ΘΕΩΡΙΑ-ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Α.Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου-Αποδείξεις προτάσεων

Α.1 Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Στις παρακάτω προτάσεις να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για κάθε $a,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $(\alpha = \beta$ και γ=δ$) \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$

2. Για κάθε $a,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

3. Για κάθε $a,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$

4. Για κάθε $a,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

5. Αν $a \in \mathbb{R}$ και κ,λ ακέραιοι αριθμοί, τότε ισχύει ότι: $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$

6. Για κάθε $a,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$

7. Για κάθε $a,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$

8. Για κάθε $a,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

9. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο, όταν $\alpha = 0$

10. Ισχύει ότι: $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$ ($\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$)

11. Για κάθε $a,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

12. Αν $a,\beta \in \mathbb{R}$ και $\gamma < 0$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

13. Για όλους τους αριθμούς $a,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$(\alpha > \beta$ *και* γ>δ$) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

14. Για τους θετικούς αριθμούς a,β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$

15. Για τους θετικούς αριθμούς a,β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$

16. Αν $x \geq a$, τότε γράφουμε και $x \in [a,\infty)$

17. Αν $a \leq x \leq \beta$, τότε γράφουμε και $x \in [\alpha,\beta)$

18. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε $|\alpha| = \alpha$

19. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε $|\alpha|^2 = \alpha^2$

20. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \leq -\alpha$

21. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε $|\alpha| = |-\alpha|$

22. Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$

23. Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$

24. Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

25. Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha\beta > 0$ ισχύει: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

26. Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει: $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$

27. Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει: $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x < x_0 - \rho$ ή $x > x_0 + \rho$

28. Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε το μήκος (ΑΒ) είναι: $(AB) = d(a, \beta) = |\alpha - \beta|$

29. Για κάθε $\alpha \geq 0$, ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

30. Για κάθε $\alpha, \beta > 0$, ισχύει : $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

31. Για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει: $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$

32. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

33. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και μ,ν οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι, τότε $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha}$

34. Αν $\alpha > 0$, μ και ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε: $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$

Α.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής επιλογής

*Στις παρακάτω προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

1. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε:

Α. $\alpha\gamma > \beta\gamma$ ***Β.*** $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ ***Γ.*** $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ ***Δ.*** Τίποτα από τα προηγούμενα

2. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε:

Α. $\alpha^2 > \beta^2$ ***Β.*** $\alpha^2 < \beta^2$ ***Γ.*** $\alpha^2 = \beta^2$ ***Δ.*** Τίποτα από τα προηγούμενα

3. Αν $x \in [-1, 5]$, τότε:

Α. $x \geq -1$ ***Β.*** $x \leq 5$ ***Γ.*** $-1 \leq x \leq 5$ ***Δ.*** $-1 < x < 5$

4. Αν $x \in \mathbb{R}$ και θ θετικός αριθμός και $|x| = \theta$, τότε:

Α. μόνο $x = \theta$ ***Β***. μόνο $x = -\theta$ ***Γ***. $x = \theta$ ή $x = -\theta$ ***Δ***. Τίποτα από τα προηγούμενα

5. Αν $x, a \in \mathbb{R}$ με $|x| = |a|$, τότε:

Α. μόνο $x = \alpha$ ***Β***. μόνο $x = -\alpha$ ***Γ***. $x^2 = a^2$ ***Δ***. Τίποτα από τα προηγούμενα

6. Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ και ισχύει: $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, τότε:

Α. $|x - x_0| > \rho$ ***Β***. $|x - x_0| < \rho$ ***Γ***. $|x - x_0| = \rho$ ***Δ***. Τίποτα από τα προηγούμενα

7. Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ και ισχύει: $x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, \infty)$, τότε:

Α. $|x - x_0| > \rho$ ***Β***. $|x - x_0| < \rho$ ***Γ***. $|x - x_0| = \rho$ ***Δ***. Τίποτα από τα προηγούμενα

8. Αν $a \le 0$ και ν άρτιος, τότε:

Α. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$ ***Β***. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = -|\alpha|$ ***Γ***. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha^\nu$ ***Δ***. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

9. Αν $\alpha, \beta \ge 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$ είναι ίση με :

Α. $\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ ***Β***. $\sqrt[\nu+\mu]{\alpha}$ ***Γ***. $\sqrt[\nu-\mu]{\alpha}$ ***Δ***. $\sqrt[\frac{\nu}{\mu}]{\alpha}$

10. Αν $\alpha \ge 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$:

Α. $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$ ***Β***. $\alpha^{\mu-\nu}$ ***Γ***. $(\alpha^\mu)^\nu$ ***Δ***. $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Α.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

*Στις παρακάτω ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α **με ένα μόνο** στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν αληθείς ή ισοδύναμες σχέσεις ή προτάσεις. Στην στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

1.

ΣΤΗΛΗ Α (ανίσωση)	**ΣΤΗΛΗ Β (διάστημα)**
1. $x \ge a$	α. $x \in (-\infty, a)$
2. $x < a$	β. $x \in [a, \beta)$
3. $a \le x < \beta$	γ. $x \in [a, \infty)$
	δ. $x \in [a, \beta]$

2.

ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $|x| = \theta$ $(\theta > 0)$	α. Αδύνατη
2. $|x| = |\alpha|$	β. $x = -\kappa$
3. $|x| = \kappa$ $(\kappa < 0)$	γ. $x = a$ ή $x = -a$
	δ. $x = \theta$ ή $x = -\theta$

3.

ΣΤΗΛΗ Α (σχέση με απόλυτες τιμές)	**ΣΤΗΛΗ Β (σχέση με απόσταση)**
1. $\|x-2\|\geq 3$	α $d(x,-3)\leq 2$
2. $\|x+2\|\geq 3$	β. $d(x,3)\leq 2$
3. $\|x-3\|\leq 2$	γ. $d(x,-2)\geq 3$
	δ. $d(x,2)\geq 3$

4.

ΣΤΗΛΗ Α ($\alpha,\beta>0$)	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$	α. $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$
2. $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$	β. $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
3. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$	γ. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
	δ. $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$

5.

ΣΤΗΛΗ Α ($\alpha,\beta>0$)	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $\sqrt{\alpha^2\beta}$	α. $\beta\sqrt{\alpha}$
2. $\sqrt{\beta^2\alpha}$	β. $\sqrt{\alpha\beta}$
3. $\sqrt{\alpha^2\beta^2}$	γ. $\alpha\beta$
	δ. $\alpha\sqrt{\beta}$

Β- Αποδείξεις προτάσεων και ιδιοτήτων

Εδώ παρατίθενται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων και των ιδιοτήτων του 2ου Κεφαλαίου που βρίσκονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα» της Α΄Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2ο μέρος του 1ου θέματος (το Α2) στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις. Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

1. Να αποδείξετε ότι: Για θετικούς αριθμούς α,β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$

Απόδειξη

Έστω $\alpha=\beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει ότι $\alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$.

Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι $\alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$ και $\alpha\neq\beta$. Τότε:

- αν ήταν $\alpha>\beta$, λόγω της γνωστής ιδιότητας, θα είχαμε $\alpha^{\nu}>\beta^{\nu}$ (άτοπο),ενώ
- αν ήταν $\alpha<\beta$, λόγω της γνωστής ιδιότητας, θα είχαμε $\alpha^{\nu}<\beta^{\nu}$ (άτοπο),

Άρα, $\alpha=\beta$

2. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά :

$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta| \Leftrightarrow |\alpha\cdot\beta|^2=\left(|\alpha|\cdot|\beta|\right)^2 \Leftrightarrow |\alpha\cdot\beta|^2=|\alpha|^2\cdot|\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha\cdot\beta)^2=\alpha^2\cdot\beta^2$, που ισχύει.

3. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ ($\beta\neq 0$) είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε

διαδοχικά:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow \left(\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$, που ισχύει .

4. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2$$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|$, που ισχύει.

(Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν)

5. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

Απόδειξη

Έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^\nu \Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu \cdot (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$

, που ισχύει.

6. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Απόδειξη

Έχουμε: $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^\nu \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu}{(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu} = \dfrac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$),που ισχύει .

(Η απόδειξη αυτή δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Ωστόσο αναφέρεται ότι γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως η πρόταση 4) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

Από την Τράπεζα θεμάτων του Υπυργείου ΠΑΙ.Θ. (Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 38 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Β1

Δίνεται η παράσταση: $K = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση Κ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση Κ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1,41$

$\sqrt{3} \cong 1,73$

$\sqrt{5} \cong 2,24$

$\sqrt{7} \cong 2,64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20},\ \sqrt{45},\ \sqrt{80}$

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β3

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: $(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2+y^2-2x+6y+10$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β4

α) Αν $a<0$, να αποδειχθεί ότι: $a+\dfrac{1}{a} \le -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $a<0$, να αποδειχθεί ότι: $|a|+\left|\frac{1}{a}\right|\geq 2$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β5

Αν $2\leq x\leq 3$ και $1\leq y\leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς απ τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$

(Μονάδες 5)

β) $2x-3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β6

α) Αν $\alpha,\beta\neq 0$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2$ (1)

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β7

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7$ και $2\leq y\leq 3$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β8

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3\leq x\leq 5$ και $-2\leq y\leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y-x$

(Μονάδες 12)

β) x^2+y^2

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β9

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός .

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

(Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B;

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\leq 2$, ισχύει $A=B$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β10

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $A,\ B$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β11

Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν: $2\leq\alpha\leq 4$ και $-4\leq\beta\leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha-2\beta$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha^2-2\alpha\beta$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β12

Αν είναι $\mathrm{A}=2-\sqrt{3}$, $\mathrm{B}=2+\sqrt{3}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β13

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2a^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β14

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{a^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \dfrac{a^{22}(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}}$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β15

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β16

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β17

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$

(Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β18

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β19

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2(10-\sqrt{5})$ ·

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β20

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β21

Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β22

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt[3]{2}$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β23

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=(\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma=(\sqrt[6]{6})^6$.

α) Να δείξετε ότι $A+B+\Gamma=23$

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β24

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$

(Μονάδες 12)

β)να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες13)

ΘΕΜΑ Β25

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x,y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$.

(Μονάδες 12)

β) $0<A<4$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β26

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β27

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$

(Μονάδες 12)

β) $(a + \dfrac{4}{a}) \cdot (\beta + \dfrac{4}{\beta}) \geq 16$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β28

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των a, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β29

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y - 3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β30

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y - 3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου .

ΘΕΜΑ Β31

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$.ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β32

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β33

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β34

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$

(Μονάδες 13)

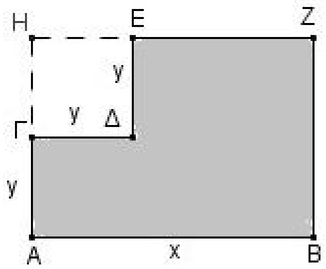
β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β35

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β36

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \le x < 3$, να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$, ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β37

Δίνεται η παράσταση: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β38

Αν 0 < α < 1, τότε :

α) να αποδείξετε ότι: $a^3 < a$

(Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0,\ a^3,\ 1,\ a,\ \dfrac{1}{a}$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ

Περιλαμβάνονται 12 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Γ1

Δίνεται η παράσταση: $A=[(x^3y^5)^{-1}\cdot(x^2y^3)^5]:(\dfrac{x^3}{y^{-2}})$ με $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A=(xy^2)^4$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α, όταν $x=32$ και $y=\dfrac{1}{16}$

(Μονάδες 8)

γ) Αν $x\geq 0$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt[12]{A}=(xy^2)^{\frac{1}{3}}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ2

α) Να αποδείξετε ότι: $\left[\dfrac{x(x+1)}{2}\right]^2-\left[\dfrac{x(x-1)}{2}\right]^2=x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $1+2^3+3^3+...+\nu^3=\dfrac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$

ΘΕΜΑ Γ3

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς μ,ν ισχύει $\mu^2+\nu^2=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $|\mu|\leq 1$ και $|\nu|\leq 1$

β) $|\mu\nu|\leq\dfrac{1}{2}$

γ) $\dfrac{1}{2}\leq\mu^4+\nu^4\leq 1$

ΘΕΜΑ Γ4

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=\sqrt{2x^2-4x+2}$ και $\Lambda=\sqrt[3]{3x^3-9x^2+9x-3}$

α) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις K και Λ ;

(Μονάδες 12)

β) Να γράψετε τις παραστάσεις K,Λ χωρίς τα ριζικά.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το $x\in\mathbb{R}$, αν ισχύει $K-|\Lambda|=2\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ5

Έστω οι αριθμοί Κ και Μ τέτοιοι ώστε: $K=|P(A)-1|$ και $M=|P^2(B)-2P(B)+3|$, όπου $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις K και M .

(Μονάδες 10)

β) Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ισοπίθανα, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η παράσταση K^2-M είναι ανεξάρτητη των $P(A)$ και $P(B)$

(Μονάδες 7)

ii) Αν, επιπλέον, τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα και $K=\dfrac{1}{2}$, $M=\dfrac{9}{4}$, να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο $A\cup B$ είναι βέβαιο .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ6

Δίνεται η παράσταση: $A(x)=\dfrac{|x+2|-|x-2|}{|x+2|+|x-2|}$

α) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση $A(x)$;

(Μονάδες 6)

β) Αν $|x|<2$, να αποδείξετε ότι $A(x)=\dfrac{x}{2}$

(Μονάδες 6)

γ) Αν $|x|>2$, να αποδείξετε ότι $A(x)=\dfrac{2}{x}$

(Μονάδες 8)

δ) Ποια είναι η τιμή της παράστασης $A(x)$ αν $|x|=2$;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ7

Δίνονται οι αριθμοί: $\kappa=\sqrt{2}+1$, $\lambda=\sqrt{2}-1$ και η παράσταση $A=(\sqrt[3]{\kappa}-\sqrt[3]{\lambda})^3$. Να αποδείξετε ότι:

α) i) $\sqrt[3]{(\kappa\lambda)^2}=1$

ii) $\sqrt[3]{\kappa^2\lambda}=\sqrt[3]{\kappa}$

iii) $\sqrt[3]{\kappa\lambda^2}=\sqrt[3]{\lambda}$

(Μονάδες 3x6=18)

β) $A=2-3(\sqrt[3]{\kappa}-\sqrt[3]{\lambda})$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ8

Δίνονται οι αριθμοί $x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ και $y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A=(x-y)^2$

(Μονάδες 10)

β) $B=(x+y)^3$

(Μονάδες 7)

γ) $\Gamma=x^3+y^3$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ9

Έστω οι αριθμοί x,y τέτοιοι , ώστε $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$ και $y\in(-2,0)\cup(0,\dfrac{1}{3})$.

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $A=2x^2+3y+1$

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $B=\dfrac{y-1+\sqrt{(3y-1)^2}}{2y}$ είναι ανεξάρτητη του y.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ είναι ανεξάρτητη του x

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ10

α) Αν $x,y,z>0$ με $x<y+z$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{x+z}{y+z}<\dfrac{2(x+z)}{x+y+z}$

(Μονάδες 10)

β) Αν οι αριθμοί a,β,γ εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a+\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<4$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ11

Αν για τους πραγματικούς θετικούς αριθμούς x,y,z ισχύει: $xy+yz+zx=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $x^2+1=(x+y)(x+z)$

(Μονάδες 10)

β) $K=x\sqrt{\dfrac{(y^2+1)(z^2+1)}{x^2+1}}+y\sqrt{\dfrac{(x^2+1)(z^2+1)}{y^2+1}}+z\sqrt{\dfrac{(x^2+1)(y^2+1)}{(z^2+1)}}=2$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ12

Δίνονται οι αριθμοί: $\kappa=P(A)+\dfrac{1}{2}$, $\lambda=P(B)+\dfrac{1}{2}$ και $\mu=P(A\cup B)-\dfrac{1}{2}$ με $\kappa^2+\lambda^2-\mu=[P(A)]^2+[P(B)]^2+\dfrac{14}{13}$ (1) και $\left|\kappa+\lambda-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{1}{3}$ (2), όπου $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i) $A\cap B$

(Μονάδες 15)

ii) $A'\cap B'$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Από την Τράπεζα θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 7 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Δ1

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(a-1)(1-\beta)>0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β .

(Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|a-1|+|1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ2

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\le 9$

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

(Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$|x+4|+|x-14|=18$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ3

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

(Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$

(Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$|x+2|+|x-7|$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ4

Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ5

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ6

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

• $|\alpha-2|<1$

•$|\beta - 3| \le 2$

α) Να αποδειχθεί ότι: $1 < \alpha < 3$.

(Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ7

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασία από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίουσε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^{o} C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^{o} F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2:Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^{o} C) σε βαθμούς Κέλβιν (^{o} K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^{o} C) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (0K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (1^o F) είναι η: $K = \frac{F - 32}{1,8} + 273$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278^o K μέχρι 283^o K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^{o} F.

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τους θετικούς αριθμούς a,β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$

Μονάδες 2

β) Αν $a,\beta \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$

Μονάδες 2

γ) Για τους αριθμούς $a,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή: $(\alpha > \beta \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Μονάδες 2

δ) Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει: $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x < x_0 - \rho$ ή $x > x_0 + \rho$

Μονάδες 2

ε) Αν $\alpha < 0$ και ν άρτιος, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$

Μονάδες 2

Α2. Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$ και $\Lambda = \sqrt[3]{3x^3 - 9x^2 + 9x - 3}$

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις K και Λ;

Μονάδες 12

β) Να γράψετε τις παραστάσεις K, Λ χωρίς τα ριζικά.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$, αν ισχύει $K - |\Lambda| = 4 - 2\sqrt[3]{3}$

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

Μονάδες 10

β) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α,β,γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ ισχύει : $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

Μονάδες 2

β) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Μονάδες 2

γ) Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε το μήκος (ΑΒ) είναι: $(AB) = d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|$

*Στις παρακάτω ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α **με ένα μόνο** στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στην στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

δ)

ΣΤΗΛΗ Α(σχέση με απόλυτες τιμές)	ΣΤΗΛΗ Β (σχέση με απόσταση)
1. $\|x-2\| \geq 3$	α $d(x,-3) \leq 2$
2. $\|x+2\| \geq 3$	β. $d(x,3) \leq 2$
3. $\|x-3\| \leq 2$	γ. $d(x,-2) \geq 3$
	δ. $d(x,2) \geq 3$

Μονάδες 2

ε)

ΣΤΗΛΗ Α ($\alpha, \beta > 0$)	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$	α. $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$
2. $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$	β. $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
3. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$	γ. $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$
	δ. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$

Μονάδες 2

Α2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

Μονάδες 15

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Αν 0 < α < 1, τότε :

α) να αποδείξετε ότι: $a^3 < a$

Μονάδες 13

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 0, a^3, 1, a, $\frac{1}{a}$

Μονάδες 12

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Έστω οι αριθμοί Κ και Μ τέτοιοι ώστε: $K = |P(A) - 1|$ και $M = |P^2(B) - 2P(B) + 3|$, όπου $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω .

α) Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις K και M .

Μονάδες 10

β) Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ισοπίθανα , τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $K^2 - \Lambda$ είναι ανεξάρτητη των $P(A)$ και $P(B)$

Μονάδες

ii) Αν, επιπλέον, τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα και $K = \frac{1}{2}$, $M = \frac{9}{4}$, να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο $A \cup B$ είναι βέβαιο .

Μονάδες 8

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα με $-2 < x < 7$

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

Μονάδες 4

ii) $|x-7|$

Μονάδες 4

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$|x+2| + |x-7|$

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά.

Μονάδες 5

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Μονάδες 7