)=\begin{cases}x+1, & \alpha\nu\ x>0\\ x, & \alpha\nu\ -1<x<0\\ x-2, & \alpha\nu\ x<-1\end{cases}$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x)=\sqrt{e^x-1}+\sqrt{1-\ln x}\quad \kappa\alpha\iota\quad g(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x)=\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}+\frac{1}{\varepsilon\varphi x-1}\quad \kappa\alpha\iota\quad g(x)=\left(x-2\right)^{x+2}$$

(Πεδία Ορισμού με παράμετρο)

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{(\lambda+1)x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-3},\ \text{για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}$$

8. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων να είναι το $\mathbb{R}$

$$\alpha)\ f(x)=\ln\left(\lambda x^2+\lambda x+\lambda-1\right) \qquad \beta)\ g(x)=\sqrt{2x^2+x+\lambda-3}$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{3-\log\left(x+a\right)},\ g(x)=\sqrt{f\left(f\left(\frac{11}{10}\right)\right)-\ln\left(x-f(2)\right)} \text{ με } a\in\mathbb{R} \text{ και } f\left(2\right)=\sqrt{3}$$

i) Να βρείτε την τιμή του α

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμου της συνάρτησης f

iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμου της συνάρτησης g

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x+a, & \alpha\nu\ \ -6\le x<-1 \\ x^2+\beta, & \alpha\nu\ \ -1<x<7 \end{cases}$$

με $f\left(-2\right)=5$ και $f\left(5\right)=24$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τις τιμές του α και του β.

iii) $f\left(-1\right),\ f\left(f\left(-3\right)\right)$

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

(Συναρτησιακές σχέσεις)

11. Έστω μια συνάρτηση $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ με:

$$f\left(\frac{x}{e}\right)\le \ln x\le f\left(x\right)-1 \text{ για κάθε } x>0$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τις τιμές:

$$f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right),\ f\left(f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

12. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$2f(x)-f(1-x)=x^2+2x-1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)=f(x-2)$.

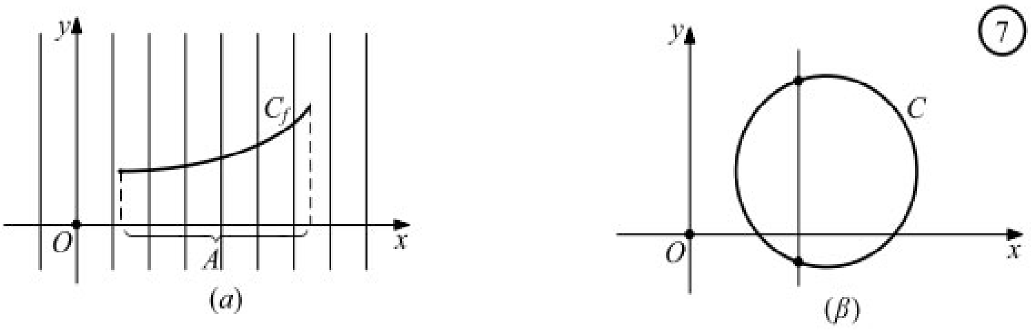
ΜΑΘΗΜΑ 3ο
Γραφικές Παραστάσεις

Γραφική παράσταση:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, y = f(x) επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, αφού υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες που έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική του παράσταση. (Σχ. 7β).

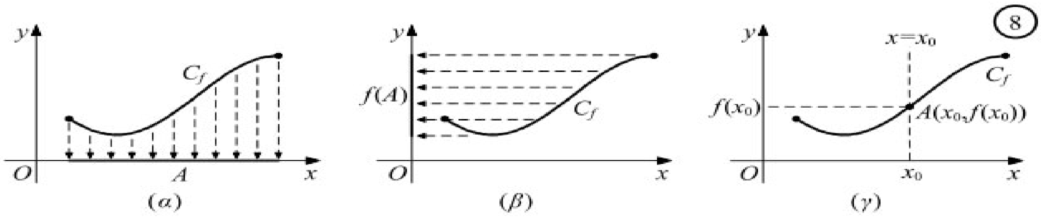


Οταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της C_f.

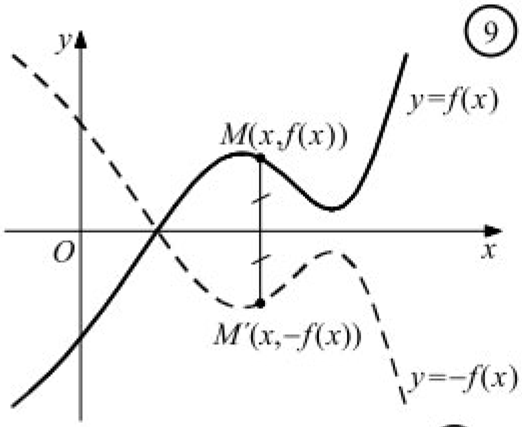
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

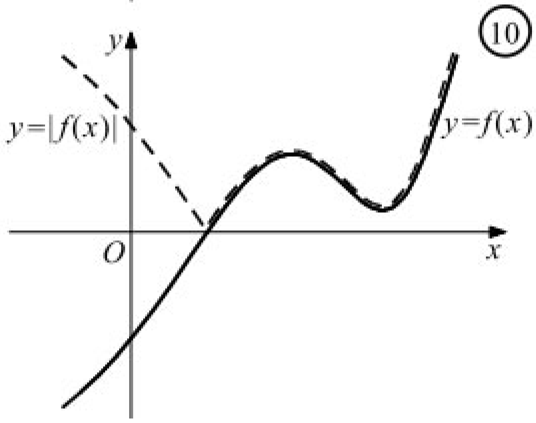


Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f , μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$ όπως στα επόμενα παραδείγματα:

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης - f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία Μ΄(x,$-f$(x)) που είναι συμμετρικά των Μ(x, f(x)), ως προς τον άξονα x΄x. (Σχ. 9).

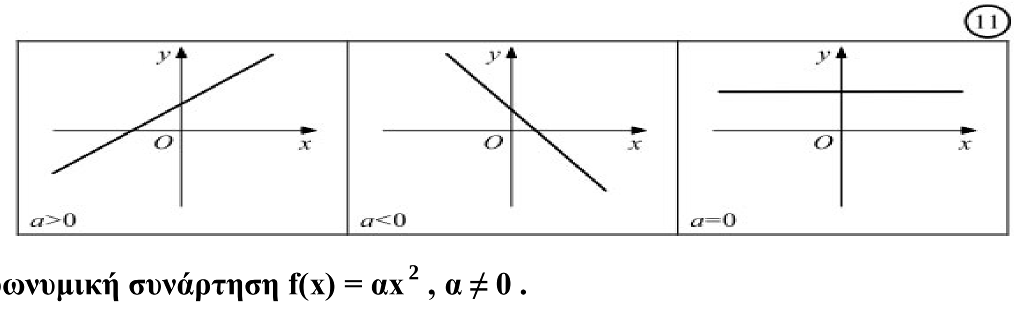


β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).

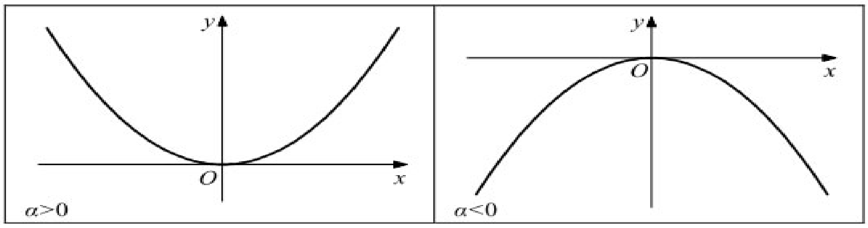


Μερικές βασικές συναρτήσεις

Η πολυωνυμική συνάρτηση f(x) = αx + β

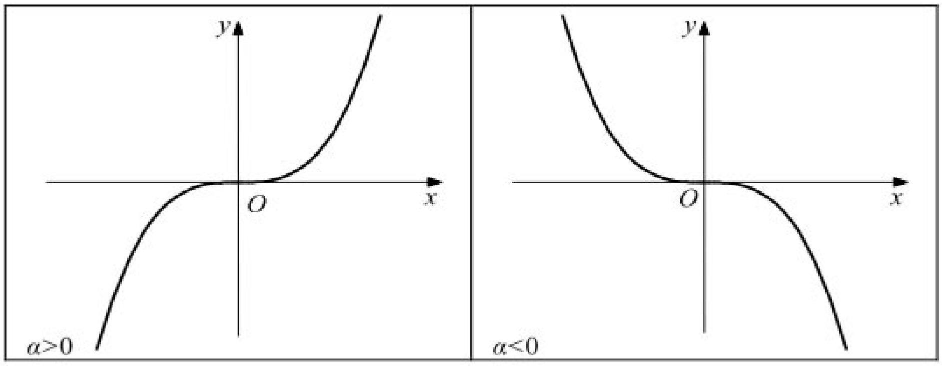


Η πολυωνυμική συνάρτηση f(x) = αx^2 , α ≠ 0 .



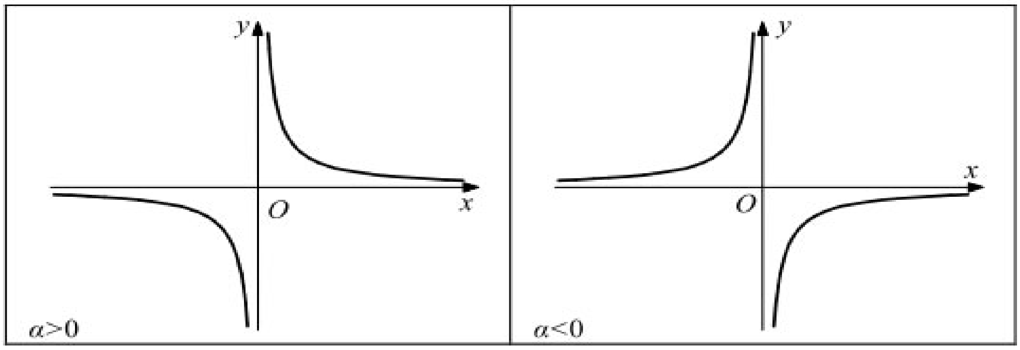
12

Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = αx^3$, $α \neq 0$.



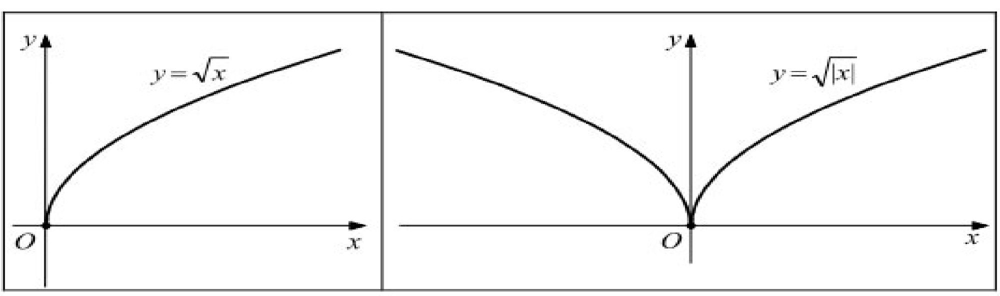
13

Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, **$α \neq 0$.**



14

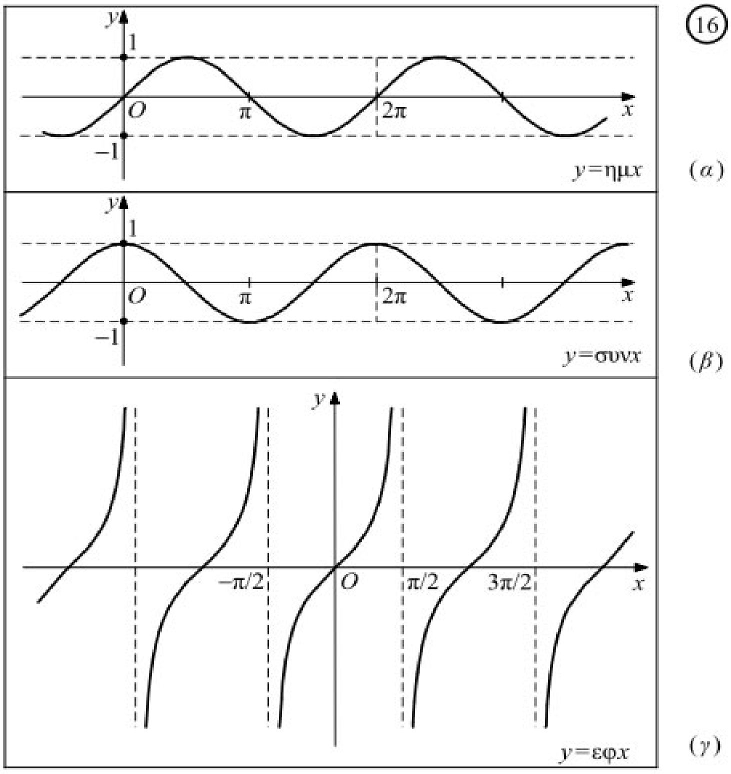
Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ **και** $g(x) = \sqrt{|x|}$ **.**



15

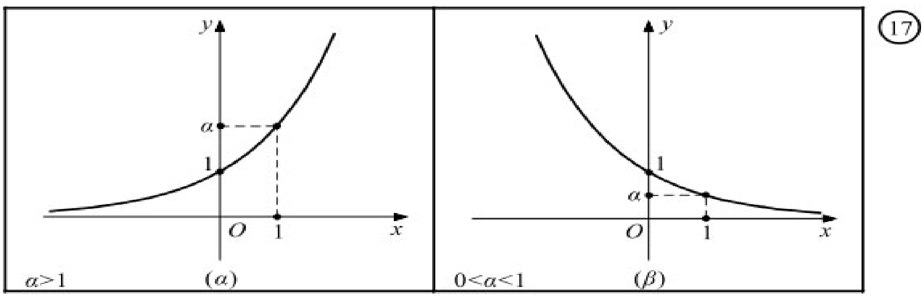
Επειδή $g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & αν\ x<0\\ \sqrt{x}, & αν x\ \geq 0\end{cases}$, η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{|x|}$ αποτελείται απο δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y=|x|$ και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y.

Οι τριγωνικές συναρτήσεις : f(x) = ημx, f(x) = συνx, f(x) = εφx



Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις f (x) = ημx και f (x) = συνx είναι περιοδικές με περίοδο Τ = 2π, ενώ η συνάρτηση f (x) = εφx είναι περιοδική με περίοδο Τ = π.

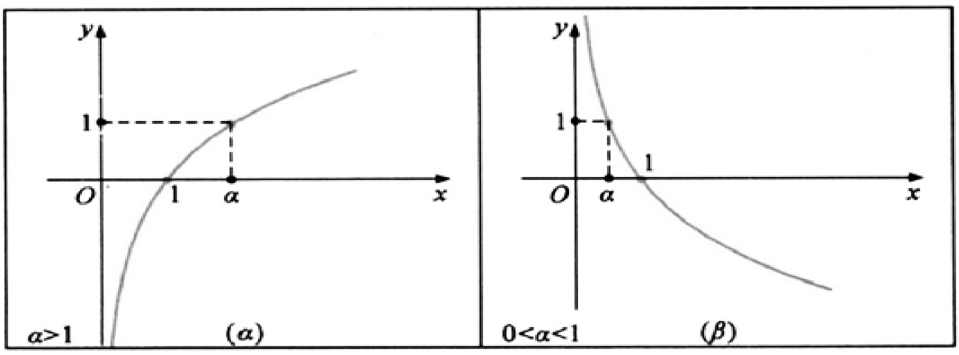
Η εκθετική συνάρτηση f(x) = α ^{x}, 0 < α ≠1 .



Υπενθυμίζουμε ότι:

1	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
	$\left(a \cdot \beta\right)^x = a^x \cdot \beta^y$
2	$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x = \dfrac{a^x}{\beta^x}$
3	$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
4	$\left(a \cdot \beta\right)^x = a^x \cdot \beta^y$
5	$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$
6	$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \ \left(\nu, \mu \in \mathbb{N}, \nu, \mu > 1\right)$
7	$\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu} \ (\nu \in \mathbb{N})$
8	Αν $a > 1$, τότε $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
9	Αν $0 < a < 1$, τότε $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

Η λογαριθμική συνάρτηση f(x) = log$_\alpha$x, 0 < α ≠1 .



18

Υπενθυμίζουμε ότι:

1	$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
2	$\log_a a^x = x$
3	$\log_a a = 1$
4	$\log_a 1 = 0$
5	$\log_a\left(x_1 \cdot x_2\right) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
6	$\log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
7	$\log_a x^\kappa = \kappa \log_a x$
8	$\alpha^x = e^{x\ln a}$
9	Αν $a > 1$, τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$
10	Αν $0 < a < 1$, τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν **ζητείται** να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε:

— Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα x΄x, τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$.

— Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα x΄x, τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$.

— Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **πάνω** από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

— Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **κάτω** από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

— Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, τότε λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Χρήσιμα:

— Αν μία συνάρτηση f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε σημαίνει ότι $f(0) = 0$

— Αν μία συνάρτηση f διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_o)$, τότε σημαίνει ότι $f(x_0) = y_o$

Α. Κατανοώ

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

6/Α. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} + 1$, ii) $f(x) = x|x|$,

iii) $f(x) = \begin{cases} -x+3 , & x < 1 \\ x+1 , & x \geq 1 \end{cases}$ iv) $f(x) = |\ln x|$.

και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

Β. Εμπεδώνω

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία ων συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 2x$ **ii)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ και $g(x) = -\dfrac{1}{2x+2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \ \alpha\nu \ \ -2<x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, \ \alpha\nu \ x>1 \end{cases}$$

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

ii) Με τη βοήθεια του (i) ερωτήματος , να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x}, \ \alpha\nu \ x<-1 \\ -x+2, \ \alpha\nu \ \ -1\leq x\leq 1 \\ \ln\dfrac{1}{x}, \ \alpha\nu \ x>1 \end{cases}$$

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii) Με τη βοήθεια του (i) ερωτήματος , να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

2/Α. Για ποιές τιμές του x ∈ **R** η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, όταν:

i) $f(x)=x^2-4x+3$, ii) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, iii) $f(x)=e^x-1$.

3/Α. Για ποιές τιμές του x ∈ **R** η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:

i) $f(x)=x^3+2x+1$ και $g(x)=x+1$

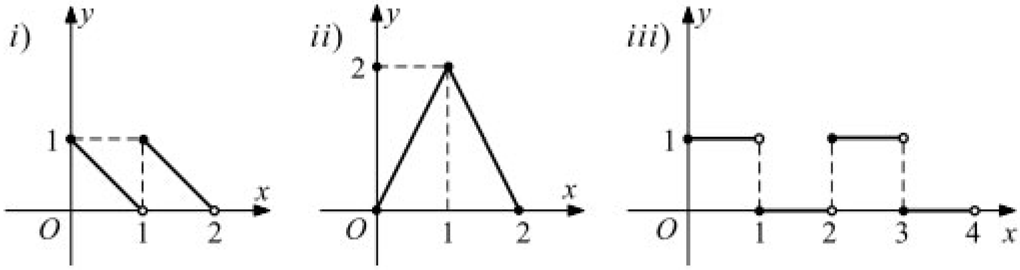
ii) $f(x)=x^3+x-2$ και $g(x)=x^2+x-2$.

5/Β. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x)=\dfrac{|x+1|+|x-1|}{2}$, ii) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

Από τη γραφική παράσταση της f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

1/Β. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι :



ΜΑΘΗΜΑ 4ο
Ισότητα συναρτήσεων-Πράξεις συναρτήσεων

Ισότητα συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1} \text{ και } g(x)=x$$

Παρατηρούμε ότι:

— οι συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο Α = **R** και

— για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$, αφού

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x=g(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

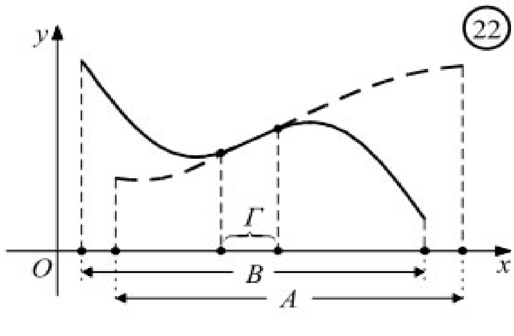
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των Α και Β. Αν για κάθε x ϵ Γ ισχύει $f(x)=g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις **f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ**. (Σχ. 22)



Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $A=\mathbf{R}-\{1\}$ και $B=\mathbf{R}-\{0\}$ αντιστοίχως, είναι ίσες στο σύνολο $\Gamma=\mathbf{R}-\{0,1\}$, αφού για κάθε $x\in\Gamma$ ισχύει $f(x)=g(x)=x+1$.

Παράδειγματα-Ασκήσεις Λυμένες (Άσκηση από το σχολικό βιβλίο)

7/Α. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f\neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

i) $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

ii) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$ και $g(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$

iii) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$

ΛΥΣΗ

i) Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι αντίστοιχα:

$$D_f=\mathbb{R} \text{ και } D_g=[0,+\infty)$$

$$f(x)=\sqrt{x^2}=|x| \text{ και } g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$$

Επομένως $f(x)=g(x)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

ii) Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι αντίστοιχα:

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1,0\} \text{ και } D_g=\mathbb{R}^*$$

Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x} \text{ και } g(x)=1-\frac{1}{|x|}=\frac{|x|-1}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}, & \alpha\nu\ x>0\\[2mm] \dfrac{x+1}{x}, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$$

Επομένως $f(x)=g(x)$, για κάθε $x>0$.

iii) Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι αντίστοιχα:

$$D_f=[0,1)\cup(1,+\infty) \text{ και } D_g=[0,+\infty)$$

Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\sqrt{x}+1$$

Επομένως Επομένως $f(x)=g(x)$, για κάθε $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Πράξεις με συναρτήσεις

Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x-2} \text{ και } g(x)=\sqrt{x-1}$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[2,+\infty)$ και της g το $B=[1,+\infty)$. Στο κοινό πεδίο ορισμού τους $[1,+\infty)$ ορίζουμε τις συναρτήσεις:

Άθροισμα των f,g **:** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}$

Διαφορά των f,g **:** $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}$

Γινόμενο των f,g **:** $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-2)\cdot(x-1)}$

Ειδικά για το **πηλίκο των** f,g ορίζουμε στο κοινό πεδίο ορισμού:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0 \text{ ,δηλαδή } \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}},\ x>1$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ είναι η τομή Α ∩ Β των πεδίων ορισμού Α και Β των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το Α ∩ Β, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή g(x), δηλαδή το σύνολο:

$$\{x\,/\,x\in A \text{ και } x\in B,\ \text{με } g(x)\neq 0\}=\{x\,/\,x\in A\cap B,\ \text{με } g(x)\neq 0\}$$

Παραδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\sqrt{x-1}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g. Έχουμε:

$$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow \left(x\neq 1 \;\kappa\alpha\iota\; x\neq -1\right)$$

Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Ακόμα, $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$, άρα $D_g=[1,+\infty)$

Επομένως για την εύρεση των συναρτήσεων $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$, εργαζόμαστε για κάθε $(1,+\infty)$. Έχουμε:

$$(f+g)(x)=\frac{1}{x^2-1}+\sqrt{x-1}=\frac{1+\left(x^2-1\right)\sqrt{x-1}}{x^2-1},\ x\in(1,+\infty)$$

$$(f-g)(x)=\frac{1}{x^2-1}-\sqrt{x-1}=\frac{1-\left(x^2-1\right)\sqrt{x-1}}{x^2-1},\ x\in(1,+\infty)$$

$$(f\cdot g)(x)=\frac{1}{x^2-1}\cdot\sqrt{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1},\ x\in(1,+\infty)$$

Για τη συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον να είναι $g(x)\neq 0\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$, το οποίο ισχύει αν $x\in(1,+\infty)$. Οπότε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{1}{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x-1}},x\in(1,+\infty)$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \alpha\nu\ x>0\\ -x+2, & \alpha\nu\ x\leq 0\end{cases}\quad \text{και}\quad g(x)=\begin{cases}-x+1, & \alpha\nu\ x\geq 0\\ x, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$.

ΛΥΣΗ

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f,g είναι το $\mathbb{R}=(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$.

Για $x>0$ έχουμε:

$$(f+g)(x)=x+(-x+1)=1$$

$$(f-g)(x)=x-(-x+1)=2x-1$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$(f+g)(x)=(-x+2)+x=2$$
$$(f-g)(x)=(-x+2)-x=-2x+2$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=2,\ g(0)=1$ και άρα:

$$(f+g)(0)=2+1=3 \text{ και } (f-g)(0)=2-1=1$$

Επομένως:

$$(f+g)(x)=\begin{cases}2, & αν\ x<0\\ 1, & αν\ x>0\\ 3, & αν\ x=0\end{cases} \text{ και } \quad (f-g)(x)=\begin{cases}2x-1, & αν\ x>0\\ -2x+2, & αν\ x<0\\ 1, & αν\ x=0\end{cases}$$

Α. Κατανοώ

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

8/Α. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=1+\frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x}{1-x}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$

9/Α. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ και } g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Β. Εμπεδώνω

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & αν\ x>0\\ x-1, & αν x<0\\ 1, & αν\ x=0\end{cases} \text{ και } g(x)=\begin{cases}-x, & αν\ x>0\\ x+1, & αν\ x<0\end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \alpha\nu\ x>1 \\ x^2-1, & \alpha\nu\ x<-1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} -x^2, & \alpha\nu\ x>0 \\ -x^2+1, & \alpha\nu\ x<0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$\left(f+g\right)(x)\cdot\left[\left(f+g\right)(x)-6\right]+25=2g(x)\left[1+f(x)\right], \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων $f,\ g$

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\left[f(x)\right]^5+\left[g(x)\right]^5+\left[f(x)\right]^6+8$$

ΜΑΘΗΜΑ 5ο
Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\sqrt{x-1}$. Η τιμή της φ στο x μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

α) Στο x ∈ **R** αντιστοιχίζουμε τον αριθμό y = x−1 και στη συνέχεια

β) στο y = x−1 αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{y}=\sqrt{x-1}$, εφόσον y = x−1 ≥ 0.

η $g(y)=\sqrt{y}$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο B = [0, +∞) (β΄ φάση).

Έτσι, η τιμή της φ στο x γράφεται τελικά:

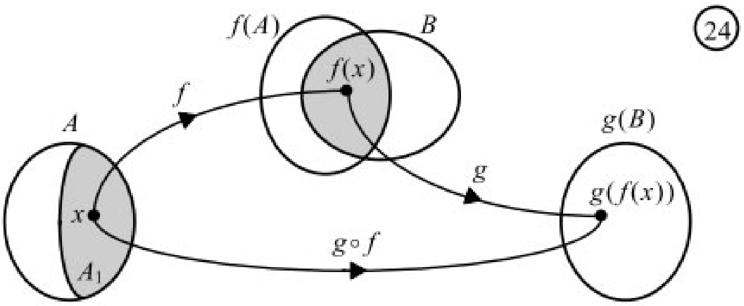
$\varphi(x)=g\left(f(x)\right)$

Η συνάρτηση φ λέγεται σύνθεση της f με την g και συμβολίζεται με gof . Το πεδίο ορισμού της φ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού Α της f , αλλά περιορίζεται στα $x\in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού Β της g , δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=[1,+\infty)$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με **gof**, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x)=g(f(x)) \ .$$



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο :

$$A_1=\{x\in A/\ f(x)\in B\}$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

Ερώτηση: Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της fog ;

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα ή ένωση διαστημάτων.**

ΣΧΟΛΙΑ

● Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $gof \neq fog$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές δ ε ν ε ί ν α ι υ π ο χ ρ ε ω τ ι κ ά ίσες.

● Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho\left(gof\right)$, τότε ορίζεται και η $\left(hog\right)of$ και ισχύει:

$$ho\left(gof\right) = \left(hog\right)of$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g, h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

Παραδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

1. Να προσδιορίσετε τη σύνθεση fog αν:

$$f(x) = e^x - 1 \text{ και } g(x) = \ln(x-1)$$

ΛΥΣΗ

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g είναι αντίστοιχα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \left(1, +\infty\right)$. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog} = \left\{x \in \left(1, +\infty\right) / \, g(x) \in \mathbb{R}\right\} = \left(1, +\infty\right).$$

Για κάθε $x \in \left(1, +\infty\right)$ έχουμε:

$$\left(fog\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\ln(x-1)\right) = e^{\ln(x-1)} - 1 = (x-1) - 1 = x - 2$$

Σημαντική παρατήρηση: Για να βρούμε τη fog (ή τη gof) βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της fog (ή της gof) με $D_{fog} \neq \varnothing$ (ή $D_{gof} \neq \varnothing$) και έπειτα τον τύπο της. Δεν είναι σωστό (και ούτε πάντα το ίδιο) να βρούμε τον τελικό τύπο της fog (ή της gof) και από αυτόν να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού της fog (ή της gof).

2. Να προσδιορίσετε τη σύνθεση fog και την gof αν:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 1 \text{ και } g(x) = x + 2$$

ΛΥΣΗ

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g είναι αντίστοιχα $D_f = [2, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in [2, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} / x + 2 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \sqrt{x+2-2} + 1 = \sqrt{x} + 1$$

Το πεδίο ορισμού της gof είναι:

$$D_{gof} \neq \{x \in [2, +\infty) / f(x) \in \mathbb{R}\} = [2, +\infty)$$

Για κάθε $x \in [2, +\infty)$ έχουμε:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2} + 1) = \sqrt{x-2} + 1 + 2 = \sqrt{x-2} + 3$$

3. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = (0, 2]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x-4)$ **ii)** $f(e^{x-1})$ **iii)** $f(\ln x)$ **iv)** $f(x^2 - 4x + 4)$

ΛΥΣΗ

i) Πρέπει:

$$x-4\in(0,2]\Leftrightarrow 0<x-4\le 2\Leftrightarrow 4<x\le 6$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_1=(4,6]$

ii) Πρέπει:

$$e^{x-1}\in(0,2]\Leftrightarrow 0<e^{x-1}\le 2\Leftrightarrow e^{x-1}\le 2\Leftrightarrow x-1\le \ln 2\Leftrightarrow x\le 1+\ln 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_2=(-\infty,1+\ln 2]$

iii) Πρέπει:

$$\ln x\in(0,2]\Leftrightarrow 0<\ln x\le 2\Leftrightarrow(\ln x>0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \ln x\le 2)\Leftrightarrow\left(x>1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x\le e^2\right)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_3=\left(1,e^2\right]$

iv) Πρέπει:

$$x^2-4x+4\in(0,2]\Leftrightarrow 0<x^2-4x+4\le 2\Leftrightarrow\left(x^2-4x+4>0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x^2-4x+4\le 2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+4>0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x^2-4x+2\le 0\right)\Leftrightarrow\left((x-2)^2>0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x^2-4x+2\le 0\right)\Leftrightarrow$$
$$\left(x\ne 2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x\in\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]\right)=\left[2-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,2+\sqrt{2}\right]$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_4=\left[2-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,2+\sqrt{2}\right]$

Α. Κατανοώ

Άσκηση από το σχολικό βιβλίο:

10/Α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση gof , αν

i) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$, ii) $f(x)=ημx$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

iii) $f(x)=\frac{\pi}{4}$ και $g(x)=εφx$.

11/Α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις gof και fog.

Β. Εμπεδώνω

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο:

7/Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = x + 1 και g(x) = αx + 2. Για ποια τιμή του α ∈ **R** ισχύει

$fog = gof$;

12/Α. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν

i) $f(x)=ημ(x^2+1)$, ii) $f(x)=2ημ^2 3x+1$

iii) $f(x)=\ln(e^{2x}-1)$, iv) $f(x)=ημ^2(3x)$.

Προτεινόμενες:

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$(fof)(x)=2-x \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=1$ **ii)** $f(2-x)=2-f(x)$ **iii)** $f(0)+f(2)=0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$(fof)(x)=3x-2 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=1$ **ii)** $f(x)=\frac{1}{3}\left[2+f(3x-2)\right]$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=e^x-1,\ g(x)=\ln(x-1),\ h(x)=x+1$$

Να βρεθεί η σύνθεση $fogoh$

ΜΑΘΗΜΑ 6ο

Ασκήσεις-Προβλήματα

(Επανάληψη)

Α. Από το σχολικό βιβλίο

6/Β. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

i) $(fog)(x)=x^2+2x+2$, αν $g(x)=x+1$

ii) $(fog)(x)=\sqrt{1+x^2}$, αν $g(x)=-x^2$

iii) $(gof)(x)=|\text{συν}x|$, αν $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

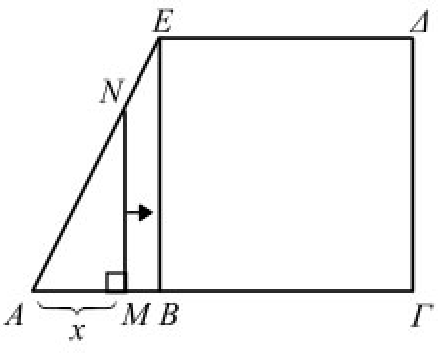
8/Β. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}, \quad \text{με} \quad \beta\neq-\alpha^2 \quad \text{και} \quad g(x)=x-2\sqrt{x}+1.$$

α) $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}-\{\alpha\}$ και

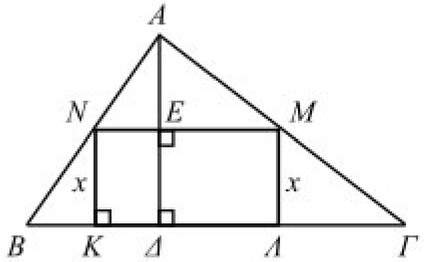
β) $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

3/Β. Στο επόμενο σχήμα είναι ΑΒ = 1, ΑΓ = 3 και ΓΔ =2. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του x = ΑΜ, όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.



2/Β. Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης x cm και όγκο 628 cm^3. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 δρχ. ανά cm^2, ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25 δρχ. ανά cm^2. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του x. Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm, και ύψος 8 cm;

4/Β. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης ΒΓ = 10cm και ύψους ΑΔ = 5cm. Να εκφράσετε το εμβαδό Ε και την περίμετρο Ρ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.



ΕΡΓΑΣΙΑ:

4/Α. Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν οτι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις:

Α(x) = 2,89x + 70,64 (για τους άνδρες)   και Γ(x) = 2,75x + 71,48 (για τις γυναίκες)

όπου x σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του;

β) Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

5/Α. Σύρμα μήκους ℓ = 20cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και (20 − x) cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x.

9/Β. Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός Ρ της πόλης είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2 + x)}$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t+4}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i) Να εκφράσετε τον αριθμό Ν των αυτοκινήτων της πόλης ως συ-νάρτηση του t.

ii) Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα.;

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\ln x-1 \text{ και } g(x)=\frac{1}{e^x-1}$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις fog και gof.

γ) Να βρείτε τα σημείο τομής των συναρτήσεων f και g (αν υπάρχουν).

δ) Να βρείτε τα σημείο τομής των f και g με τους άξονες.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x}$$

α) Να εξετάσετε σε ποιο σύνολο οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

β) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x-1 \text{ και } g(x)=\frac{1}{x-1}$$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις fog και gof.

β) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης fog βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης gof βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων gof, f και g.

4. Δίνεναι η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y), \text{ για κάθε } x,y>0$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=0$ **ii)** $f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right),\ x>0$ **iii)** $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y),\ x,y>0$

5. Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,\ +\infty)$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)\text{ , για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(-1)=1$ **ii)** Η f είναι άρτια

Διαγώνισμα στην ενότητα 1

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

Α1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(Μονάδες 8)

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(Μονάδες 7)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά ίσες

2. Ισχύει: $ho(fog)=(hof)og$

3. Αν A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και B το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της $g\cdot f$ είναι $A\cap B$.

4. Αν δύο συναρτήσεις f,g έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα A και B με $A\subseteq B$, τότε το πεδίο ορισμού της $f+g$ είναι το B.

5. Αν δύο συναρτήσεις f,g έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα A και B, τότε το πεδίο ορισμού της $\dfrac{f}{g}$ είναι πάντα το $A\cap B$.

(Μονάδες 5Χ3=15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)+1} \text{ και } g(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f,g

(Μονάδες 12)

Β. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\dfrac{f}{g}$

(Μονάδες 10)

Γ. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και gof

(Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x}$$

Α. Να εξετάσετε σε ποιο σύνολο οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

Β. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 12)

Γ. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

Η συνέχεια των μαθημάτων μετά....................