2ο ΓΕΛ Χαλκίδας

Μαθηματική Ομάδα

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Βιβλίο του Μαθητή

♠♠♠♠♠♠

Επιμέλεια Ύλης

Χαρ. Στεργίου

2016

Διδακτική υποστήριξη :

Βασ. Αθανασίου - Αικ. Δερβεντζή - Θεόδ. Δημητρακάκης - Δημ. Κρινής

Ελ. Παπαγεωργίου - Χαρ. Στεργίου

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται στους μαθητές της Α' Λυκείου του 2ου ΓΕΛ Χαλκίδας που επιθυμούν να συμμετάσχουν στον Πανελλήνιο Μαθηματικό Διαγωνισμό **ΘΑΛΗΣ** που διοργανώνει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (ΕΜΕ) και πραγματοποιεί το παράρτημα της ΕΜΕ στην Εύβοια.

Περιέχονται αρκετά ενδεικτικά θέματα προηγούμενων ετών μαζί με τις λύσεις τους, ώστε ο μαθητής να αποκτήσει σαφή γεύση για το πνεύμα και το επίπεδο του διαγωνισμού. Στη συνέχεια δίνονται όλα τα θέματα 2006- 2015 ταξινομημένα ανά μαθηματικό κλάδο(Άλγεβρα , Γεωμετρία κλπ). Τις λύσεις αυτών των θεμάτων μπορεί ο μαθητής να βρει εύκολα στο δίκτυο, δίνονται όμως αν ζητηθούν ηλεκτρονικά (θέματα και λύσεις) στους μαθητές στο Σχολείο μας.

Η συμμετοχή σε μαθηματικούς διαγωνισμούς είναι μια μοναδική εμπειρία και συχνά ανοίγει στους επιμελείς και ταλαντούχος μαθητές το δρόμο όχι μόνο για βαθύτερη ενασχόληση με τα μαθηματικά αλλά και άριστες προοπτικές για ανώτερες σπουδές στα καλύτερα Πανεπιστήμια του κόσμου, που έχουν τα μαθητικά ως το βασικότερο προαπαιτούμενο μάθημα. Για το λόγο αυτό προτρέπουμε και συνιστούμε θερμά στο μαθητή να αφιερώσει αρκετό μέρος από τον ελεύθερο χρόνο του και να ασχοληθεί με πείσμα και μεράκι με το περιεχόμενο αυτού του εγχειριδίου. Τίποτα άλλωστε που στο χώρο της γνώσης γίνεται επιφανειακά και αποσπασματικά δεν επιφέρει σημαντικά αποτελέσματα.

Σας συνιστούμε λοιπόν θερμά να λάβετε μέρος στο ΘΑΛΗ . Οι καθηγητές του Σχολείου θα είμαστε κοντά σας σε κάθε κάλεσμα για βοήθεια .

Καλή Επιτυχία !!!

Οι μαθηματικοί του 2ου ΓΕΛ :

Βασίλειος Αθανασίου - Αικατερίνη Δερβεντζή - Θεόδωρος Δημητρακάκης

Δημήτριος Κρινής - Ελευθέριος Παπαγεωργίου - Χαράλαμπος Στεργίου

2^{ο} Λύκειο Χαλκίδας

Μαθηματική Ομάδα

Α. Θέματα ΕΜΕ- Άλγεβρα –Επιλογές

Ασκήσεις

1.1 Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού. Να βρείτε τον αριθμό αυτό.

(Θαλής – 2000)

1.2 Το άθροισμα δύο ακεραίων είναι 26. Αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

(Θαλή – 1999)

1.3 Την 1^{η} μέρα των αγώνων σκακιού σε ένα Λύκειο έγιναν ορισμένοι αγώνες, στους οποίους ο ένας παίκτης ήταν αγόρι και ο άλλος κορίτσι. Την 1^{η} μέρα πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών της τάξης. Αν η τάξη είχε 34 παιδιά, να βρείτε:

α) Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη.

β) Πόσα παιδιά δεν πήραν μέρος στους αγώνες της πρώτης μέρας.

(Θαλής – 2000)

1.4 Ένας μαθητής θέλει να αγοράσει δύο βιβλία. Το βιβλίο Α κοστίζει το 60% των χρημάτων που έχει μαζί του, ενώ το βιβλίο Β κοστίζει το 44% των χρημάτων που έχει μαζί του. Αν είχε 80 λεπτά περισσότερα, τότε θα είχε ακριβώς τα χρήματα που κοστίζουν τα δύο βιβλία μαζί. Πόσο κοστίζει το κάθε βιβλίο;

(Θαλής – 2004)

1.5 Το άθροισμα Cesaro των αριθμών α_1, α_2, …, α_ν είναι ο αριθμός:

$$C_\nu = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu}{\nu},$$

όπου $s_\kappa = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\kappa$ ($\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$). Αν το άθροισμα Cesaro των αριθμών α_1, α_2, …, α_{99} είναι 1000, να βρείτε το άθροισμα Cesaro των αριθμών 1, α_1, α_2, …, α_{99}.

(Θαλής – 1999)

1.6 Αν $A = 2(\lambda^2 + \mu^2) - (\lambda + \mu)^2 - 4$ και $B = \lambda^2 - \lambda\mu + \lambda + \mu - 2$, όπου $\lambda, \mu \in \mathrm{IR}$, να λύσετε την εξίσωση $Ax = B$.

(Θαλής – 2004)

1.7 Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}.$$

(Θαλής – 1998)

1.8 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + x = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathrm{IN}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει πραγματικές ρίζες άνισες.

β) Να εξετάσετε αν οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι ακέραιοι αριθμοί.

(Θαλής – 2000)

1.9 Να αναλυθεί το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + x^2 - x - 2$$

σε γινόμενο τριών πολυωνύμων.

(Θαλής – 2005)

1.10 Να γίνει γινόμενο η παράσταση:

$$A = x^3 + (1 + x - x^2 + x^3)^2 .$$

(Θαλής – 2002)

1.11 Να λύσετε την εξίσωση:

$$\lambda(\lambda x + 3) = \lambda^3 + 2\lambda x - 2 ,$$

$\lambda \in IR$.

(Θαλής – 2006)

1.12 Να λύσετε την εξίσωση:

$$3(1 + \alpha^2 + \alpha^4)x = (1 + \alpha + \alpha^2)^2 x +$$
$$+\alpha + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1, \quad \alpha \in IR .$$

(Θαλής – 2001)

1.13 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in IR$ με $\alpha\beta\gamma \neq 0$ και:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

να αποδείξετε ότι $xy + yz + zx = 0$.

(Θαλής – 1997)

1.14 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με:

$$|\alpha| \geq |\beta + \gamma|, \quad |\beta| \geq |\gamma + \alpha|, \quad |\gamma| \geq |\alpha + \beta| .$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

(Θαλής – 1999)

1.15 Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί με:

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma\right) + \beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \alpha\right) + \gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2} - \beta\right) = 0 .$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

(Θαλής – 1998)

1.16 Το τετράγωνο του αθροίσματος των πραγματικών αριθμών x, y, z ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων τους. Αν επιπλέον $x + 2y + 3z = 60$, να βρείτε τους αριθμούς x, y, z.

(Θαλής – 2003)

1.17 Αν α, β, γ είναι ρητοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma \neq 0$ και $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \alpha\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$A = (\alpha^2\beta^2 + 1)(\beta^2\gamma^2 + 1)(\gamma^2\alpha^2 + 1)$$

είναι τετράγωνο ρητού αριθμού.

(Ευκλείδης – 1998)

1.18 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\beta = 2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$$

είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

(Θαλής – 2005)

1.19 Οι αριθμοί α, β, γ, δ έχουν την ιδιότητα:
Αν προσθέσουμε τυχαία τρεις απ' αυτούς και από το άθροισμά τους αφαιρέσουμε 5, προκύπτει πάντα ο αριθμός 2002. Να υπολογίζεται το άθροισμα $A = \alpha + \beta + \gamma + \delta$.

(Θαλής – 2002)

1.20 Αν $x, y, z \in IR$ με $xyz = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{1}{y + 1 - \frac{y}{x+1}} + \frac{1}{z + 1 - \frac{z}{y+1}} + \frac{1}{x + 1 - \frac{x}{z+1}} .$$

(Θαλής – 2001)

1.21 Να βρείτε το μεγαλύτερο αριθμό Μ με την ιδιότητα $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq M$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha + \beta = 1$.

(Θαλής – 2001)

1.22 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, ώστε:

$$x - yz = y - zx = z - xy .$$

Να αποδείξετε ότι $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$.

(Ευκλείδης – 1999)

1.23 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in IR$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

(Θαλής – 2006)

1.24 Αν x, y, $z>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+$$
$$+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{1}{xyz}.$$

(Ευκλείδης – 2002)

1.25 Αν $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ και:

$$\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)=1,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=0$.

(Θαλής – 2005)

1.26 Δίνονται οι θετικοί αριθμοί x, y, z. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(x-y)(x^2-xy)^2}{yz}+\frac{(y-z)(y^2-yz)^2}{zx}+$$
$$+\frac{(z-x)(z^2-xz)^2}{xy}\ge 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

(Θαλής – 2003)

1.27 Αν ο ν είναι φυσικός με $\nu>2$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+$$
$$+\sqrt{1+\frac{1}{(\nu-1)^2}+\frac{1}{\nu^2}}$$

είναι ίση με $A=\dfrac{(\nu-2)(2\nu+1)}{2\nu}$.

(Προκριματικοί νέων – 2003)

1.28 Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z(x+y)=2\\ y^2+z^2-x(y+z)=4\\ z^2+x^2-y(z+x)=8\end{cases}.$$

(Αρχιμήδης – 2002)

Βιβλίο Καθηγητή

Μαθηματική Ομάδα

Α.Υποδείξεις - Λύσεις

1.1 Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε:

$3x+18=x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-18=0$.

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9+72=81$.
- $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{3\pm 9}{2}$,

οπότε $x=6$ ή $x=-3$.

1.2 Έστω x, y οι αριθμοί αυτοί, με $x<y$. Έχουμε:

- $x+y=26$.
- $y=4x+1$.

Έτσι:

$x+(4x+1)=26 \Leftrightarrow 5x=25 \Leftrightarrow x=5$.

Επομένως $y=4x+1=4\cdot 5+1=21$

1.3 α) Αν x είναι τα αγόρια, τα κορίτσια είναι $34-x$. Πρέπει:

$\dfrac{3}{4}x=\dfrac{2}{3}(34-x) \Leftrightarrow 9x=8(34-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 17x=8\cdot 34 \Leftrightarrow 17x=8\cdot 2\cdot 17 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=16$.

Άρα $x=16$ και $y=18$.

β) Την πρώτη μέρα πήραν μέρος $\dfrac{3}{4}\cdot 16=12$ αγόρια και $\dfrac{2}{3}\cdot 18=12$ κορίτσια.

Άρα δεν πήραν μέρος $34-(12+12)=10$ παιδιά.

1.4 Έστω ότι το παιδί έχει μαζί του x €. Τότε:

$\dfrac{60x}{100}+\dfrac{44x}{100}=x+0{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 60x+44x=100x+80 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=80 \Leftrightarrow x=20$.

Άρα το βιβλίο Α κοστίζει $\dfrac{60}{100}\cdot 20=12$ € και το Β

$\dfrac{44}{100}\cdot 20=8{,}8$ €.

1.5 Είναι:

$C_{100}=\dfrac{s_1+s_2+\ldots+s_{100}}{100}=$

$=\dfrac{1+(1+\alpha_1)+(1+\alpha_1+\alpha_2)+\ldots+}{100}$

$+\dfrac{(1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{99})}{100}=$

$\dfrac{100+\alpha_1+(\alpha_1+\alpha_2)+\ldots+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{99})}{100}=$

$=1+\dfrac{99\cdot 1000}{100}=991$,

διότι:

$\dfrac{\alpha_1+(\alpha_1+\alpha_2)+\ldots+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{99})}{99}=$

$=1000.$

1.6 Είναι:

- $A=2(\lambda^2+\mu^2)-(\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2)-4=$

$=\lambda^2-2\lambda\mu+\mu^2-4=(\lambda-\mu)^2-4=$

$=(\lambda-\mu-2)(\lambda-\mu+2)$,

- $B=\lambda^2-\lambda\mu+\lambda+\mu-1-1=(\lambda^2-1)+$

$+(\lambda-1)-\lambda\mu+\mu=(\lambda-1)(\lambda+1)+(\lambda-1)-$

$-\mu(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda+1+1-\mu)=$

$=(\lambda-1)(\lambda-\mu+2)$.

α) Αν $\lambda-\mu+2=0 \Leftrightarrow \lambda=\mu-2$, η εξίσωση είναι ταυτότητα.

β) Αν $\lambda-\mu-2=0 \Leftrightarrow \lambda=\mu+2$, η εξίσωση γίνεται:

$0x=(\mu+2-1)(\mu+2-\mu+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0x=4(\mu+1)$.

- Για $\mu = -1$ είναι ταυτότητα.
- Για $\mu \neq -1$ είναι αδύνατη.

γ) Αν $\lambda \neq \mu + 2$ και $\lambda \neq \mu - 2$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση

$x = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda - \mu - 2}$.

1.7 Είναι $x^2 + x + 1 \neq 0$. Έστω:

$$x^2 + x = \omega .$$

Τότε:

$$\omega = \frac{42}{\omega + 1} \Leftrightarrow \omega^2 + \omega - 42 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega = 6 \quad ή \quad \omega = -7 .$$

- $x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x = 2 \quad ή \quad x = -3)$.
- $x^2 + x = -7 \Leftrightarrow x^2 + x + 7 = 0$, αδύνατη.

1.8 α) $\Delta = 1 + 4(2\nu + 1) > 0$.

β) Αν έχουμε ακέραια ρίζα κ, τότε:

$$\kappa^2 + \kappa = 2\nu + 1 \Leftrightarrow \kappa(\kappa + 1) = 2\nu + 1 .$$

Αλλά ο $\kappa(\kappa + 1)$ είναι άρτιος, ενώ ο $2\nu + 1$ είναι περιττός, άτοπο. Άρα η εξίσωση δεν μπορεί να έχει ακέραια ρίζα.

1.9 $P(x) = x^6 - 2x^5 + x^2 - x - 2 =$

$$= x^5(x - 2) + (x^2 - x - 2) =$$
$$= x^5(x - 2) + (x - 2)(x + 1) =$$
$$= (x - 2)(x^5 + x + 1) =$$
$$= (x - 2)(x^5 - x^2 + x^2 + x + 1) =$$
$$= (x - 2)\left[x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)\right] =$$
$$= (x - 2)\left[x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)\right] =$$
$$= (x - 2)(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) .$$

1.10 $A = x^3 + 1 + (1 + x - x^2 + x^3)^2 - 1 =$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1) +$$
$$+ (1 + x - x^2 + x^3 - 1)(1 + x - x^2 + x^3 + 1) =$$
$$= (x + 1)(x^2 - x + 1) +$$
$$+ x(1 - x + x^2)(2 + x - x^2 + x^3) =$$
$$= (x^2 - x + 1)(x + 1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4) =$$
$$= (x^2 - x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 1) .$$

1.11 Η εξίσωση γράφεται:

$$(\lambda^2 - 2\lambda)x = \lambda^3 - 3\lambda - 2 .$$

- Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{\lambda^3 - 3\lambda - 2}{\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{(\lambda^3 - 4\lambda) + (\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} =$$
$$= \frac{\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) + (\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} =$$
$$= \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda} = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda} .$$

- Αν $\lambda = 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = 2$, η εξίσωση είναι αόριστη.

1.12 Η εξίσωση γράφεται:

$$\left[3(1 + \alpha^2 + \alpha^4) - (1 + \alpha + \alpha^2)^2\right]x =$$
$$= \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1$$

Όμως:

$$1 + \alpha^2 + \alpha^4 = (1 + 2\alpha^2 + \alpha^4) - \alpha^2 =$$
$$= (1 + \alpha^2)^2 - \alpha^2 = (\alpha^2 - \alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) .$$

Έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(3\alpha^2 - 3\alpha + 3 - 1 - \alpha - \alpha^2)x =$$
$$= \alpha^3(\alpha^2 + \alpha + 1) - (\alpha^2 + \alpha + 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 - 2\alpha + 1)x =$$
$$= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^3 - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha - 1)^2 x = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)^2 .$$

- Αν $\alpha \neq 1$, τότε μοναδική λύση είναι η:

$$x = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{2(\alpha - 1)} .$$

- Αν $\alpha = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = x$ και είναι ταυτότητα.

1.13 Έστω $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma} = \lambda$. Τότε:

$$x = \lambda\alpha , \quad y = \lambda\beta , \quad z = \lambda\gamma .$$

- Είναι $\alpha + \beta + \gamma = 1$, οπότε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \qquad (1).$$

- $xy + yz + zx = \lambda\alpha \cdot \lambda\beta + \lambda\beta \cdot \lambda\gamma + \lambda\gamma \cdot \lambda\alpha =$

$$= \lambda^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \overset{(1)}{=} 0 .$$

1.14 Οι δοσμένες δίνουν:

- $\alpha^2 \geq (\beta+\gamma)^2 = \beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2$.
- $\beta^2 \geq (\gamma+\alpha)^2 = \gamma^2 + 2\gamma\alpha + \alpha^2$.
- $\gamma^2 \geq (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=0.$$

1.15 Εκτελούμε τις πράξεις:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)-2\alpha\beta\gamma+\beta\gamma(\beta+\gamma)-2\alpha\beta\gamma+$$

$$+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)-2\alpha\beta\gamma=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-2\alpha\beta\gamma)+(\beta^2\gamma+\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma)+$$

$$+(\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2-2\alpha\beta\gamma)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-2\alpha\beta\gamma)+(\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2-2\alpha\beta\gamma)+$$

$$+(\gamma\beta^2+\gamma\alpha^2-2\alpha\beta\gamma)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma.$$

Σημείωση

Την ομαδοποίηση την κάνουμε ως προς α, β, γ (και όχι π.χ. ως προς α^2, β^2, γ^2).

1.16 Έχουμε:

$$(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)-2xy-2yz-2zx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+$$

$$+(z^2+x^2-2zx)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=y=z.$$

Έτσι:

$$x+2y+3z=60 \Leftrightarrow x+2x+3x=60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x=60 \Leftrightarrow x=10.$$

Άρα $x=y=z=10$.

1.17 Έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha^2\beta^2\gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha+\beta)+\gamma(\beta+\alpha)=\alpha^2(1+\beta^2\gamma^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2(1+\beta^2\gamma^2)=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\beta^2\gamma^2=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{\alpha^2}.$$

Εργαζόμαστε κυκλικά, παίρνουμε τελικά ότι:

$$A=\left(\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}\right)^2=\rho^2,$$

$$\rho=\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}\in\mathbb{Q}.$$

1.18 Θέτουμε $2003=\alpha$, οπότε:

$$\beta=\alpha(\alpha+2)^3-(\alpha+1)(\alpha-1)^3=$$

$$=\alpha(\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+18)-$$

$$-(\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1)=$$

$$=\alpha^4+6\alpha^3+12\alpha^2+8\alpha-$$

$$-(\alpha^4-3\alpha^3+3\alpha^2-\alpha+\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1)=$$

$$=8\alpha^3+12\alpha^2+6\alpha+1=(2\alpha+1)^3=$$

$$=(2\cdot 2003+1)^3=4007^3.$$

1.19 Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-5=2002\\ \beta+\gamma+\delta-5=2002\\ \gamma+\delta+\alpha-5=2002\\ \delta+\alpha+\beta-5=2002\end{cases}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-20=8008 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3A=8028 \Leftrightarrow A=2676.$$

1.20 Είναι $z=\frac{1}{xy}$, οπότε:

$$K=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}=$$

$$=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{y\frac{1}{xy}+y+1}+\frac{\frac{1}{xy}+1}{\frac{1}{xy}x+\frac{1}{xy}+1}=$$

$$=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{\frac{1}{x}+y+1}+\frac{1+xy}{x+1+xy}=$$

$$=\frac{x+1+x(y+1)+1+xy}{xy+x+1}=$$

$$=\frac{2x+2+2xy}{xy+x+1}=\frac{2(x+1+xy)}{xy+x+1}=2.$$

1.21 Παρατηρούμε ότι:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\left(1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)=$$

$$=\left(1+1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+1\right)=\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)=$$

$$=4+\frac{2\alpha}{\beta}+\frac{2\beta}{\alpha}+1=5+2\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\geq$$

$$\geq 5+2\cdot 2=9$$

με ισότητα μόνο για $\alpha=\beta$. Άρα $M=9$.

1.22 Είναι $x-yz=y-zx$, οπότε:

$$x-y-yz+zx=0\Leftrightarrow x-y+z(x-y)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(1+z)=0\Leftrightarrow x=y \quad ή \quad z=-1.$$

- Αν $x=y$, τότε προφανώς:

$$(x-y)(y-z)(z-x)=0.$$

- Έστω $z=-1$. Τότε:

$$y-zx=z-xy\Leftrightarrow y+x=-1-xy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+y+1+xy=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)+y(1+x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=-1 \quad \text{και} \quad y=-1).$$

Αφού $(z=-1$ και $x=-1)$ ή $(z=-1$ και $y=-1)$ είναι αντίστοιχα $z-x=0$ ή $y-z=0$, οπότε πάλι το ζητούμενο ισχύει.

1.23 Η ανισότητα γράφεται:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+2\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+2\cdot\frac{\beta}{\alpha}+2\cdot\frac{\gamma}{\beta}\geq$$

$$\geq 3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+3\cdot\frac{\gamma}{\beta}+3\cdot\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]}{2}\geq 0,$$

που ισχύει.

Σημείωση

Είναι εφαρμογή της:

$$(x+y+z)^3\geq 3(xy+yz+zx),$$

με $x=\frac{\alpha}{\beta}$, $y=\frac{\beta}{\gamma}$, $z=\frac{\gamma}{\alpha}$.

1.24 Παρατηρούμε ότι επειδή:

$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta,$$

έχουμε:

$$x^3+y^3+xyz=(x+y)(x^2+y^2-xy)+xyz\geq$$

$$\geq (x+y)(2xy-xy)+xyz=xy(x+y+z).$$

Έτσι το α′ μέλος γίνεται:

$$A\leq\frac{1}{xy(x+y+z)}+\frac{1}{yz(x+y+z)}+$$

$$+\frac{1}{zx(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)}=\frac{1}{xyz}.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=y=z$.

Σημείωση

Αξίζει να γνωρίζουμε ότι αν $\alpha,\ \beta>0$, τότε $\alpha^3+\beta^3\geq\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

1.25 Επειδή $x+y=\frac{x^2-y^2}{x-y}$, έχουμε:

- $$\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha^2-(\alpha^2+1)}{\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}}\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\beta+\sqrt{\beta^2+1}=\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha+\beta=\sqrt{\alpha^2+1}-\sqrt{\beta^2+1} \qquad (1).$$

- $$\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)\frac{\beta^2-(\beta^2+1)}{\beta-\sqrt{\beta^2+1}}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}=\sqrt{\beta^2+1}-\beta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha+\beta=\sqrt{\beta^2+1}-\sqrt{\alpha^2+1} \qquad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και παίρνουμε $\alpha+\beta=0$.

1.26 Η ανισότητα γίνεται:

$$x^3(x-y)^3+y^3(y-z)^3+z^3(z-x)^3\geq$$

$$\geq 3xyz(x-y)(y-z)(z-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-xy)^3+(y^2-yz)^3+(z^2-zx)^3\geq$$

$$\geq 3(x^2-xy)(y^2-yz)(z^2-zx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma \quad (1),$$

όπου $\alpha = x^2-xy$, $\beta = y^2-yz$, $\gamma = z^2-zx$. Όμως:

$$\alpha+\beta+\gamma = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0,$$

αφού ισχύει η βασική ανισότητα:

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx.$$

Έτσι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma =$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha) \geq 0.$$

1.27 Παρατηρούμε:

$$1+\frac{1}{(\kappa-1)^2}+\frac{1}{\kappa^2}=$$

$$=\frac{\kappa^2(\kappa-1)^2+\kappa^2+(\kappa-1)^2}{\kappa^2(\kappa-1)^2}=$$

$$=\frac{\kappa^2(\kappa-1)^2+\kappa^2+(\kappa^2-2\kappa+1)}{\kappa^2(\kappa-1)^2}=$$

$$=\frac{\kappa^2(\kappa-1)^2+(2\kappa^2-2\kappa)+1}{\kappa^2(\kappa-1)^2}=$$

$$=\frac{\kappa^2(\kappa-1)^2+2\kappa(\kappa-1)+1}{\kappa^2(\kappa-1)^2}=$$

$$=\frac{\left(\kappa(\kappa-1)+1\right)^2}{\kappa^2(\kappa-1)^2}=\left(\frac{\kappa(\kappa-1)+1}{\kappa(\kappa-1)}\right)^2=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa}\right)^2.$$

Άρα ο τυχαίος όρος έχει τη μορφή:

$$1+\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa}.$$

Έτσι:

$$A=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{\nu-1}-\frac{1}{\nu}\right)=$$

$$=(\nu-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu}=(\nu-2)+\frac{\nu-2}{2\nu}=$$

$$=(\nu-2)\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)=\frac{(\nu-2)(2\nu+1)}{2\nu}.$$

1.28 Αφαιρούμε ανά δύο τις εξισώσεις και παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y+z)=4 \\ (y-z)(x+y+z)=-6 \\ (z-x)(x+y+z)=2 \end{cases}.$$

Οι σχέσεις αυτές δίνουν:

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{x-y}{4}, \quad \frac{1}{x+y+z}=\frac{y-z}{-6},$$

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{z-x}{2}.$$

Άρα:

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{-6}=\frac{z-x}{2}=\lambda \quad (1).$$

Αν προσθέσουμε τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος παίρνουμε:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=14 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (4\lambda)^2+(-6\lambda)^2+(2\lambda)^2=14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 56\lambda^2=14 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda=\frac{1}{2} \;\text{ ή }\; \lambda=-\frac{1}{2}\right).$$

- Αν $\lambda=\frac{1}{2}$, παίρνουμε τελικά:

$$(x, y, z)=(1, -1, 2).$$

- Αν $\lambda=-\frac{1}{2}$, βρίσκουμε:

$$(x, y, z)=(-1, 1, -2).$$

Σχόλιο

Για $\lambda=\frac{1}{2}$, *είναι:*

$$\begin{cases} x-y=2 \\ y-z=-3 \\ z-x=1 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1+x \\ y=z-3=1+x-3=x-2 \\ x+(x-2)+(1+x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1+x \\ y=x-2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=-1 \\ x=1 \end{cases}.$$

2^o Λύκειο Χαλκίδας

Μαθηματική Ομάδα

Β. Θέματα ΕΜΕ- Γεωμετρία – Επιλογές

Ασκήσεις

1.29 Αν ελαττώσουμε την πλευρά α ενός τετραγώνου κατά 1, τότε το νέο τετράγωνο έχει περίμετρο αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου. Να βρείτε την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

(Θαλής – 2002)

1.30 Σε δύο γωνίες $\text{A}\hat{\text{O}}\text{B}$ και $\Gamma\hat{\text{O}}\Delta$ οι ΟΑ, ΟΔ είναι αντικείμενες ημιευθείες, οι ΟΒ, ΟΓ είναι κάθετες και η ΟΓ είναι εσωτερική της γωνίας $\text{A}\hat{\text{O}}\text{B}$. Να βρείτε το άθροισμα των δύο αυτών γωνιών.

(Θαλής – 1999)

1.31 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α. Να αποδείξετε ότι:

$$\beta^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^4 \geq \frac{3}{4}\alpha^4.$$

(Ευκλείδης – 2004)

1.32 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{AB}=\text{A}\Gamma)$ με $\hat{\text{A}}<90^0$ και τα σημεία Δ, Ε στην πλευρά ΑΓ, ώστε $\text{EB}=\text{E}\Delta$ και $\text{E}\hat{\text{B}}\Gamma=\Delta\hat{\text{B}}\text{A}$. Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{\text{B}}\Gamma=60^o$.

(Θαλής – 1997)

1.33 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\text{A}}=108^o$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΓΔ και την κάθετη προς την ΓΔ στο Δ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\text{BE}=\text{A}\Delta$.

(Ευκλείδης – 1997)

1.34 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ. Η κάθετη στο Μ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Αν τα τρίγωνα ΔΑΓ και ΔΜΒ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι $\hat{\text{B}}=30^o$.

(Θαλής – 2002)

1.35 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{AB}<\text{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Έστω Δ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\text{BA}\Gamma}$ και Ε η προβολή του Δ στην ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\text{AB}+\text{AE}=\text{E}\Gamma$.

(Θαλής – 1999)

1.36 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{AB}=\text{A}\Gamma)$ με έγκεντρο Ι και περίκεντρο Ο. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma\text{I}\perp\Delta\text{O}$. Να αποδείξετε ότι $\text{A}\Delta=\Delta\text{I}$.

(Θαλής – 1998)

1.37 Δίνεται τμήμα ΑΒ και τα σημεία Θ, Γ αυτού, ώστε $\text{A}\Theta=\Theta\Gamma=\Gamma\text{B}$. Εκατέρωθεν της ευθείας ΑΒ θεωρούμε τα τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΒΘΗΖ. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ, ΔΖ, ΕΗ συντρέχουν.

(Ευκλείδης – 2000)

1.38 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $\Delta\text{E}=\Delta\text{A}$. Η ΑΓ τέμνει την ΒΕ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΖ διχοτομεί την πλευρά ΒΓ.

(Θαλής – 2002)

1.39 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{B}\Gamma=2\text{AB}$ η διχοτόμος ΒΔ είναι ίση με την ΔΓ. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Θαλής – 2003)

1.40 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά α και τα σημεία Ε, Ζ των πλευρών ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε το τρίγωνο ΓΕΖ να είναι ισόπλευρο με πλευρά α. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.

(Ευκλείδης – 2009)

1.41 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 120^o$ και η διάμεσος ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ. Η ευθεία ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο Ε. Οι ευθείες ΒΑ, ΕΓ τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $Z\Delta \perp BE$, β) $Z\Delta = B\Gamma$.

(Αρχιμήδης Νέων – 2010

Βιβλίο του Καθηγητή

Μαθηματική Ομάδα

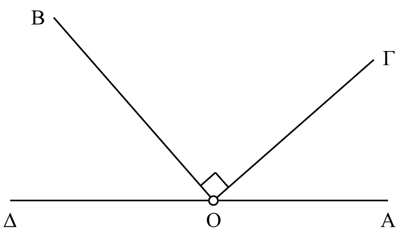
Β. Υποδείξεις – Λύσεις

1.29 Πρέπει $\alpha^2 = 4(\alpha - 1)$, οπότε:

$$\alpha^2 = 4\alpha - 4 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 .$$

1.30 Έχουμε:



$$A\hat{O}B + \Gamma\hat{O}\Delta =$$

$$= (A\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}B) + (\Gamma\hat{O}B + B\hat{O}\Delta) =$$

$$= (A\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}B + B\hat{O}\Delta) + \Gamma\hat{O}B =$$

$$= 180^{o} + 90^{o} = 270^{o} .$$

1.31 Επειδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\beta^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4 \geq \frac{3}{4}\left(\beta^2 + \gamma^2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\beta^4 + 4\beta^2\gamma^2 + 4\gamma^4 \geq 3\beta^4 + 3\gamma^4 + 6\beta^2\gamma^2 \Leftrightarrow$$

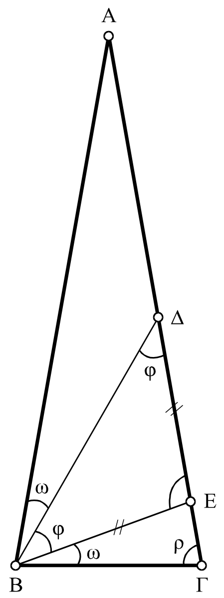
$$\Leftrightarrow \beta^4 - 2\beta^2\gamma^2 + \gamma^4 \geq 0 \Leftrightarrow (\beta^2 - \gamma^2)^2 \geq 0 ,$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = \gamma \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma}$ – ισοσκελές και ορθογώνιο.

1.32 Έστω $\hat{\Gamma} = \rho$, $E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}A = \omega$ και $E\hat{B}\Delta = E\hat{\Delta}B = \varphi$.



- $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \rho = \varphi + 2\omega$ (1).
- $\hat{E} = E\hat{B}\Gamma + E\hat{\Gamma}B \Leftrightarrow 180^{o} - 2\varphi = \omega + \rho \Leftrightarrow$

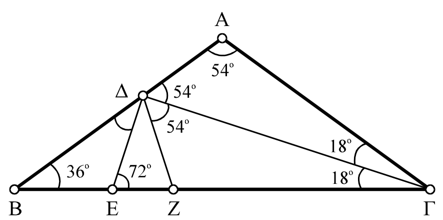
$$\Leftrightarrow 180^{o} - 2\varphi \overset{(1)}{=} \omega + (\varphi + 2\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\varphi + 3\omega = 180^{o} \Leftrightarrow \varphi + \omega = 60^{o} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 60^{o} .$$

1.33 Είναι $A = 108^{o}$, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^{o}$. Επειδή $\Delta E \perp \Delta\Gamma$, είναι:

$\Delta\hat{E}\Gamma = 90^{o} - 18^{o} = 72^{o}$. **SXHMA ALLAGH**



Είναι επίσης:

- $A\hat{\Delta}\Gamma = 36^o + 18^o = 54^o$.
- $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{E}\Gamma - \hat{B} = 72^o - 36^o = 36^o$.

Άρα $E\hat{\Delta}B = \hat{B} = 36^o$, οπότε $EB = E\Delta$.

Φέρουμε την ΔΖ, ώστε $\Gamma\hat{\Delta}Z = 54^o$. Έτσι:

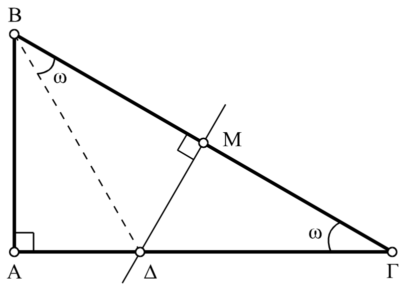
$$\Delta\hat{Z}E = 54^o + 18^o = 72^o = \Delta\hat{E}Z.$$

Άρα $\Delta E = \Delta Z$. Είναι όμως $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma} = \overset{\Delta}{Z\Delta\Gamma}$, οπότε:

$$A\Delta = \Delta Z = \Delta E = BE.$$

1.34 Επειδή η ΔΜ είναι μεσοκάθετη του ΒΓ, είναι $\Delta\Gamma = \Delta B$. Έτσι $\hat{B} = \Delta\hat{\Gamma}B = \omega$. Είναι επίσης $\overset{\Delta}{\Delta MB} = \overset{\Delta}{\Delta M\Gamma}$. Άρα:

$$\overset{\Delta}{\Delta A\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta MB} = \overset{\Delta}{\Delta M\Gamma}.$$ **SXHMA ALLAGH**



Επειδή $\overset{\Delta}{\Delta A\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta M\Gamma}$, είναι:

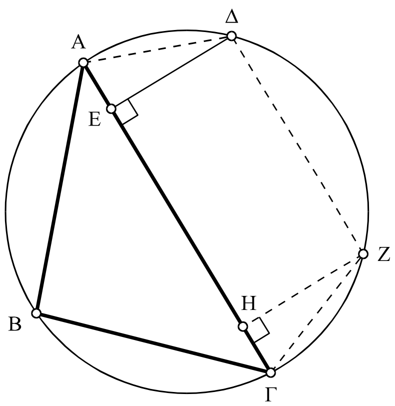
$$\Delta\hat{\Gamma}A = \Delta\hat{\Gamma}B = \omega,$$

οπότε $\hat{\Gamma} = 2\omega$. Αλλά:

$$\hat{\Gamma} + \hat{B} = 90^o \Leftrightarrow 2\omega + \omega = 90^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = 30^o \Leftrightarrow B = 30^o.$$

1.35 Είναι ΔΖ // ΑΓ. Τότε:



- $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma Z}$, οπότε $\overset{\Delta}{A\Delta E} = \overset{\Delta}{\Gamma ZH}$ και έτσι $AE = \Gamma H$.
- Το Δ είναι μέσο του $\overset{\frown}{BA\Gamma}$, οπότε:

$$\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Delta Z} + \overset{\frown}{Z\Gamma} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{\Delta Z}.$$

- Αφού $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{\Delta Z}$, είναι $AB = \Delta Z = EH$, οπότε:

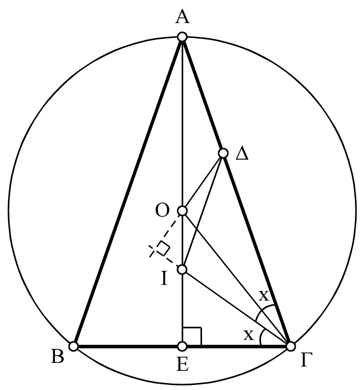
$$AB + AE = \Delta Z + H\Gamma = EH + H\Gamma = E\Gamma.$$

Σημείωση

Υπάρχουν κι άλλες λύσεις. Π.χ., αν $\Delta K \perp BA$, *τότε* $\overset{\Delta}{\Delta AK} = \overset{\Delta}{\Delta AE}$ *και* $\overset{\Delta}{BK\Delta} = \overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$.

1.36 Τα σημεία Ο , Ι βρίσκονται στο ύψος ΑΕ. Είναι:

$$E\hat{I}\Gamma = 90^o - E\hat{\Gamma}I = 90^o - I\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Delta}\Gamma.$$

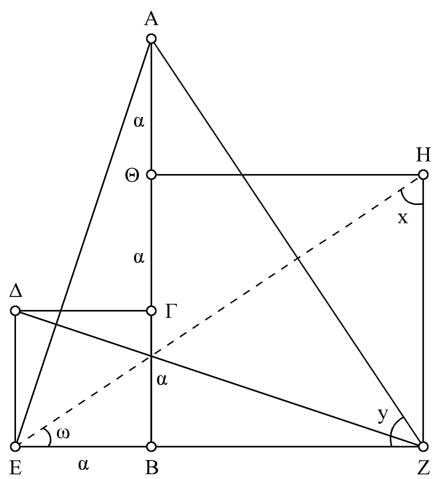


Άρα το τετράπλευρο ΟΙΓΔ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$O\hat{I}\Delta = O\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Gamma}A = O\hat{A}\Gamma = O\hat{A}\Delta.$$

Αφού $O\hat{I}\Delta = O\hat{A}\Delta$, το $\overset{\Delta}{\Delta AI}$ είναι ισοσκελές. Άρα $\Delta A = \Delta I$.

1.37 Φέρουμε τις ΑΕ, ΑΖ.



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ, ΕΖΗ είναι ίσα, διότι $BZ = ZH = 2\alpha$ και $AB = EZ = 3\alpha$. Έτσι $x = y$. Επειδή:

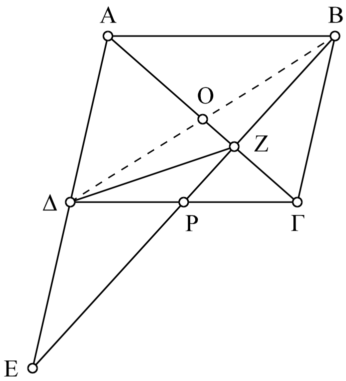
$$x + \omega = 90^o,$$

είναι και:

$$y + \omega = 90^o .$$

Άρα $ΕΗ \perp ΑΖ$. Στο τρίγωνο λοιπόν ΑΕΖ είναι: $ΑΒ \perp ΕΖ$, $ΕΗ \perp ΑΖ$ και $ΖΔ \perp ΑΕ$. Άρα οι ευθείες ΑΒ, ΔΖ, ΕΗ συντρέχουν στο ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΕΖ.

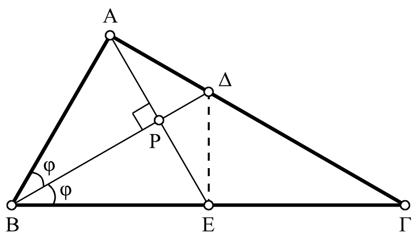
1.38 Φέρνουμε και τη διαγώνιο ΒΔ και έστω Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ.



- Στο $\overset{\Delta}{ΕΑΒ}$ το Δ είναι μέσο του ΑΕ και ΔΡ // ΑΒ. Άρα το Ρ είναι μέσο του ΒΕ.
- Στο $\overset{\Delta}{ΒΓΔ}$ η ΒΡ είναι διάμεσος, όπως επίσης και η ΓΟ. Άρα το Ζ είναι βαρύκεντρο, οπότε η ευθεία ΔΖ διχοτομεί την ΒΓ, ως ευθεία της τρίτης διαμέσου.

1.39 Η κάθετη από το Α προς τη ΒΔ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Επειδή στο $\overset{\Delta}{ΒΑΕ}$ η ΒΡ είναι ύψος και διχοτόμος, το $\overset{\Delta}{ΒΑΕ}$ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$ΒΑ = ΒΕ .$$



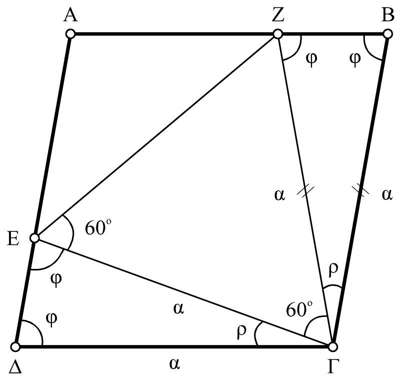
Επειδή $ΒΓ = 2ΑΒ$, είναι $ΒΓ = 2ΒΕ$, οπότε $ΕΒ = ΕΓ$.
Είναι $ΔΒ = ΔΓ$, οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΒΓ η ΔΕ είναι διάμεσος, άρα και ύψος. Τα τρίγωνα ΒΑΔ, ΒΕΔ είναι ίσα διότι:

$$ΒΑ = ΒΕ,\ ΒΔ - \text{κοινή},\ Δ\hat{Β}Α = Δ\hat{Β}Ε = \varphi .$$

Άρα $Β\hat{Α}Δ = 90^o$ και επειδή $ΒΓ = 2ΑΒ$, είναι $\hat{Γ} = 30^o$ και έτσι $\hat{Β} = 60^o$.

1.40 Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, είναι $\hat{Β} = \hat{Δ} = \varphi$. Είναι όμως:

$$ΓΔ = ΓΕ = ΓΒ = ΓΖ = \alpha ,$$



οπότε τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΓΒΖ είναι ισοσκελή και έτσι:

$$Γ\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Ε}Δ = Γ\hat{Β}Ζ = Γ\hat{Ζ}Β = \varphi .$$

Άρα είναι και:

$$Δ\hat{Γ}Ε = Β\hat{Γ}Ζ = \rho = 180^o - 2\varphi ,$$

διότι στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΓΔΕ}$ είναι:

$$Γ\hat{Δ}Ε + Γ\hat{Ε}Δ + Δ\hat{Γ}Ε = 180^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi + \varphi + \rho = 180^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = 180^o - 2\varphi \qquad (1).$$

Είναι επίσης ΕΔ // ΒΓ, οπότε:

$$Δ\hat{Ε}Γ = Ε\hat{Γ}Β \Leftrightarrow \varphi = 60^o + \rho \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = 60^o + (180^o - 2\varphi) \Leftrightarrow 3\varphi = 240^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = 80^o .$$

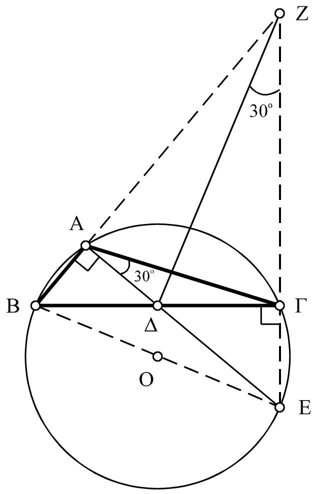
Άρα:

$$\hat{Β} = \hat{Δ} = 80^o \text{ και}$$

$$\hat{Α} = \hat{Γ} = 180^o - 80^o = 100^o$$

1.41 **α)** Επειδή $Β\hat{Α}Ε = 90^o$, η ΒΕ είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα:

$$Β\hat{Γ}Ε = Β\hat{Α}Ε = 90^o .$$



Στο τρίγωνο λοιπόν ΖΒΕ τα ΒΓ, ΕΑ είναι ύψη, οπότε το Δ είναι ορθόκεντρο. Άρα η ευθεία ΖΔ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους, δηλαδή $Z\Delta \perp BE$.

β) Επειδή $Z\hat{A}\Delta = Z\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$, τα σημεία Ζ, Α, Δ, Γ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το μέσο του ΖΔ (διότι η διάμεσος ορθογωνίου προς την υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας). Στον κύκλο λοιπόν (Ζ,Α,Δ,Γ) η γωνία $\Delta\hat{Z}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο και έτσι:

$$\Delta\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma = 30^o .$$

Αλλά τότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΓΔ θα είναι:

$$Z\Delta = 2\Gamma\Delta = B\Gamma ,$$

διότι αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία είναι 30^o, τότε η απέναντί της πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΘΑΛΗΣ 2006 - 2015

♥♥♥♥♥♥♥

ΘΕΜΑΤΑ ΕΜΕ

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Αν x > 0, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{x^2+3x+3}{x+1}+\frac{1}{x}>4$.

(1990-1991)

2. Αν α > 0, β > 0 να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\le\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$.

(1995-1996)

3. Αν α, β και γ τα μήκη πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε την ανισότητα:
$(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2\le 4\beta^2\gamma^2$.

(1996-1997)

4. Αν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, α + b + c = 1 και $\alpha^2+b^2+c^2=1$, με α, b, c ≠ 0, να αποδείξετε ότι:

$$xy+yz+zx=0$$

(1997-1998)

5. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $x^2+x=\frac{42}{x^2+x+1}$.

(1998-1999)

6. Έστω ότι για θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)=0.$$

Να αποδειχτεί ότι α = β = γ.

(1998-1999)

7. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού.

Να βρεθεί ο αριθμός.

(2000-2001)

8. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι xyz = 1, να υπολογίσετε την τιμή

της παράστασης $K = \dfrac{1}{y+1-\dfrac{y}{x+1}} + \dfrac{1}{z+1-\dfrac{z}{y+1}} + \dfrac{1}{x+1-\dfrac{x}{z+1}}$.

(2001-2002)

9. Να λυθεί η εξίσωση $3(1 + a^2 + a^4)\, x = (1 + a + a^2)^2\, x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1$

ως προς x, θεωρώντας το a ως παράμετρο.

(2001-2002)

10. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό Μ, ο οποίος έχει την ιδιότητα: για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με α + β = 1 ισχύει ότι:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\beta}\right) \geq M.$$

(2001-2002)

11. Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς α, με α > 1. Το τετράγωνο που έχει πλευρά κατά 1 μικρότερη του α, έχει περίμετρο ίση αριθμητικά προς το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου.
Να βρεθεί η πλευρά α.

(2002-2003)

12. Οι αριθμοί x, y, z, w έχουν την ιδιότητα:
Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς και από το άθροισμα που θα προκύψει αφαιρέσουμε τον αριθμό 5, προκύπτει πάντοτε ο αριθμός 2002.
Να υπολογίσετε το άθροισμα x + y + z + w.

(2002-2003)

13. Το τετράγωνο ενός αριθμού ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 72. Επιπλέον, αν από το 60 αφαιρέσουμε το διπλάσιο του αριθμού, λαμβάνουμε αριθμό μικρότερο του 52.
Να βρεθεί ο αριθμός.

(2003-2004)

14. Αν x, y, a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x \neq y$, $x \neq 2y$, $y \neq 2x$,

$a \neq \pm\, 3\beta$ και $\dfrac{2x-y}{\alpha+3\beta} = \dfrac{2y-x}{\alpha-3\beta} = \lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) x + y = 2λa και x − y = 2λβ

β) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \geq 1$.

(2003-2004)

15. Το τετράγωνο ενός αριθμού x ισούται με το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 8. Επιπλέον το διπλάσιο του αριθμού είναι μεγαλύτερο του –2. Να βρεθεί ο αριθμός x .

(2004-2005)

16. Αν το τετράγωνο του αθροίσματος των πραγματικών αριθμών x , y και z ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων τους και επιπλέον ισχύει $x + 2y + 3z = 60$, να βρείτε τους αριθμούς x, y και z .

(2004-2005)

17. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$ είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

(2005-2006)

18. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

(2005-2006)

19. Να αναλυθεί το πολυώνυμο $x^6 - 2x^5 + x^2 - x - 2$ σε γινόμενο τριών πολυωνύμων θετικού βαθμού.

(2005-2006)

20. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090 €.
Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

(2006-2007)

21. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x + 3) = \lambda^3 + 2\lambda x - 2$ για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

(2006-2007)

22. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

(2006-2007)

23. Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.
Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: *Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς* x *και* y *που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον* x *κατά* 50 *και αυξήσω τον* y *κατά* 40, *τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται.*
Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: *Αν αυξήσεις τον αριθμό* x *κατά* 100 *και μειώσεις τον αριθμό* y *κατά* 20, *τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται;*
Ο Γιάννης απαντάει: *Πράγματι, αυτό ισχύει.*
Η Μαρία καταλήγει: *Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.*

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

(2007-2008)

24. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R$ με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) \neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(\beta-1)(\beta+1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} .$$

(2007-2008)

25. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x . Να βρεθεί ο αριθμός x .

(2008-2009)

26. Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2 , y^2 - z = x^2 , z^2 - x = y^2 ,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. **(β)** Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

(2008-2009)

27. Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

(2009-2010)

28. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης - ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14 , \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4} .$$

(2010-2011)

29. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

(2010-2011)

30. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y} \quad , \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

(2010-2011)

31. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2} \end{cases}.$$

(2011-2012)

32. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A\,(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(1+x^2)}.$$

(2011-2012)

33. Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης x(x – 2) = 24 και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

(2012-2013)

34. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K(a,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta}\text{ , αν } \alpha+\beta\neq 0 \text{ και } \alpha+\beta\neq 1 .$$

(2012-2013)

35. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

(2012-2013)

36. Αν τα συστήματα : $(\Sigma_1)\ \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ και $(\Sigma_2)\ \begin{cases} \alpha x+\beta y=4 \\ 2\alpha x+3\beta y=-8 \end{cases}$ έχουν την ίδια λύση (x, y) , να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

(2013-2014)

37. Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y z και ισχύει ότι: z =2(x + y) και z=3(x – y).

(α) Να αποδείξετε ότι: $y<x<z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) , για την οποία: $x^2+y^2+z^2=680$.

(2013-2014)

38. Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot(2014^2+3)\cdot(5\cdot 2014^2+1)}{(5\cdot 2014^2+1)^2-(4\cdot 2014)^2}$$

(2014-2015)

39. Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

(2014-2015)

40. Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=(x^2+y^2+xy)^2$ και $B=2\cdot\left[(x^2+y^2+2xy)^2+x^4+y^4\right]$, όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{B}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y .

(2014-2015)

41. Να λύσετε την ανίσωση: $2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x-1}{4}-\frac{3}{8}>\frac{x-1}{4}$ και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

(2015-2016)

42. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y-1=6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{4}{y+2}=11 \end{cases}$

(2015-2016)

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Ένα τετράγωνο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ ώστε οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν να βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, και ΔΑ αντίστοιχα. Αν ο λόγος του εμβαδού του ΚΛΜΝ προς το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι λ, να βρείτε το λόγο των μηκών των τμημάτων στα οποία διαιρούνται οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ από τις κορυφές του άλλου τετραγώνου.

(1995-1996)

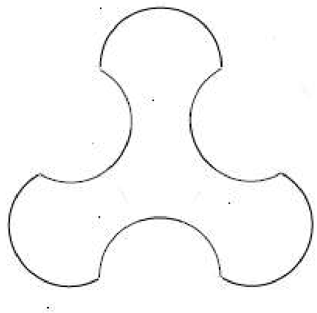
2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Α η ορθή γωνία, έχουμε ΑΒ = 600 m. Πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε ΑΔ = 150 m. Να βρεθεί το μήκος ΓΔ αν είναι ΑΒ + ΑΔ = ΓΔ + ΒΓ.

(1996-1997)

3. Στην πλευρά BC ισοσκελούς τριγώνου ABC, (AB = BC), θεωρούμε σημεία M , N τέτοια ώστε NM = AM, και $M\hat{A}C = B\hat{A}N$. Να υπολογίσετε την γωνία $C\hat{A}N$.

(1997-1998)

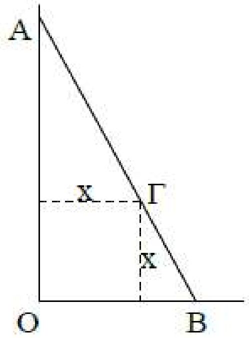
4. Μια περιοχή του επιπέδου περικλείεται από 6 ημικύκλια ακτίνας 1 cm όπως στο σχήμα. Ν υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής αυτής.



(1998-1999)

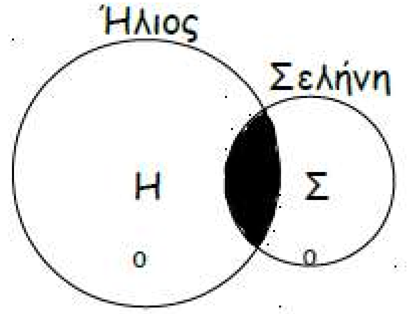
5. Μια σκάλα ακουμπά στο έδαφος και στον τοίχο. Το σημείο επαφής Α στον τοίχο βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Επιπλέον υπάρχει ένα σημείο της σκάλας που απέχει ίση απόσταση x από τον τοίχο και το έδαφος.

Να βρείτε το μήκος της σκάλας συναρτήσει των h και x.



(1999-2000)

6. Στην πρόσφατη έκλειψη Ηλίου στη χώρα μας ο δίσκος της Σελήνης κάλυπτε το δίσκο του Ήλιου έτσι ώστε η καλυπτόμενη επιφάνεια να μεγαλώνει σιγά - σιγά.
Το σχήμα μας δείχνει μια φάση της κάλυψης αυτής.
Να αποδείξετε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή του φαινομένου, η διαφορά μεταξύ των μη επικαλυπτόμενων επιφανειών $Η_0$ - $Σ_0$ παρέμενε σταθερή.



(1999-2000)

7. α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισούται με 360^o.
β) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οι εξωτερικές γωνίες Αεξ, Βεξ, Γεξ, Δεξ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 8, 10, 12, αντιστοίχως. Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου.

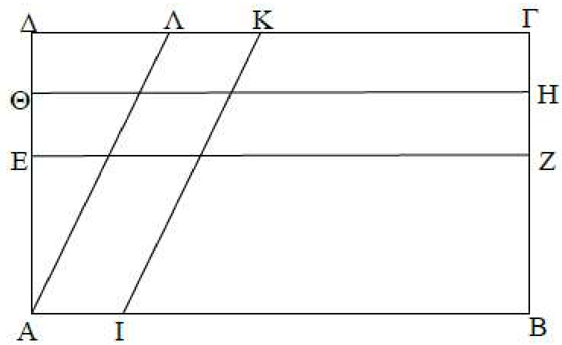
(2000-2001)

8. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και σημείο Β στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο μέρος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

Αν οι ΑΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ζ, να βρείτε τη γωνία $Α\hat{Ζ}Δ$.

(2001-2002)

9. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ = α και ΒΓ = β. Από το οικόπεδο θα κοπούν δυο δρόμοι ΕΖΗΘ και ΑΙΚΛ. Ο δρόμος ΕΖΗΘ σχήματος ορθογωνίου έχει πλάτος ΖΗ = y, ενώ ο δρόμος ΑΙΚΛ σχήματος παραλληλογράμμου έχει πλευρά ΑΙ = x.



α) Να εκφράσετε το εμβαδό του οικοπέδου που απομένει μετά την αποκοπή των δυο δρόμων, ως συνάρτηση των α, β, x και y.

β) Να εκφράσετε το πλάτος d του δρόμου ΑΙΚΛ ως συνάρτηση του x, αν είναι γνωστό ότι $Δ\hat{Α}Λ = 30^o$.

(2002-2003)

10. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ) οι διαγώνιες τέμνονται στο Ε. Αν είναι (ΑΒΕ) = 72 m^2 και (ΓΔΕ) = 50 m^2, να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

(2003-2004)

11. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$, ΑΔ = α, ΒΓ = 2α και ΓΔ = $\frac{3}{2}\alpha$, του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές .

(β) Να αποδείξετε ότι η ΔΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}E$.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ και το λόγο $\frac{(EB\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$.

(2004-2005)

12. Να αποδειχθεί ότι αν η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δυο απέναντι πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου διαιρεί το τετράπλευρο σε δυο ισεμβαδικά τετράπλευρα, τότε το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

(2005-2006)

13. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > \hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται στο Ι. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ − ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : ΙΔ = ΙΑ.

(2006-2007)

14. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 45^o$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την ΑΓ στο Α η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ε. Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓ με το σημείο Α να βρίσκεται μεταξύ των Ε και Δ. Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς ΑΓ = β :

(α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ,

(β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ.

(2007-2008)

15. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).

(2008-2009)

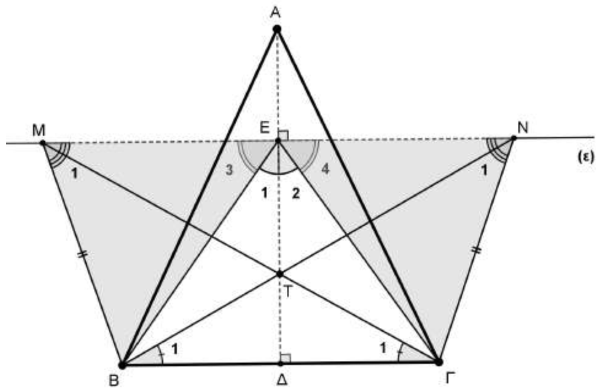
16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν ΔΕ = ΔΖ και $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν ΔΕ = ΔΖ και $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

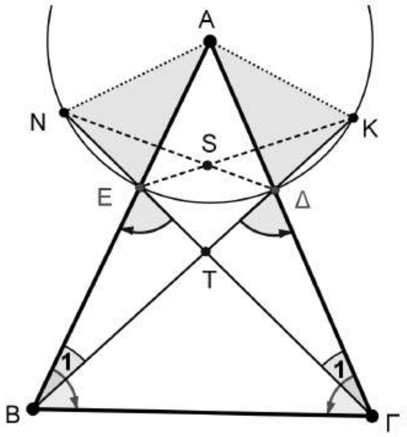
(2009-2010)

17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ =ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχόν σημείο Ε του ύψους ΑΔ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Μ , Ν έτσι ώστε ΕΜ = ΕΝ και ΜΒ < ΜΓ. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ και ΝΒ τέμνονται πάνω στο ύψος ΑΔ.

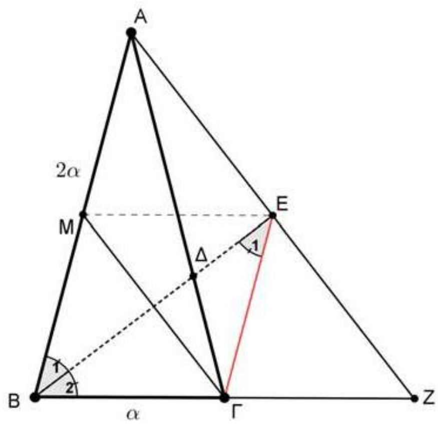


(2010-2011)

18. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ρ < ΑΒ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ , αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ , ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ , Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ , ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ , ΕΚ , να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.



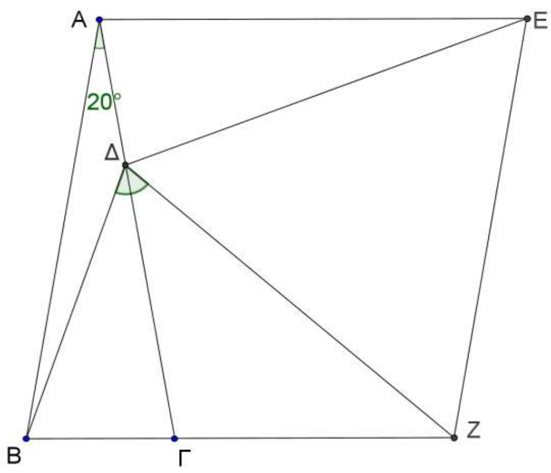
(2011-2012)



19. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = α και ΑΒ = ΑΓ =2α . Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

(2012-2013)

20. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Α= 20^o . Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ . Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε , ΑΕ // ΒΓ , ΑΕ = ΑΒ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στην συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ΒΔΖ.



(2013-2014)

21. Θεωρούμε τετράπλευρο ABCD με τη γωνία $\hat{A} = 100^o$ και $\hat{D} = 40^o$. Αν η DB είναι η διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB = DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

(2014-2015)

22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Α} = 30^o$. Έστω $Δ, Ζ$ τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $ΒΔΕ$ και τετράγωνο $ΑΖΗΘ$. Η μεσοκάθετη του $ΒΔ$, τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Τ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $ΑΕΤ$ είναι ισόπλευρο.

(β) τα τρίγωνα $ΑΤΒ$ και $ΔΘΤ$ είναι ίσα.

(2015-2016)

Γ. ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Υπάρχει τρίγωνο με όλες τις πλευρές του και ένα ύψος του να έχουν ακέραια μήκη και η περίμετρός του να είναι 21;

(1995-1996)

2. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός n τέτοιος ώστε ο $n^3 + 3n$ να είναι περιττός.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$5x^3 - 4y^2 - 6xy + 15x + 6y - 5 = 0.$$

(1996-1997)

3. Αν οι φυσικοί αριθμοί a , $a + d$, $a + 2d$, είναι πρώτοι, μεγαλύτεροι του 3, να αποδείξετε ότι το 6 διαιρεί το d.

(1997-1998)

4. Ο καθηγητής έγραψε το τριώνυμο $x^2 + 10x + 20$ στον πίνακα. Στη συνέχεια κάποιοι μαθητές είτε πρόσθεταν 1, είτε αφαιρούσαν 1 , (όχι και τα δύο ταυτόχρονα), από τον συντελεστή του x, ή από τον σταθερό όρο και μετά από λίγο, εμφανίσθηκε το τριώνυμο : $x^2 + 20x + 10$. Να αποδείξετε ότι κάποιο από τα τριώνυμα που εμφανίσθηκαν διαδοχικά στον πίνακα είχε ακέραιες ρίζες.

(1997-1998)

5. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί ν για τους οποίους ο αριθμός $2ν + 1$ διαιρεί τον αριθμό

$$ν^2 + ν - 2.$$

(1998-1999)

6. Το άθροισμα δυο ακεραίων είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρεθούν οι αριθμοί.

(1999-2000)

7. Αν α περιττός ακέραιος, να δειχθεί ότι ο αριθμός $α^4 + 6α^2 - 7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.

(1999-2000)

8. Οι δυο διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι οι θετικοί ακέραιοι x και y. Αν αυξήσουμε τη μια διάσταση κατά 1 και την άλλη διάσταση κατά 2, τότε το ορθογώνιο που προκύπτει έχει εμβαδό διπλάσιο του αρχικού ορθογωνίου.
Να βρεθούν οι διαστάσεις x και y.

(2000-2001)

9. Μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό 2002 ως άθροισμα ενός τριψήφιου αριθμού και του κύβου του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού αυτού;

(2002-2003)

10. Να βρεθούν οι ακέραιοι α, β για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha = 2\beta^2 + 4\beta + 3.$$

(2003-2004)

11. Οι θετικοί ακέραιοι x, y με x > y είναι τέτοιοι ώστε

$$x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 = 49(x - y).$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x , y.

(2004-2005)

12. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$ είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

(2005-2006)

13. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$

(2007-2008)

14. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \le x \le y \le z$ και $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44$.

(2008-2009)

15. Αν οι αριθμοί μ ,ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι $4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \le 2^{\mu+\nu+1}$, να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $A = 2^\mu + 2^\nu$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

(2009-2010)

16. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2} + \frac{x}{4} = \kappa(x+2) - \frac{3(\kappa x - 1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

(2011-2012)

17. Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί A = 8x +1 και B = 2x – 3 είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

(2013-2014)

18. Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης $x + y + x^2 + y^2 = p$, όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

(2015-2016)

Δ. ΔΙΑΦΟΡΑ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ-ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ)

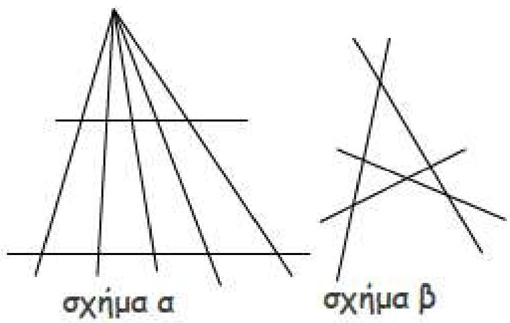
1. Έστω α, β, γ τρεις θετικοί αριθμοί. Ο α είναι κ% του β + γ και ο β είναι λ% του γ + α, όπου κ και λ πραγματικοί αριθμοί. Πόσο % του α + β είναι ο α;

(1990-1991)

2. Σε μια τάξη υπάρχουν 10 μαθητές που έχουν διαφορετικό ύψος. Ένας από αυτούς, που θα τον ονομάσουμε Α, έχει ύψος ίσο με το μέσο όρο του ύψους των 6 πιο κοντών, ενώ ένας άλλος, που θα τον ονομάσουμε Β, έχει ύψος ίσο με το μέσο όρο του ύψους και των 10 μαθητών. Ποιος είναι πιο κοντός, ο Α ή ο Β;
(Μέσο όρο ν αριθμών ονομάζουμε το πηλίκο του αθροίσματος των αριθμών δια του ν.)

(1990-1991)

3. α) Στο διπλανό σχήμα α, πόσα τρίγωνα υπάρχουν;
β) Στο διπλανό σχήμα β, υπάρχουν 4 τμήματα που καθένα τέμνει 3 ακριβώς τμήματα.
Μπορούμε να τοποθετήσουμε στο επίπεδο 9 τμήματα ώστε καθένα από αυτά να τέμνει ακριβώς 3 τμήματα από τα δοσμένα;



(1990-1991)

4. Δυο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:
Τους δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών, μεγαλύτερο από 6 (π.χ. ένα 100-γωνο). Κάθε παίκτης συνδέει δυο από τις κορυφές του πολυγώνου με ένα τμήμα το οποίο, όμως, να μην τέμνει κανένα από άλλα τέτοια τμήματα που οι παίκτες είχαν φέρει προηγουμένως. Θα χάσει ο παίκτης που πρώτος δε θα μπορέσει να φέρει ένα τέτοιο τμήμα.
Μπορεί ένας παίκτης να ακολουθήσει μια στρατηγική ώστε να νικήσει σίγουρα;

(1995-1996)

5. Επτά πόλεις $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ βρίσκονται, με αυτή τη διάταξη, πάνω σε μία ευθεία. Πού πρέπει να κτιστεί ένα εργοστάσιο, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τις επτά πόλεις να είναι το ελάχιστο δυνατό;

(1996-1997)

6. Σε μια τάξη Λυκείου διοργανώθηκε πρωτάθλημα σκακιού. Την πρώτη μέρα έγιναν μόνο κάποιοι αγώνες στους οποίους οι δυο αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Στους αγώνες αυτούς της πρώτης μέρας πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των κοριτσιών της τάξης. Αν η τάξη έχει συνολικά 34 παιδιά, να βρείτε:

α) πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη.

β) πόσα παιδιά δεν πήραν μέρος την πρώτη μέρα στους αγώνες.

(2000-2001)

7. Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία Τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή , όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

(2009-2010)

Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΘΑΛΗΣ 2006 - 2015

♥♥♥♥♥♥♥

ΘΕΜΑΤΑ ΕΜΕ

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Αν $x > 0$, τότε να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}+\dfrac{1}{x}>4$.

(1990-1991)

2. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \le \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\beta}} + \sqrt{\dfrac{\beta^2}{\alpha}}$.

(1995-1996)

3. Αν α, β και γ τα μήκη πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε την ανισότητα:
$(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2 \le 4\beta^2\gamma^2$.

(1996-1997)

4. Αν $\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, $\alpha + b + c = 1$ και $\alpha^2 + b^2 + c^2 = 1$, με $\alpha, b, c \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$xy + yz + zx = 0$$

(1997-1998)

5. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 + x = \dfrac{42}{x^2+x+1}$.

(1998-1999)

6. Έστω ότι για θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)=0.$$

Να αποδειχτεί ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

(1998-1999)

7. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού.
Να βρεθεί ο αριθμός.

(2000-2001)

8. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι xyz = 1, να υπολογίσετε την τιμή

της παράστασης $K = \dfrac{1}{y+1-\dfrac{y}{x+1}} + \dfrac{1}{z+1-\dfrac{z}{y+1}} + \dfrac{1}{x+1-\dfrac{x}{z+1}}$.

(2001-2002)

9. Να λυθεί η εξίσωση $3(1 + a^2 + a^4)\, x = (1 + a + a^2)^2\, x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1$

ως προς x, θεωρώντας το a ως παράμετρο.

(2001-2002)

10. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό Μ, ο οποίος έχει την ιδιότητα: για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με α + β = 1 ισχύει ότι:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\beta}\right) \geq M.$$

(2001-2002)

11. Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς α, με α > 1. Το τετράγωνο που έχει πλευρά κατά 1 μικρότερη του α, έχει περίμετρο ίση αριθμητικά προς το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου.
Να βρεθεί η πλευρά α.

(2002-2003)

12. Οι αριθμοί x, y, z, w έχουν την ιδιότητα:
Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς και από το άθροισμα που θα προκύψει αφαιρέσουμε τον αριθμό 5, προκύπτει πάντοτε ο αριθμός 2002.
Να υπολογίσετε το άθροισμα x + y + z + w.

(2002-2003)

13. Το τετράγωνο ενός αριθμού ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 72. Επιπλέον, αν από το 60 αφαιρέσουμε το διπλάσιο του αριθμού, λαμβάνουμε αριθμό μικρότερο του 52.
Να βρεθεί ο αριθμός.

(2003-2004)

14. Αν x, y, a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x \neq y$, $x \neq 2y$, $y \neq 2x$,

$a \neq \pm\ 3\beta$ και $\dfrac{2x-y}{\alpha+3\beta} = \dfrac{2y-x}{\alpha-3\beta} = \lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $x + y = 2\lambda a$ και $x - y = 2\lambda\beta$

β) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \geq 1$.

(2003-2004)

15. Το τετράγωνο ενός αριθμού x ισούται με το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 8.
Επιπλέον το διπλάσιο του αριθμού είναι μεγαλύτερο του –2. Να βρεθεί ο αριθμός x .

(2004-2005)

16. Αν το τετράγωνο του αθροίσματος των πραγματικών αριθμών x , y και z ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων τους και επιπλέον ισχύει $x + 2y + 3z = 60$, να βρείτε τους αριθμούς x, y και z .

(2004-2005)

17. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$ είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

(2005-2006)

18. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

(2005-2006)

19. Να αναλυθεί το πολυώνυμο $x^6 - 2x^5 + x^2 - x - 2$ σε γινόμενο τριών πολυωνύμων θετικού βαθμού.

(2005-2006)

20. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090 €.
Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

(2006-2007)

21. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x + 3) = \lambda^3 + 2\lambda x - 2$ για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

(2006-2007)

22. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

(2006-2007)

23. Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.
Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: *Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς* x *και* y *που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον* x *κατά* 50 *και αυξήσω τον* y *κατά* 40, *τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται.*
Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: *Αν αυξήσεις τον αριθμό* x *κατά* 100 *και μειώσεις τον αριθμό* y *κατά* 20, *τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται;*
Ο Γιάννης απαντάει: *Πράγματι, αυτό ισχύει.*
Η Μαρία καταλήγει: *Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.*
Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

(2007-2008)

24. Αν α , β , γ $\in$R με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(\beta-1)(\beta+1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\dfrac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$.

(2007-2008)

25. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x . Να βρεθεί ο αριθμός x .

(2008-2009)

26. Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2-y=z^2,\ y^2-z=x^2,\ z^2-x=y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3+y^3+z^3=3xyz$. **(β)** Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

(2008-2009)

27. Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

(2009-2010)

28. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης - ανίσωσης

$$x^2-5x=14,\ \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}.$$

(2010-2011)

29. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

(2010-2011)

30. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}\ ,\qquad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

(2010-2011)

31. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases}(x-10)(x^2-7x+10)=0\\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{cases}.$$

(2011-2012)

32. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A\,(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} - \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(1+x^2)}.$$

(2011-2012)

33. Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης x(x – 2) = 24 και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

(2012-2013)

34. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K(a,\beta) = \frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta}$$, αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

(2012-2013)

35. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

(2012-2013)

36. Αν τα συστήματα : (Σ1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ και (Σ2) $\begin{cases} \alpha x+\beta y=4 \\ 2\alpha x+3\beta y=-8 \end{cases}$ έχουν την ίδια λύση (x, y) , να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

(2013-2014)

37. Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y z και ισχύει ότι: z =2(x + y) και z=3(x – y).

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

(2013-2014)

38. Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2} + \frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2} - \frac{4\cdot 2014\cdot(2014^2+3)\cdot(5\cdot 2014^2+1)}{(5\cdot 2014^2+1)^2-(4\cdot 2014)^2}$$

(2014-2015)

39. Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

(2014-2015)

40. Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=(x^2+y^2+xy)^2$ και $B=2\cdot\left[(x^2+y^2+2xy)^2+x^4+y^4\right]$, όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{B}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y .

(2014-2015)

41. Να λύσετε την ανίσωση: $2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x-1}{4}-\frac{3}{8}>\frac{x-1}{4}$ και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

(2015-2016)

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y-1=6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{4}{y+2}=11 \end{cases}$

(2015-2016)

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Ένα τετράγωνο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ ώστε οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν να βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, και ΔΑ αντίστοιχα. Αν ο λόγος του εμβαδού του ΚΛΜΝ προς το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι λ, να βρείτε το λόγο των μηκών των τμημάτων στα οποία διαιρούνται οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ από τις κορυφές του άλλου τετραγώνου.

(1995-1996)

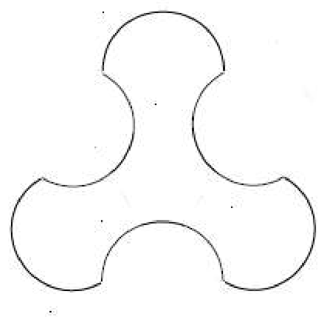
2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Α η ορθή γωνία, έχουμε ΑΒ = 600 m. Πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε ΑΔ = 150 m. Να βρεθεί το μήκος ΓΔ αν είναι ΑΒ + ΑΔ = ΓΔ + ΒΓ.

(1996-1997)

3. Στην πλευρά BC ισοσκελούς τριγώνου ABC, (AB = BC), θεωρούμε σημεία M , N τέτοια ώστε NM = AM, και $M\hat{A}C = B\hat{A}N$. Να υπολογίσετε την γωνία $C\hat{A}N$.

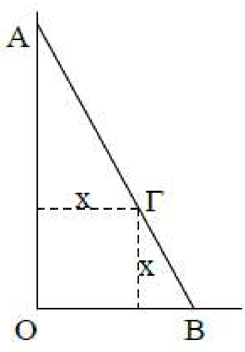
(1997-1998)

4. Μια περιοχή του επιπέδου περικλείεται από 6 ημικύκλια ακτίνας 1 cm όπως στο σχήμα. Ν υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής αυτής.



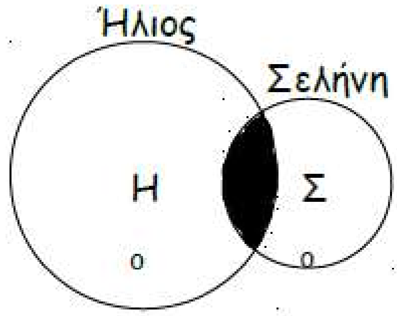
(1998-1999)

5. Μια σκάλα ακουμπά στο έδαφος και στον τοίχο. Το σημείο επαφής Α στον τοίχο βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Επιπλέον υπάρχει ένα σημείο της σκάλας που απέχει ίση απόσταση x από τον τοίχο και το έδαφος.
Να βρείτε το μήκος της σκάλας συναρτήσει των h και x.



(1999-2000)

6. Στην πρόσφατη έκλειψη Ηλίου στη χώρα μας ο δίσκος της Σελήνης κάλυπτε το δίσκο του Ήλιου έτσι ώστε η καλυπτόμενη επιφάνεια να μεγαλώνει σιγά - σιγά.
Το σχήμα μας δείχνει μια φάση της κάλυψης αυτής.
Να αποδείξετε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή του φαινομένου, η διαφορά μεταξύ των μη επικαλυπτόμενων επιφανειών $Η_0$ - $Σ_0$ παρέμενε σταθερή.



(1999-2000)

7. α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισούται με 360^o.
β) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οι εξωτερικές γωνίες Αεξ, Βεξ, Γεξ, Δεξ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 8, 10, 12, αντιστοίχως. Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου.

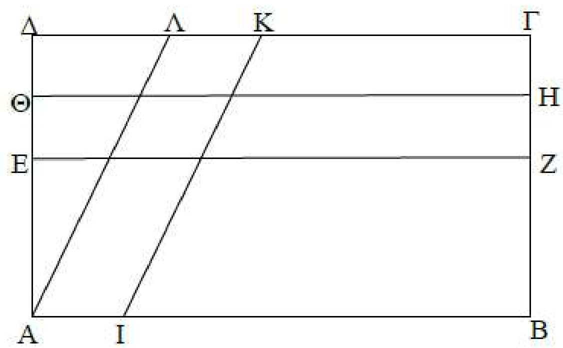
(2000-2001)

8. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και σημείο Β στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο μέρος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

Αν οι ΑΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ζ, να βρείτε τη γωνία $Α\hat{Ζ}Δ$.

(2001-2002)

9. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ = α και ΒΓ = β. Από το οικόπεδο θα κοπούν δυο δρόμοι ΕΖΗΘ και ΑΙΚΛ. Ο δρόμος ΕΖΗΘ σχήματος ορθογωνίου έχει πλάτος ΖΗ = y, ενώ ο δρόμος ΑΙΚΛ σχήματος παραλληλογράμμου έχει πλευρά ΑΙ = x.



α) Να εκφράσετε το εμβαδό του οικοπέδου που απομένει μετά την αποκοπή των δυο δρόμων, ως συνάρτηση των α, β, x και y.

β) Να εκφράσετε το πλάτος d του δρόμου ΑΙΚΛ ως συνάρτηση του x, αν είναι γνωστό ότι $Δ\hat{Α}Λ = 30^o$.

(2002-2003)

10. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ) οι διαγώνιες τέμνονται στο Ε. Αν είναι (ΑΒΕ) = 72 m^2 και (ΓΔΕ) = 50 m^2, να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

(2003-2004)

11. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$, ΑΔ = α, ΒΓ = 2α και ΓΔ = $\frac{3}{2}$α , του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές .

(β) Να αποδείξετε ότι η ΔΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}E$.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ και το λόγο $\frac{(EB\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$.

(2004-2005)

12. Να αποδειχθεί ότι αν η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δυο απέναντι πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου διαιρεί το τετράπλευρο σε δυο ισεμβαδικά τετράπλευρα, τότε το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

(2005-2006)

13. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > \hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται στο Ι. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ − ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : ΙΔ = ΙΑ.

(2006-2007)

14. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 45^o$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την ΑΓ στο Α η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ε. Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓ με το σημείο Α να βρίσκεται μεταξύ των Ε και Δ. Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς ΑΓ = β :

(α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ,

(β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ.

(2007-2008)

15. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν τη παρακάτω ιδιότητα: “*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*”.
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).

(2008-2009)

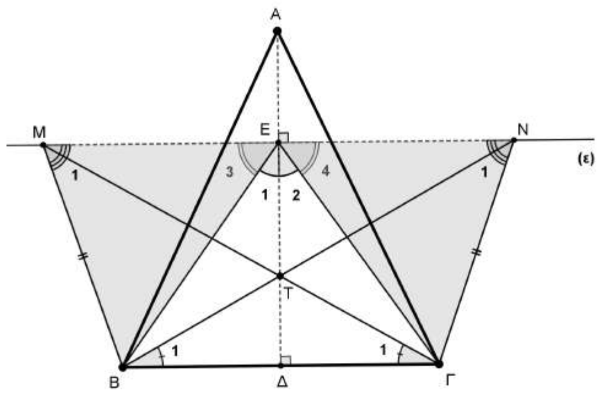
16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν ΔΕ = ΔΖ και $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν ΔΕ = ΔΖ και $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

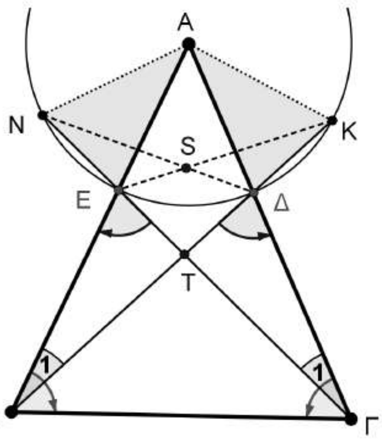
(2009-2010)

17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ =ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχόν σημείο Ε του ύψους ΑΔ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Μ , Ν έτσι ώστε ΕΜ = ΕΝ και ΜΒ < ΜΓ. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ και ΝΒ τέμνονται πάνω στο ύψος ΑΔ.



(2010-2011)

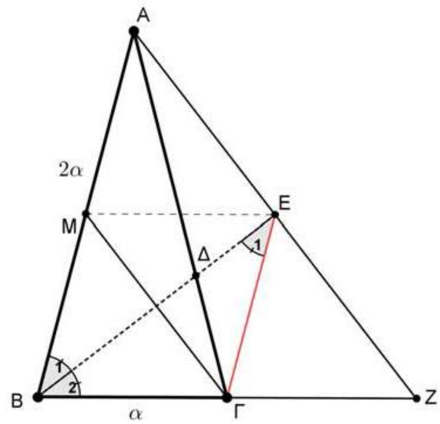
18. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ρ < ΑΒ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ , αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ , ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ , Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ , ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ , ΕΚ , να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.



(2011-2012)

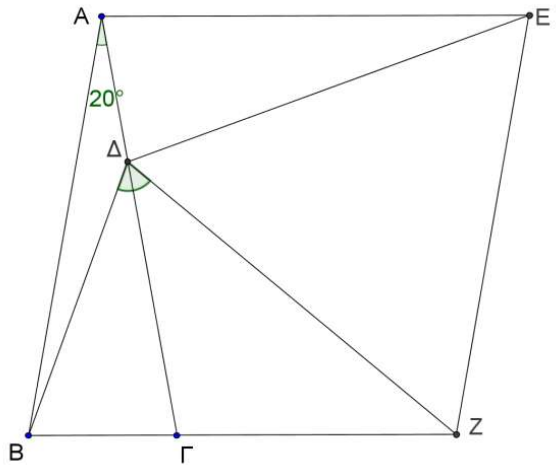
19. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = α και

ΑΒ = ΑΓ =2α . Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.



(2012-2013)

20. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Α= 20^o . Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ . Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε , ΑΕ // ΒΓ , ΑΕ = ΑΒ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στην συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ΒΔΖ.



(2013-2014)

21. Θεωρούμε τετράπλευρο ABCD με τη γωνία $\hat{A} = 100^o$ και $\hat{D} = 40^o$. Αν η DB είναι η διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB = DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

(2014-2015)

22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{A} = 30^o$. Έστω $Δ, Ζ$ τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $ΒΔΕ$ και τετράγωνο $ΑΖΗΘ$. Η μεσοκάθετη του $ΒΔ$, τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Τ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $ΑΕΤ$ είναι ισόπλευρο.

(β) τα τρίγωνα $ΑΤΒ$ και $ΔΘΤ$ είναι ίσα.

(2015-2016)

Γ. ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Υπάρχει τρίγωνο με όλες τις πλευρές του και ένα ύψος του να έχουν ακέραια μήκη και η περίμετρός του να είναι 21;

(1995-1996)

2. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός n τέτοιος ώστε ο $n^3 + 3n$ να είναι περιττός.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$5x^3 - 4y^2 - 6xy + 15x + 6y - 5 = 0$.

(1996-1997)

3. Αν οι φυσικοί αριθμοί a , $a + d$, $a + 2d$, είναι πρώτοι, μεγαλύτεροι του 3, να αποδείξετε ότι το 6 διαιρεί το d.

(1997-1998)

4. Ο καθηγητής έγραψε το τριώνυμο $x^2 + 10x + 20$ στον πίνακα. Στη συνέχεια κάποιοι μαθητές είτε πρόσθεταν 1, είτε αφαιρούσαν 1 , (όχι και τα δύο ταυτόχρονα), από τον συντελεστή του x, ή από τον σταθερό όρο και μετά από λίγο, εμφανίσθηκε το τριώνυμο : $x^2 + 20x + 10$. Να αποδείξετε ότι κάποιο από τα τριώνυμα που εμφανίσθηκαν διαδοχικά στον πίνακα είχε ακέραιες ρίζες.

(1997-1998)

5. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί ν για τους οποίους ο αριθμός $2ν + 1$ διαιρεί τον αριθμό $ν^2 + ν - 2$.

(1998-1999)

6. Το άθροισμα δυο ακεραίων είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρεθούν οι αριθμοί.

(1999-2000)

7. Αν α περιττός ακέραιος, να δειχθεί ότι ο αριθμός $α^4 + 6α^2 - 7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.

(1999-2000)

8. Οι δυο διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι οι θετικοί ακέραιοι x και y. Αν αυξήσουμε τη μια διάσταση κατά 1 και την άλλη διάσταση κατά 2, τότε το ορθογώνιο που προκύπτει έχει εμβαδό διπλάσιο του αρχικού ορθογωνίου.

Να βρεθούν οι διαστάσεις x και y.

(2000-2001)

9. Μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό 2002 ως άθροισμα ενός τριψήφιου αριθμού και του κύβου του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού αυτού;

(2002-2003)

10. Να βρεθούν οι ακέραιοι α, β για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$αβ^2 + 2αβ + α = 2β^2 + 4β + 3.$$

(2003-2004)

11. Οι θετικοί ακέραιοι x, y με x > y είναι τέτοιοι ώστε

$$x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 = 49(x - y).$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x , y.

(2004-2005)

12. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$ είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

(2005-2006)

13. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$

(2007-2008)

14. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \le x \le y \le z$ και $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44$.

(2008-2009)

15. Αν οι αριθμοί μ ,ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι $4^{μ-2} + 4^{ν+2} \le 2^{μ+ν+1}$, να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $A = 2^μ + 2^ν$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

(2009-2010)

16. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{κx}{2} + \frac{x}{4} = κ(x+2) - \frac{3(κx-1)}{4}$.

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

(2011-2012)

17 . Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί A = 8x +1 και B = 2x – 3 είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

(2013-2014)

18. Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης $x + y + x^2 + y^2 = p$, όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

(2015-2016)

Δ. ΔΙΑΦΟΡΑ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ-ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ)

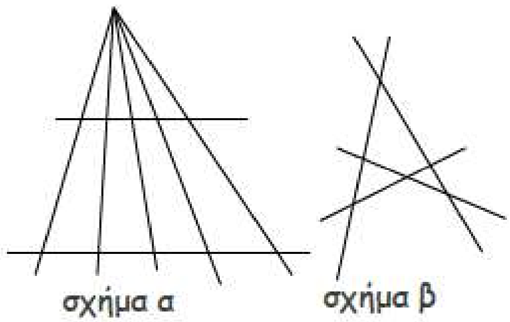
1. Έστω α, β, γ τρεις θετικοί αριθμοί. Ο α είναι κ% του β + γ και ο β είναι λ% του γ + α, όπου κ και λ πραγματικοί αριθμοί. Πόσο % του α + β είναι ο α;

(1990-1991)

2. Σε μια τάξη υπάρχουν 10 μαθητές που έχουν διαφορετικό ύψος. Ένας από αυτούς, που θα τον ονομάσουμε Α, έχει ύψος ίσο με το μέσο όρο του ύψους των 6 πιο κοντών, ενώ ένας άλλος, που θα τον ονομάσουμε Β, έχει ύψος ίσο με το μέσο όρο του ύψους και των 10 μαθητών. Ποιος είναι πιο κοντός, ο Α ή ο Β;
(Μέσο όρο ν αριθμών ονομάζουμε το πηλίκο του αθροίσματος των αριθμών δια του ν.)

(1990-1991)

3. α) Στο διπλανό σχήμα α, πόσα τρίγωνα υπάρχουν;
β) Στο διπλανό σχήμα β, υπάρχουν 4 τμήματα που καθένα τέμνει 3 ακριβώς τμήματα.
Μπορούμε να τοποθετήσουμε στο επίπεδο 9 τμήματα ώστε καθένα από αυτά να τέμνει ακριβώς 3 τμήματα από τα δοσμένα;



(1990-1991)

4. Δυο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:
Τους δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών, μεγαλύτερο από 6 (π.χ. ένα 100-γωνο). Κάθε παίκτης συνδέει δυο από τις κορυφές του πολυγώνου με ένα τμήμα το οποίο, όμως, να μην τέμνει κανένα από άλλα τέτοια τμήματα που οι παίκτες είχαν φέρει προηγουμένως. Θα χάσει ο παίκτης που πρώτος δε θα μπορέσει να φέρει ένα τέτοιο τμήμα.
Μπορεί ένας παίκτης να ακολουθήσει μια στρατηγική ώστε να νικήσει σίγουρα;

(1995-1996)

5. Επτά πόλεις Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7 βρίσκονται, με αυτή τη διάταξη, πάνω σε μία ευθεία. Πού πρέπει να κτιστεί ένα εργοστάσιο, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τις επτά πόλεις να είναι το ελάχιστο δυνατό;

(1996-1997)

6. Σε μια τάξη Λυκείου διοργανώθηκε πρωτάθλημα σκακιού. Την πρώτη μέρα έγιναν μόνο

κάποιοι αγώνες στους οποίους οι δυο αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Στους αγώνες αυτούς της πρώτης μέρας πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των κοριτσιών της τάξης. Αν η τάξη έχει συνολικά 34
παιδιά, να βρείτε:

α) πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη.

β) πόσα παιδιά δεν πήραν μέρος την πρώτη μέρα στους αγώνες.

(2000-2001)

7. Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία Τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή , όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

(2009-2010)