

Η γραμμική συνάρτηση στα Μαθηματικά και στη Φυσική από το Γυμνάσιο μέχρι την Άλγεβρα και την Κινηματική της Α΄ Λυκείου

Κώστας Μαλλιάρης¹ και Θεοχαρώ Ε. Ματζαβίνου²

¹ 1^ο ΓΕΛ Ρόδου – Βενετόκλειο, kmath1967@gmail.com

² ΓΕ.Λ. Αφάντου, matzavinou@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή ερευνήθηκαν οι στοχεύσεις και το περιεχόμενο των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (Α.Π.Σ.) Φυσικής και Μαθηματικών ως προς τις έννοιες των γραμμικών συναρτήσεων σε όλες τις τάξεις του γυμνασίου και της Α΄ λυκείου καθώς και ο τρόπος που προσεγγίζονται οι έννοιες των συναρτήσεων στις δραστηριότητες των Σχολικών Εγχειριδίων των αντίστοιχων τάξεων, με στόχο την ανάδειξη ασυνεχειών και ασυμβατοτήτων που δύναται να δυσχεραίνουν τους μαθητές στην επίλυση των προβλημάτων της κινηματικής της Φυσικής Α΄ λυκείου λόγω ανεπαρκούς ανάπτυξης πολλαπλών αναπαραστάσεων των γραμμικών συναρτήσεων. Από την έρευνα εντοπίστηκαν αδυναμίες του συστήματος οι οποίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με προσεκτικό και παράλληλο σχεδιασμό των δυο Α.Π.Σ. αναφορικά με τις συναρτήσεις, αλλά και με αντίστοιχη στόχευση των Σχολικών Εγχειριδίων, ώστε να δημιουργηθούν ευνοϊκότερες συνθήκες προσαρμογής και ανάπτυξης των αντίστοιχων δεξιοτήτων των μαθητών.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: γραμμικές συναρτήσεις, ευθύγραμμες κινήσεις, διαγράμματα, κινηματική

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της συνάρτησης και ειδικότερα της γραμμικής συνάρτησης παρουσιάζεται με ποικίλους τρόπους στα μαθηματικά και στη φυσική του σχολείου, οι οποίοι προφανώς συνδέονται μεταξύ τους. Η συνάρτηση είναι σύνθετη έννοια που συνδυάζει διάφορα μαθηματικά αντικείμενα και πολύπλοκες δομές που αλληλοσυμπληρώνονται για την τελική συγκρότηση της έννοιας γεγονός που δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση εννοιών και επίλυση προβλημάτων. Οι δυσκολίες σχετίζονται με την πολυπλοκότητα της έννοιας, με τις αλγοριθμικές δεξιότητες που πρέπει να κατέχουν οι μαθητές για τη χρήση της αλλά και τον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές τη συνάρτηση, δηλαδή, περισσότερο ως διαδικασία παρά ως αντικείμενο – ολότητα (Ορφανός, 2010).

Γενικότερα, η επίλυση ποσοτικών προβλημάτων φυσικής με τη χρήση μαθηματικών δυσχεραίνεται από την έλλειψη επαρκώς ανεπτυγμένων εσωτερικών αναπαραστάσεων και τον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο προσεγγίζονται οι συναρτήσεις στη φυσική (Rebello, Cui, Bennett, Zollman & Ozimek, 2007).

Σκοπός της εργασίας είναι να διερευνηθεί ο βαθμός στον οποίο η διάρθρωση των στοχεύσεων και του περιεχόμενου των Α.Π.Σ. καθώς και το είδος και το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων των Σχολικών Εγχειριδίων των Μαθηματικών και της Φυσικής του γυμνασίου και της Α΄ λυκείου είναι τέτοια ώστε να ευνοείται η ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων των γραμμικών συναρτήσεων και κατά συνέπεια να μην υπάρχουν εμπόδια στους μαθητές στην επίλυση των προβλημάτων κινηματικής της Φυσικής Α΄ λυκείου λόγω ανεπάρκειας χειρισμού των γραμμικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, επιχειρούμε να απαντήσουμε στα ερευνητικά ερωτήματα: Συμβαδίζουν τα Α.Π.Σ. των Μαθηματικών και της Φυσικής του γυμνασίου και της Α΄ λυκείου: α) ως προς το περιεχόμενο και τους στόχους και β) ως προς τη χρονική παράθεση ανά τάξη για την κατάκτηση και εφαρμογή των εννοιών των γραμμικών συναρτήσεων; Ποιο είναι το εύρος των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούν πλαισιωμένη διατύπωση και ποιες μορφές αναπαράστασης καθώς και ποια είδη μετάφρασης των γραμμικών συναρτήσεων χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες των Σχολικών Εγχειριδίων;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η συγκρότηση μιας μαθηματικής έννοιας γίνεται με την συσχέτιση της με τις αντίστοιχες γλωσσικές διατυπώσεις και παράλληλα με την αντιστοίχιση αυτών στα νοητικά ή υλικά αντικείμενα αναφοράς τους (Χασάπης, 2000). Επειδή, στον προσδιορισμό μιας μαθηματικής έννοιας παίζουν ρόλο οι διαστάσεις των σχέσεων της με τις αναπαραστάσεις της, τα νοητικά σχήματα που την προσεγγίζουν, τα αντιληπτικά πεδία στα οποία αναφέρεται και το ανθρωπολογικό πλαίσιο που συγκροτούν τα υποκείμενα και οι δομές που την επισημοποιούν και την ονομάζουν (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015), η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της στοχεύει στην προώθηση, στην ενίσχυση και στη βαθιά κατανόηση της (Γραββάνη, 2006).

Η έννοια της συνάρτησης (Eisenberg, 1992) αποτελεί βασική έννοια προς μάθηση στα μαθηματικά. Ορισμένοι ερευνητές (Thompson, 1994; Slavit, 1997; Carlson et al. 2002; Artigue & Lagrange, 2009; Lagrange, 2013, όπως αναφέρεται από Καφετζόπουλος, 2014) έχουν την τάση να δίνουν νόημα στη συνάρτηση όχι μόνο σαν διαδικασία αντιστοίχισης αλλά και ως συμμεταβολή. Άλλοι πάλι ερευνητές προσεγγίζουν τη συνάρτηση ως διαδικασία ή ως ολότητα – αντικείμενο. Συγκεκριμένα, η συμβολική αναπαράσταση εξυπηρετεί την προσέγγιση της συνάρτησης ως διαδικασία, ενώ η γραφική παράσταση εξυπηρετεί την προσέγγιση της συνάρτησης ως αντικείμενο (Schwartz & Yerushalmy, 1992). Ωστόσο, αυτή η διττή φύση της συνάρτησης είναι που δυσχεραίνει την κατανόηση της (Sfard, 1991). Πράγματι, η ικανότητα μετάβασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο είναι ενδεικτική της κατανόησης της. Σύμφωνα με τον Hitt (1998), όπως αναφέρουν οι Γραββάνη (2006) και Καρύδας, (2008) μπορούμε

να διακρίνουμε πέντε επίπεδα σχετικά με την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης, όπου στο χαμηλότερο επίπεδο κατανόησης τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια, ενώ καθώς αυξάνεται ο βαθμός κατανόησης, τα υποκείμενα είναι σε θέση να μεταβαίνουν από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, μέχρι να έχουν την ικανότητα να συνδυάζουν διάφορες αναπαραστάσεις, σε διαφορετικά πλαίσια αναφοράς και να επιλύουν ένα πρόβλημα.

Στο χώρο των φυσικών επιστημών η επαρκής γνώση των μαθηματικών είναι ένα μόνιμο θέμα, αφού οι ικανότητες των μαθητών στα μαθηματικά και συγκεκριμένα η μετάβαση από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη αποτελούν έναν εξαιρετικό δείκτη πρόβλεψης της επιτυχίας τους στην φυσική (Kohl, 2001). Συνήθως, θεωρείται προφανές ότι οι βασικές μαθηματικές έννοιες είναι γνωστές και κατανοητές στους μαθητές. Ωστόσο, η έλλειψη συντονισμού μεταξύ των Α.Π.Σ. φυσικής και μαθηματικών είναι ένας από τους κύριους λόγους δυσκολιών εφαρμογής των μαθηματικών στη φυσική (Michelsen, 2005), αφού οι εσωτερικές αναπαραστάσεις που αφορούν επίλυση ποσοτικών προβλημάτων φυσικής με χρήση μαθηματικών είναι ανεπαρκείς, με αποτέλεσμα οι μαθητές να χρησιμοποιούν ασύμβατες μαθηματικές στρατηγικές, (Rebello, Cui, Bennett, Zollman & Ozimek, 2007) αδυνατώντας, έτσι, να εφαρμόσουν τη γνώση σε νέο πλαίσιο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Η έρευνα διαρθρώνεται σε δυο άξονες. Στον πρώτο άξονα διερευνήθηκε κατά πόσο συμβαδίζουν τα Α.Π.Σ. των Μαθηματικών και της Φυσικής του γυμνασίου και της Α΄ λυκείου: α) ως προς το περιεχόμενο και τους στόχους και β) ως προς τη χρονική παράθεση ανά τάξη για την κατάκτηση και εφαρμογή των εννοιών των γραμμικών συναρτήσεων. Στο δεύτερο άξονα έγινε μελέτη των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων και διερευνήθηκε το εύρος των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούν πλασιωμένα διατύπωση, οι μορφές αναπαράστασης, τα είδη μετάφρασης των γραμμικών συναρτήσεων από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη και συγκεκριμένες έννοιες των γραμμικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες των Σχολικών Εγχειριδίων. Το εμπειρικό υλικό της έρευνας ήταν τα ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ του παιδαγωγικού ινστιτούτου (ΔΕΠΠΣ, 2015), οι Οδηγίες για τη Διδασκαλία των Θετικών Μαθημάτων (2016), τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών (Βανδουλάκης κ.α., 2007; Βλάμος κ.α., 2007; Αργυράκης κ.α., 2007; Ανδρεαδάκης κ.α., 1991) και της φυσικής (Καλκάνης κ.α., 2013; Αντωνίου κ.α., 2013α; Αντωνίου κ.α., 2007α; Αντωνίου κ.α., 2013β; Αντωνίου κ.α., 2007β; Βλάχος κ.α., 2014) του γυμνασίου και του λυκείου.

Ανάλυση Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών

Στα μαθηματικά της Α΄ γυμνασίου οι μαθητές διδάσκονται στο 6^ο κεφάλαιο δεξιότητες σχετικά με: την παράσταση σημείων στο επίπεδο, τα ανάλογα ποσά, τη γραφική αναπαράσταση της σχέσης αναλογίας, προβλήματα αναλογιών. Το κεφάλαιο διδάσκεται περί τον Ιανουάριο.

Στη φυσική της Α΄ γυμνασίου σε διάφορα κεφάλαια (3^ο, 5^ο, 6^ο, 9^ο) οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν διαγράμματα ανάλογων ποσών, γραμμικών και σταθερών συναρτήσεων από πειραματικές μετρήσεις και να ερμηνεύσουν τις γραφικές παραστάσεις εξάγοντας συμπεράσματα για τη συμμεταβολή των μεγεθών. Τα κεφάλαια αυτά διδάσκονται από το Νοέμβριο μέχρι τον Ιανουάριο, ενώ το 9^ο πολλές φορές δεν διδάσκεται λόγω χρόνου ή λόγω δυσκολίας εκτέλεσης του πειράματος.

Στα Μαθηματικά της Β΄ γυμνασίου αναπτύσσεται η έννοια της συνάρτησης, οι καρτεσιανές συντεταγμένες και οι συναρτήσεις ευθειών $y = a x$ και $y=ax+\beta$ στο 3ο κεφάλαιο. Οι μαθητές αναπτύσσουν δεξιότητες σχετικές με το σχεδιασμό και την ερμηνεία μιας γραφικής παράστασης, με τον προσδιορισμό της σχέσης αναλογίας δυο ποσών, της γραφική σημασία των παραμέτρων a , β στην εξίσωση $y=ax+\beta$ και την κλίση ως εφαπτομένη οξείας γωνίας, βρίσκουν και σχεδιάζουν την εξίσωση ευθείας και επιλύουν προβλήματα διαστήματος, ταχύτητας, χρόνου από τη Φυσική. Το 3ο κεφάλαιο διδάσκεται περίπου τον μήνα Ιανουάριο. Η επίλυση τύπων που περιέχεται στο 1ο κεφάλαιο του βιβλίου και αποτελεί βασική δεξιότητα για την επίλυση προβλημάτων στη φυσική είναι εκτός ύλης.

Στη Φυσική της Β΄ γυμνασίου οι δεξιότητες που καλούνται να εφαρμόσουν οι μαθητές και σχετίζονται με τις συναρτήσεις (Παράγραφοι: 1.3, 2.2, 3.1, 4.2, 4.4, 4.5, 5.1, 5.2, 5.3, 6.1) αφορούν την εφαρμογή σχέσεων αναλογίας για την επίλυση τύπων και την οργάνωση δεδομένων για την επίλυση προβλημάτων. Δεξιότητες κατασκευής γραφικών παραστάσεων, υπολογισμού κλίσης γραφικής παράστασης, ερμηνείας συμμεταβολής μεγεθών, απαιτούνται μόνο σε 4 εργαστηριακές ασκήσεις (Παράγραφοι: 1.3, 3.1, 4.2, 4.5). Η διδασκαλία των κεφαλαίων χρονικά διαρθρώνεται ως εξής: 1^ο: Σεπτέμβριο, 2^ο: Οκτώβριο - Νοέμβριο, 3^ο: Δεκέμβριο - Ιανουάριο, 4^ο: τέλη Ιανουαρίου - Φεβρουάριο, 5^ο: Μάρτιο, 6^ο: Απρίλιο - Μάιο.

Στα Μαθηματικά της Γ΄ γυμνασίου οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a \neq 0$ στο 4^ο κεφάλαιο, ενώ έννοιες που σχετίζονται με τις συναρτήσεις όπως η γραμμική εξίσωση, η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυση του, διδάσκονται στο 3^ο κεφάλαιο. Οι μαθητές καλούνται να λύνουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και να ερμηνεύουν τη λύση του και να σχεδιάζουν γραφική παράσταση τετραγωνικής συνάρτησης (παραβολής). Το 3^ο κεφάλαιο διδάσκεται κατά το Φεβρουάριο και το 4^ο, τον Μάρτιο – Απρίλιο.

Στη Φυσική της Γ΄ γυμνασίου οι δεξιότητες που καλούνται να εφαρμόσουν οι μαθητές και σχετίζονται με τις συναρτήσεις (Παράγραφοι: 1.5, 2.3, 2.5, 4.2, 5.3). απαιτούν την επίλυση τύπων και την οργάνωση δεδομένων για την επίλυση προβλημάτων, ενώ για την ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων απαιτείται η επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Δεξιότητες σχετικές με τις γραφικές παραστάσεις απαιτούνται μόνο σε δυο εργαστηριακές ασκήσεις (Παράγραφοι: 2.3 και 4.2). Η διδασκαλία των κεφαλαίων χρονικά διαρθρώνεται ως εξής: 1^ο: μέχρι Νοέμβρη, 2^ο: Νοέμβριο - Ιανουάριο, 3^ο: Ιανουάριο - Φεβρουάριο, 4^ο: Μάρτιο, 5^ο: Απρίλιο – Μάιο (τα υπόλοιπα κεφάλαια πολλές φορές δεν διδάσκονται εντός του σχολικού έτους).

Στην Άλγεβρα της Α΄ λυκείου η έννοια της συνάρτησης αναπτύσσεται στο 6^ο κεφάλαιο. Επιδιώκεται η σύνδεση διαφορετικών αναπαράστασεων μιας συνάρτησης και η ερμηνεία γραφικής παράστασης στην επίλυση προβλήματος. Διερευνάται ο ρόλος των παραμέτρων α , β στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$. Διερευνάται η συμμεταβολή των μεγεθών – μονοτονία της συνάρτησης, μέσα από τη γραφική παράσταση, τον πίνακα τιμών και του ρόλου της παραμέτρου α σε αυτή. Ωστόσο, ο τύπος εύρεσης της κλίσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με γνωστές συντεταγμένες, $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και συνδέεται με την έννοια της κλίσης όπως παρουσιάζεται στη Φυσική παρόλο που περιέχεται στο σχολικό βιβλίο είναι εκτός ύλης. Το 6^ο κεφάλαιο διδάσκεται μετά το Φεβρουάριο.

Στη Φυσική της Α΄ λυκείου στο κεφάλαιο 1.1 οι μαθητές καλούνται να μετασχηματίζουν αριθμητικά πειραματικά δεδομένα σχετικά με ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις σε γραφικές παραστάσεις και αντίστροφα, να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις που αφορούν ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις και να υπολογίζουν μεγέθη (ταχύτητα, επιτάχυνση, μετατόπιση) χρησιμοποιώντας εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλής και ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης. Το κεφάλαιο για τις ευθύγραμμες κινήσεις διδάσκεται από τα τέλη Σεπτεμβρίου μέχρι Δεκέμβριο ή αμέσως μετά, μέχρι αρχές Ιανουαρίου.

Ανάλυση Δραστηριοτήτων Σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών και Φυσικής

Στα Μαθηματικά της Α΄ γυμνασίου το πλαίσιο των ασκήσεων είναι σε αρκετές ασκήσεις καθημερινό (15 από 25). Σε 15 ασκήσεις απαιτείται αλγεβρική επίλυση από τις οποίες στις 12 απαιτείται μετάφραση από λεκτική αναπαράσταση, σε 2 από πίνακα τιμών και σε 1 από γραφική παράσταση. Σε 4 ασκήσεις απαιτείται κατασκευή γραφικής παράστασης μέσω μετάφρασης από λεκτική αναπαράσταση (1 άσκηση), από αλγεβρική αναπαράσταση (1 άσκηση) και από πίνακα τιμών (2 ασκήσεις). Τέλος, σε 4 ασκήσεις ζητείται παράσταση σημείων ή εύρεση συντεταγμένων από γραφική παράσταση, ενώ σε 2 ασκήσεις απαιτείται η διερεύνηση της συμμεταβολής των μεγεθών.

Η Φυσική Α΄ γυμνασίου είναι κατεξοχήν εργαστηριακό μάθημα και οι δραστηριότητες που εμπλέκουν χρήση γραμμικών συναρτήσεων (σε 4 από τα 12 κεφάλαια) είναι ενταγμένες στο πλαίσιο των εργαστηριακών ασκήσεων και απαιτούν σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων με παράσταση σημείων από πίνακα τιμών, υπολογισμό κλίσης από γραφική παράσταση και μελέτη συμμεταβολής μεγεθών.

Στα Μαθηματικά Β΄ γυμνασίου το πλαίσιο των ασκήσεων είναι σε αρκετές ασκήσεις καθημερινό (9 από 37), ενώ σε 3 ασκήσεις το πλαίσιο είναι επιστημονικό (φυσικής). Επικρατούν ασκήσεις αλγεβρικής επίλυσης (18) με μετάφραση από λεκτική αναπαράσταση (12) και από πίνακα τιμών (3). Σε 14 ασκήσεις απαιτείται κατασκευή γραφικής παράστασης μέσω μετάφρασης από λεκτική αναπαράσταση (5), από αλγεβρική αναπαράσταση (5) και από πίνακα τιμών (4). Τέλος, σε 7 ασκήσεις ζητείται παράσταση σημείων ή εύρεση συντεταγμένων από γραφική παράσταση ή απόσταση σημείων, ενώ σε 4 απαιτείται συμπλήρωση πίνακα τιμών. Σε 13 από τις 37 ασκήσεις του κεφαλαίου αναφέρεται ρητά ή υπονοείται έμμεσα η κλίση.

Στις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου Φυσικής Β΄ γυμνασίου δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην επίλυση ασκήσεων, αφού σε 6 κεφάλαια υπάρχουν μόνο 45 ασκήσεις συνολικά. Από αυτές, οι 11 είναι ασκήσεις διατυπωμένες με καθημερινό πλαίσιο και αφορούν αλγεβρική επίλυση τύπου και μόνο 3 είναι ασκήσεις στις οποίες εμπλέκεται η χρήση ή ερμηνεία γραφικής παράστασης. Τέλος υπάρχει και 1 άσκηση συμπλήρωσης πίνακα τιμών.

Στα Μαθηματικά Γ΄ γυμνασίου στις 13 ασκήσεις της παραγράφου Α.3.1 στα διάφορα υποερωτήματα ζητείται η σχεδίαση της γραφικής παράστασης 14 ευθειών, η αντιστοίχιση 6 δεδομένων γραφικών παραστάσεων με την εξίσωση τους, 10 ερωτήματα σχετίζονται με τη συνθήκη όπου ευθείες που διέρχονται από γνωστό σημείο, 3 ερωτήματα σχετίζονται με σημεία τομής με άξονες, 13 ερωτήματα με ευθείες παράλληλες στους άξονες, 2 ερωτήματα σχετικά με εμβαδόν μεταξύ ευθειών και αξόνων και 2 προβλήματα που απαιτούν μετάφραση από λεκτική μορφή σε γραμμική εξίσωση. Στην παράγραφο Α.3.2, υπάρχουν 2 ασκήσεις με υποερωτήματα που απαιτούν λύση γραμμικού συστήματος μέσω γεωμετρικής ερμηνείας από τη σχετική θέση ευθειών, 1 άσκηση με επιστημονικό πλαίσιο (γνωστό διάγραμμα υ-t) και 1 άσκηση με καθημερινό πλαίσιο (και δεδομένο διάγραμμα με 3 ημευθείες).

Στις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου της Φυσικής Γ΄ γυμνασίου, δεν δίνεται έμφαση στο μαθηματικό φορμαλισμό, αφού σε 6 διδακτέα κεφάλαια υπάρχουν μόνο 29 ασκήσεις συνολικά. Από αυτές οι 17 απαιτούν είτε αλγεβρική επίλυση τύπου ή επίλυση συστήματος εξισώσεων και κατά κύριο λόγο είναι διατυπωμένες με καθημερινό πλαίσιο, 2 είναι πιο σύνθετες και αφορούν την ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων και 1 απαιτεί επεξεργασία πίνακα τιμών (μετάφραση σε γραφική παράσταση).

Στην άλγεβρα Α΄ λυκείου, στην παράγραφο 6.2 (7 ασκήσεις εντός ύλης), μόνο 1 άσκηση αναφέρεται στην συνθήκη σημείου που ανήκει στην γραφική παράσταση, 2 ασκήσεις (7 περιπτώσεις) στα σημεία τομής της με τους άξονες, 1 για σχετική θέση γραφικής παράστασης με άξονα $x'x$ και 1 για σχετικές θέσεις δύο γραφικών παραστάσεων. Στην παράγραφο 6.3 (11 ασκήσεις εντός ύλης), 2 ασκήσεις με αλγεβρική αναπαράσταση επιλύονται αλγεβρικά (1 που ζητείται η γωνία γνωστής ευθείας με άξονα x' , 1 που ζητείται η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δυο σημεία), 1 άσκηση με επιστημονικό πλαίσιο (από τη Φυσική) που ζητείται η εξίσωση ευθείας – συνάρτηση που συνδέει θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου με Φαρενάιτ, 2 ασκήσεις που ζητείται η κατασκευή γραφικής παράστασης συνάρτησης που δίνεται η αλγεβρική της μορφή (1 με τρεις κλάδους, 1 με απόλυτα και σταθερή συνάρτηση) και τα σημεία τομής τους γραφικά και αλγεβρικά, 2 ασκήσεις που δίνεται γραφική παράσταση και ζητείται η κατάλληλη μετάφραση και απάντηση σε βασικά ερωτήματα γραφικής επίλυσης εξισώσεων και 4 προβλήματα με επιστημονικό και καθημερινό πλαίσιο.

Στο Σχολικό Εγχειρίδιο της φυσικής της Α΄ λυκείου αναλύθηκαν διεξοδικά οι ερωτήσεις και οι ασκήσεις μόνο του κεφαλαίου 1.1 της κινηματικής, αφού οι δεξιότητες χειρισμού των συναρτήσεων εμπλέκονται κατεξοχήν στο συγκεκριμένο κεφάλαιο. Από τις 41 ερωτήσεις του κεφαλαίου 1.1 της Φυσικής Α΄ λυκείου, οι 22 είναι ερωτήσεις που σχετίζονται με δεξιότητες χειρισμού συναρτήσεων και στην πλειονότητα τους περιέχουν

γραφική παράσταση στη διατύπωση τους. Συγκεκριμένα, 8 σχετίζονται με μεγέθη που προκύπτουν από την κλίση της γραφικής παράστασης, 2 με μεγέθη που προκύπτουν από εμβαδό γραφικής παράστασης, 2 με αξιοποίηση πίνακα τιμών και 5 που σχετίζονται με το είδος της κίνησης και τη μονοτονία της συνάρτησης. Τέλος, σε 4 ερωτήματα υπάρχουν και αλγεβρικά ζητούμενα. Από τα 19 προβλήματα του ίδιου κεφαλαίου, στα 11 χρησιμοποιείται λεκτική διατύπωση, που προϋποθέτει μετάφραση σε αλγεβρική μορφή, ενώ σε 2 απαιτείται μετάφραση σε γραφική αναπαράσταση. Μόνο 2 προβλήματα διατυπώνονται με αλγεβρική μορφή και απαιτούν αλγεβρικού τύπου επίλυση και τη δημιουργία γραφικής παράστασης. Τέλος, 6 προβλήματα χρησιμοποιούν στην διατύπωση τους γραφική παράσταση με ζητούμενα που προκύπτουν από τον υπολογισμό του εμβαδού της γραφικής παράστασης, ενώ το ένα τρίτο αυτών περιέχει ζητούμενα που προκύπτουν από την κλίση της γραφικής παράστασης. Επίσης, υπάρχουν ζητούμενα που εμπλέκουν τη μετάφραση από γραφική αναπαράσταση σε λεκτική (1) και από γραφική αναπαράσταση σε αλγεβρική (1).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Σύγκριση Α.Π.Σ. Μαθηματικών και Φυσικής

Από τη σύγκριση των Α.Π.Σ. των δυο μαθημάτων στην Α΄ γυμνασίου προκύπτει ότι: α) προηγείται η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών στη φυσική από τη διδασκαλία τους στα μαθηματικά β) στη φυσική οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν έννοιες σχετικά με τις γραμμικές και τις σταθερές συναρτήσεις χωρίς να τις έχουν διδαχθεί στη δεδομένη ή σε προηγούμενη τάξη.

Στην Β΄ γυμνασίου προκύπτει ότι: α) ενώ η εφαρμογή δεξιοτήτων σχετικά με τις συναρτήσεις στη Φυσική ξεκινά από το Σεπτέμβριο και διατρέχει όλη τη διδακτική περίοδο, στα Μαθηματικά διδάσκονται περί τον Ιανουάριο, β) ενώ στα Μαθηματικά της Β΄ γυμνασίου αναπτύσσονται διεξοδικά οι έννοιες των γραμμικών συναρτήσεων μέσα από την αλγεβρική τους μορφή αλλά και μέσα από τους πίνακες τιμών και τις γραφικές παραστάσεις, στη Φυσική, δίνεται έμφαση μόνο σε ασκήσεις αλγεβρικής επίλυσης τύπων (γεγονός που αναδεικνύει ασυνέχεια και στο Α.Π.Σ. της Φυσικής της Α΄ και της Β΄ γυμνασίου ως προς τις δεξιότητες τις σχετικές με γραφικές παραστάσεις). Εξαιρέση αποτελούν οι εργαστηριακές ασκήσεις που απαιτούν χρήση γραφικών παραστάσεων, οι οποίες, όμως, είναι προς διερεύνηση αν διδάσκονται, με ποιο τρόπο και σε τι εύρος. Ενώ, η επίλυση τύπων που αποτελεί βασική δεξιότητα για την επίλυση προβλημάτων στη φυσική είναι εκτός ύλης στα μαθηματικά.

Στη Γ΄ γυμνασίου προκύπτει ότι: α) ενώ οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν συστήματα στα ηλεκτρικά κυκλώματα από τον Ιανουάριο, στα Μαθηματικά η επίλυση γραμμικών συστημάτων διδάσκεται το Φεβρουάριο, β) στη Φυσική απουσιάζει η ανάλυση και επεξεργασία γραφικών παραστάσεων και η συμμεταβολή των μεγεθών και υπάρχει μικρός αριθμός ασκήσεων.

Στην Α΄ Λυκείου προκύπτει ότι: α) οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν στη φυσική στο 1ο κεφάλαιο (μέχρι τον Ιανουάριο) δεξιότητες σχετικές με τις συναρτήσεις, τις οποίες διδάσκονται διεξοδικά στην Άλγεβρα μετά το Φεβρουάριο, (στα σχολεία που

προλαβαίνουν), β) και στα δυο γνωστικά αντικείμενα δίνεται έμφαση στην ερμηνεία και χρήση γραφικής παράστασης για την κατανόηση της συμμεταβολής μεγεθών και την επίλυση προβλημάτων, γίνεται διερεύνηση της μονοτονίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης στα μαθηματικά και ερμηνεία της κίνησης (επιβραδυνόμενη – επιταχυνόμενη), με βάση τη μονοτονία συνάρτησης από τη γραφική παράσταση, στη φυσική. Διερευνάται ο ρόλος των παραμέτρων α , β στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$, σε πλήρη αντιστοιχία με το ρόλο των v_0 και a στη σχέση $v=v_0+at$ της ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης. Ωστόσο, ο τύπος: $\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ για την εύρεση της κλίσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ με γνωστές συντεταγμένες $\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ που χρησιμοποιείται στη φυσική, είναι εκτός ύλης στην άλγεβρα.

Σύγκριση Δραστηριοτήτων Σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών και Φυσικής

Στα Μαθηματικά της Α΄ γυμνασίου για την εφαρμογή των εννοιών που σχετίζονται με τη συνάρτηση το πλήθος των ασκήσεων φαίνεται ανεπαρκές για την αφομοίωση των εννοιών, λόγω της δυσκολίας τους για το συγκεκριμένο ηλικιακό επίπεδο, ενώ η έμφαση δίνεται στην αλγεβρική επίλυση ασκήσεων. Στη Φυσική απαιτείται, κατεξοχήν, η κατασκευή γραφικής παράστασης, η μελέτη της συμμεταβολής των μεγεθών και ο υπολογισμός της κλίσης.

Στο Σχολικό Εγχειρίδιο Μαθηματικών Β΄ γυμνασίου το πλήθος και η διαφοροποίηση των ασκήσεων ως προς τις αναπαραστάσεις και τις μεταφράσεις από μια μορφή σε άλλη φαίνεται ικανοποιητικό για την κατάκτηση των εννοιών. Υπάρχουν 3 ασκήσεις διατυπωμένες σε επιστημονικό πλαίσιο (φυσικής) στις οποίες ζητείται κατασκευή γραφικής παράστασης και εύρεση σχέσης συμμεταβολής μεγεθών. Απουσιάζουν δραστηριότητες επεξεργασίας γραφικής παράστασης και μετάφρασης της σε αλγεβρική μορφή και μόνο σε μια άσκηση γραφικής παράστασης εμπλέκονται οι έννοιες της ευθείας, ημιευθείας και ευθύγραμμου τμήματος. Στον αντίποδα, στη Φυσική της Β΄ γυμνασίου οι ασκήσεις που αφορούν γραφική παράσταση και πίνακα τιμών είναι εξαιρετικά λίγες και η πλειονότητα τους αφορά επίλυση τύπων.

Στα Μαθηματικά της Γ΄ γυμνασίου επικρατεί ο διαδικαστικός χαρακτήρας της συνάρτησης και απουσιάζει η έννοια της συνάρτησης ως ολότητα και ως συμμεταβολή, αφού λείπουν οι ασκήσεις επεξεργασίας γραφικών παραστάσεων και γίνεται προσπάθεια αλγεβρικής μετάφρασης γεωμετρικών εννοιών των γραφικών παραστάσεων. Οι ασκήσεις παρουσιάζονται σε μαθηματικό πλαίσιο και για πρώτη φορά εμφανίζονται ασκήσεις εύρεσης εμβαδού γραφικής παράστασης. Στη Φυσική οι ασκήσεις είναι ελάχιστες και προκρίνεται η αλγεβρική επίλυση τύπων ή συστημάτων εξισώσεων.

Στην Άλγεβρα της Α΄ λυκείου δίνεται έμφαση στη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης και μάλιστα στον υπολογισμό της κλίσης και στην εύρεση της εξίσωσης που περιγράφει μια ευθεία και στον αλγεβρικό τρόπο προσέγγισης της συνάρτησης. Ωστόσο, απουσιάζει η έννοια της συμμεταβολής των μεγεθών που σχετίζονται σε μια συνάρτηση και η έννοια του εμβαδού της συνάρτησης. Σε περισσότερες από τις μισές

ερωτήσεις της κινηματικής της Α΄ λυκείου εμπλέκονται διάφορες μορφές αναπαράστασης, επεξεργασίας και ερμηνείας συναρτήσεων. Στις ερωτήσεις αυτές για πρώτη φορά εμφανίζονται ζητούμενα σχετικά με τη μονοτονία των συναρτήσεων που οδηγούν σε συμπεράσματα για το είδος της κίνησης. Τα προβλήματα της κινηματικής της Α΄ λυκείου προϋποθέτουν υψηλού επιπέδου μαθηματικές δεξιότητες σχετικές με τη μετάφραση λεκτικών διατυπώσεων σε αλγεβρική μορφή, την επίλυση τύπων και την ικανότητα επίλυσης συστημάτων. Παράλληλα, απαιτούνται δεξιότητες χειρισμού γραφικών παραστάσεων όπως είναι ο υπολογισμός εμβαδού και κλίσης που θα οδηγήσουν σε ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων και δημιουργία νέων γραφικών παραστάσεων άλλων μεγεθών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Γενικότερα από τη σύγκριση των δυο Α.Π.Σ. προκύπτει ότι συστηματικά σε όλες τις τάξεις του γυμνασίου προηγείται η εφαρμογή δεξιοτήτων που σχετίζονται με τις συναρτήσεις στη φυσική από τη διδασκαλία και την κατάκτηση τους από τους μαθητές στα μαθηματικά. Η χρονική ασυμβατότητα κορυφώνεται στην Α΄ λυκείου στην οποία οι έννοιες των γραμμικών συναρτήσεων που θεωρούνται απαραίτητες για να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του κεφαλαίου της Κινηματικής στη Φυσική οι μαθητές, αν και έχουν διδαχθεί πολύ νωρίτερα (στα μαθηματικά Β΄ γυμνασίου) δεν μπορούν να καλύψουν τις ανάγκες των μαθητών στην Φυσική, αφού έχουν διδαχθεί με απλό τρόπο σε παιδιά άλλης ηλικίας, με άλλο επίπεδο γνώσης και κατανόησης, διαφορετική παρουσίαση και χρήση των απαραίτητων εννοιών και μάλιστα αρκετό καιρό πριν. Ενώ, η εμβάθυνση που προσφέρεται από την Άλγεβρα της Α΄ λυκείου, αντί να προηγείται της Κινηματικής, γίνεται προς το τέλος της χρονιάς (εάν και εφόσον διδαχθεί λόγω έλλειψης χρόνου).

Αξιοσημείωτο είναι ότι βασικές έννοιες για τη φυσική όπως η επίλυση τύπων και ο τύπος εύρεσης της κλίσης μιας ευθείας, αν και υπάρχουν στα βιβλία των μαθηματικών, τελικά, δεν αποτελούν μέρος της διδακτέας ύλης. Επίσης, στη Β΄ και Γ΄ γυμνασίου, ενώ στα μαθηματικά σε αυτές τις τάξεις οι μαθητές εισάγονται στις πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, στη φυσική επικρατούν λίγες ασκήσεις αλγεβρικής επίλυσης τύπων, γεγονός που αποτελεί ασυνέχεια στη στοχοθεσία του Α.Π.Σ. φυσικής (στη φυσική της Α΄ γυμνασίου και της Α΄ λυκείου προκρίνονται στόχοι σχετικοί με τις συναρτήσεις, τη γραφική παράσταση και τη συμμεταβολή των μεγεθών, ενώ στη Β΄ και Γ΄ γυμνασίου, απουσιάζουν αντίστοιχοι στόχοι - με εξαίρεση τις εργαστηριακές ασκήσεις). Χάνεται, έτσι στο γυμνάσιο η ευκαιρία εμπέδωσης και εμβάθυνσης στη χρήση συναρτήσεων στη φυσική και οξύνεται η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη διαχείριση αντιστοίχων εννοιών στη Φυσική Α΄ λυκείου.

Από την ανάλυση των δραστηριοτήτων των μαθηματικών φαίνεται ότι δίνεται έμφαση στο διαδικαστικό χαρακτήρα των συναρτήσεων (Μαλλιάκας και Πλαϊνιώτης, 2015) και όχι στην προσέγγιση της ως αντικείμενο που εξυπηρετείται από τις γραφικές παραστάσεις ή στην έννοια της συμμεταβολής. Συγκεκριμένα, οι περισσότερες δραστηριότητες απαιτούν αλγεβρική επίλυση ή κατασκευή γραφικής παράστασης, ενώ,

απουσιάζουν οι δραστηριότητες που απαιτούν ερμηνεία γραφικής παράστασης και εξαγωγή συμπερασμάτων ή μελέτη συμμεταβολής. Ο πλαισιωμένος χαρακτήρας παράθεσης των μαθηματικών εννοιών που σχετίζεται με τη φυσική είναι πολύ περιορισμένος. Αντίθετα, στην κινηματική της Α΄ λυκείου κυριαρχεί ο πλαισιωμένος χαρακτήρας των ασκήσεων που απαιτεί μετάφραση από λεκτική σε αλγεβρική ή γραφική μορφή και η ερμηνεία και χρήση γραφικών παραστάσεων.

Οι σημαντικές ασυνέχειες και ασυμβατότητες μεταξύ των Α.Π.Σ. των Μαθηματικών και της Φυσικής, αλλά και των τρόπων που αυτά υλοποιούνται μέσα από τις σχολικές δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων οδηγούν στην εύλογη υπόθεση (που μπορεί να αποτελέσει έναυσμα για περαιτέρω έρευνα), ότι μέρος της δυσχέρειας των μαθητών στην κινηματική της Α΄ λυκείου οφείλεται στις ασυνέχειες και τις ασυμβατότητες των Α.Π.Σ. των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Προκειμένου να υπάρξει βελτίωση του εκπαιδευτικού αποτελέσματος προτείνεται: α) να υπάρξει χρονικός συντονισμός μεταξύ των Α.Π.Σ. των Μαθηματικών και της Φυσικής σχετικά με τις συναρτήσεις και τις εφαρμογές τους, ώστε να προηγείται η διδασκαλία των συναρτήσεων στα Μαθηματικά και β) να υπάρξει συντονισμός ως προς το περιεχόμενο και τους στόχους των δυο Α.Π.Σ. που θα εκφραστεί αναλόγως στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων. Συγκεκριμένα, στα Μαθηματικά πρέπει στη διδασκαλία των συναρτήσεων να δίνεται έμφαση όχι μόνο στη διαδικαστική γνώση αλλά και σε δραστηριότητες μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη και στη διασύνδεση τους (Γούδας, Σακονίδης, 2002) και να δίνονται κατάλληλες ευκαιρίες επίλυσης προβλημάτων τα οποία θα είναι ενταγμένα σε ένα λεκτικό πλαίσιο (Rebello et al, 2007), που θα σχετίζεται με τις εμπειρίες των μαθητών, όπως για παράδειγμα της Φυσικής. Αλλά και στη Φυσική πρέπει να ενισχυθούν οι ασκήσεις που είναι σχετικές με τις συναρτήσεις στο γυμνάσιο. Έτσι, θα ωφεληθεί η διδασκαλία της φυσικής, αφού οι ικανότητες των μαθητών στα μαθηματικά συμπορεύονται με τις ικανότητες τους στη φυσική (Kohl, 2001) αλλά και των μαθηματικών, αφού με τη φυσική τα μαθηματικά νοηματοδοτούνται καθώς προστίθενται περαιτέρω επίπεδα δομής και ερμηνείας των μαθηματικών εννοιών (Redish & Gupta, 2009) ενισχύοντας έτσι και τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (Karut, όπως αναφέρεται από Γραββάνη, 2006).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ. & Δαμιανού, Χ. (1991). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων, Α τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
- Αντωνίου, Ν., Δημητριάδης, Π., Καμπούρης, Κ., Παπαμιχάλης, Κ., Παπασιμίπα, Λ. (2013). *Φυσική Β΄ Γυμνασίου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».
- Αντωνίου, Ν., Δημητριάδης, Π., Καμπούρης, Κ., Παπαμιχάλης, Κ., Παπασιμίπα, Λ. (2013). *Φυσική Γ΄ Γυμνασίου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

- Αντωνίου, Ν., Δημητριάδης, Π., Καμπούρης, Κ., Παπαμιχάλης, Κ., Παπατσιμπα, Λ. (2007). *Φυσική Β' Γυμνασίου. Τετράδιο Εργασιών*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Ανακτήθηκε Ιούνιος 29, 2016, από <http://ebooks.edu.gr/new/classcoursespdf.php?classcode=DSGYM-B>
- Αντωνίου, Ν., Δημητριάδης, Π., Καμπούρης, Κ., Παπαμιχάλης, Κ., Παπατσιμπα, Λ. (2007). *Φυσική Γ' Γυμνασίου. Τετράδιο Εργασιών*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Ανακτήθηκε Ιούνιος 29, 2016, από <http://ebooks.edu.gr/new/classcoursespdf.php?classcode=DSGYM-B>
- Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ. Τσικοπούλου, Σ. & Χρυσοβέργης, Μ. (2007). *Μαθηματικά Γ Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
- Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγιάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φερεντίνος, Σ. (2007). *Μαθηματικά Α Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβυς, Γ. & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
- Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π., Τιμοθέου, Γ. (2014). *Φυσική Γενικής Παιδείας Α' Γενικού Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».
- Γούδας Α., Σακονίδης Χ. (2002). Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και των αναπαραστάσεών της από μαθητές γυμνασίου και λυκείου, *Πρακτικά του 5ου Πανελληνίου Συνεδρίου "Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση"*, 12-15 Οκτωβρίου, 2001, Θεσσαλονίκη.
- Γραββάνη, Κ. (2006). *Αναπαραστάσεις συναρτήσεων και ο μετασχηματισμός τους από μαθητές λυκείου*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου. Ανακτήθηκε Ιούνιος 20, 2016, από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_grabbani.pdf
- Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΦΕΚ 303B/13-03-2003, ΦΕΚ 304B/13-03-2003, Ανακτήθηκε Δεκέμβριος 9, 2015, από <http://www.pi-schools.gr/programs/depps/>).
- Eisenberg, T. (1992). On the Development of a Sence for Functions. In E.Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Consept of Function. Aspects of Epistemologyand Pedagogy*(pp. 153-174). The Mathematical Association of America.
- Hitt, F., (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations of Linked to the Concept of Functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 79-103.
- Καλαβάσης, Φ. & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2015). *Ανάμεσα στο Μέρος και στο Όλο. Αναστοχαστική Οικοδόμηση Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Καλκάνης, Γ., Γκικοπούλου, Ουρ., Καπότης, Ε., Γουσόπουλος, Δ., Πατρινόπουλος, Μ., Τσάκωνας, Π., Δημητριάδης, Π., Παπατσιμπα, Λ., Μιτζήθρας, Κ., Καπογιάννης, Α., Σωτηρόπουλος, Δ., Πολίτης, Σ. (2013). *Η Φυσική με Πειράματα. Α' Γυμνασίου*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

- Καρούδας, Χ., (2008). Μια έρευνα σε μαθητές της Α΄ Λυκείου για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης – Διδακτική παρέμβαση. Στο Α. Φυλάκης, (Επ.) Πρακτικά 2η Μαθηματική Εβδομάδα, Μαθηματικές Προσεγγίσεις στην Επιστήμη, Τέχνη & Εκπαίδευση (σελ.285-301). ΕΜΕ, Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.
- Καφετζόπουλος, Γ., (2014). *Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με τη βοήθεια του ψηφιακού εργαλείου Casyorée*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου. Ανακτήθηκε Ιούνιος 20, 2016, από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Kafetzopoulos_Georgios_Ignatios.pdf
- Kohl, P. (2001). *Towards an understanding of how students use representations in physics problem solving*. B.S., Western Washington University.
- Μαυλιάκας, Κ. & Παϊνιώτης, Θ. (2015). Ανάλυση των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου στην Ελλάδα ως προς το είδος και τον μετασχηματισμό της γνώσης που απαιτείται και ως προς με την μορφή τους. Στο Πρακτικά του 32ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας: Η δύναμη των Μαθηματικών κινητήριος μοχλός της επιστημονικής έρευνας και της εξελικτικής πορείας του πολιτισμού μας (σελ.670-680).Αθήνα:Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Michelsen, C. (2005). Expanding the domain variables and functions in an interdisciplinary context between mathematics and physics. In Beckmann, A., Michelsen, C. & Sriraman, B. (Eds.), *Proceedings of the 1st International Symposium of Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences*. (pp.201-214). The University of Education, Schwäbisch Gmünd, Germany.
- Οδηγίες για τη Διδασκαλία των Θετικών Μαθημάτων του Ημερήσιου και Εσπερινού Γυμνασίου για το Σχ. έτος 2015 – 2016. Ανακτήθηκε Ιούνιος 29, 2016 από <http://edu.klimaka.gr/arxeio/leitourgia-sxoleio/gymnasio-odhgies-didaskalias-mathimatwn-a2.pdf>
- Ορφανός, Σ. (2010). Διάγνωση των εμποδίων στην κατανόηση των συναρτήσεων με τη βοήθεια δραστηριοτήτων μοντελοποίησης Κινηματική. 8^ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες στην Προσχολική και Σχολική Εκπαίδευση. Αθήνα.
- Rebello, S., Cui, L., Bennett, A., Zollman, D., & Ozimek, D. (2007). Transfer of Learning in Problem Solving in the Context of Mathematics & Physics. In Jonassen, D. (Ed.), *Learning to Solve Complex Scientific Problems*. New York: Lawrence Erlbaum Associates. Ανακτήθηκε 20, 2016, από <https://web.phys.ksu.edu/papers/2006/TransferInProblemSolving-FullChapter-v32.pdf>
- Redish, E. F., & Gupta, A. (2009) Making meaning with math in physics: A semantic Analysis. In Raine, D., Hurkett, C., & Rogers, L. (Eds), *GIREP – EPEC & PHEC 2009International Conference-Selected Contributions*.(pp.244-260).Leicester, UK.

- Schwartz, J., & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. In G. Harel & E. Dubinsky (Red.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. (pp. 261-289). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 1-36.
- Χασάπης, Δ. (2000). *Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*. Αθήνα: Μεταίχμιο.