Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α

Γ΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

(Α΄ΜΕΡΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Σχολικό Έτος: 2016-2017

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες των ορίων

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

ΜΑΘΗΜΑ 12ο
Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$,

Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου γεννήθηκε στην προσπάθεια των μαθηματικών να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως:

— Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

— Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο της;

— Τι ονομάζουμε εμβαδό ενός μικτόγραμμου χωρίου;

Στις παραγράφους που ακολουθούν, αρχικά προσεγγίζουμε την έννοια του ορίου "διαισθητικά", στη συνέχεια διατυπώνουμε τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου και μερικές βάσικές ιδιότητές του και τέλος, εισάγουμε την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης.

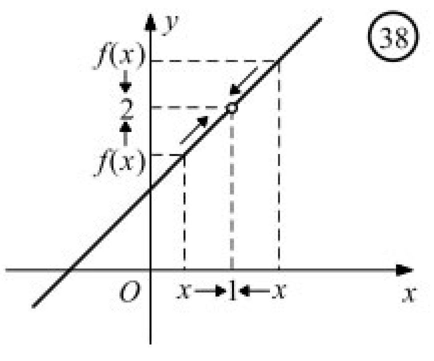
Η έννοια του ορίου

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbf{R} - \{1\}$ και γράφεται:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \qquad x \neq 1.$$



Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία y =x + 1 με εξαίρεση το σημείο Α(1,2) (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:

"Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x΄x, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το f(x), κινούμενο πάνω στον άξονα y΄y, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές f(x) είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για

όλα τα $x \neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1".

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε;

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο 1, είναι 2".

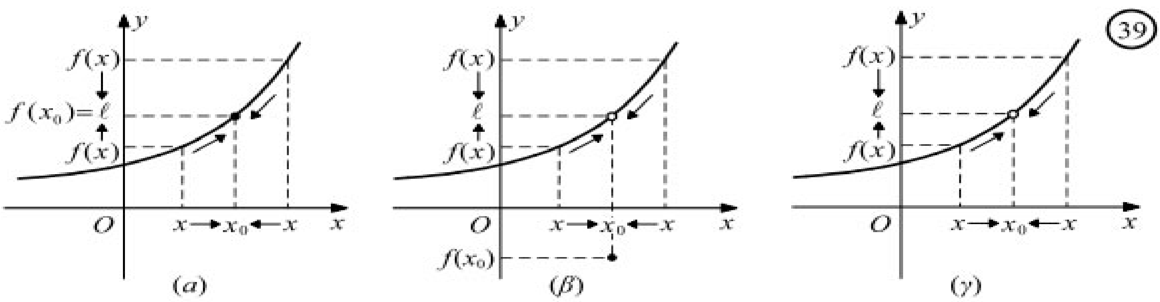
Γενικά:

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή "το όριο της f(x) στο x_0 είναι ℓ".



ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής:

$$(a, x_0) \cup (x_o, \beta) \text{ ή } (a, x_0) \text{ ή } (x_o, \beta)$$

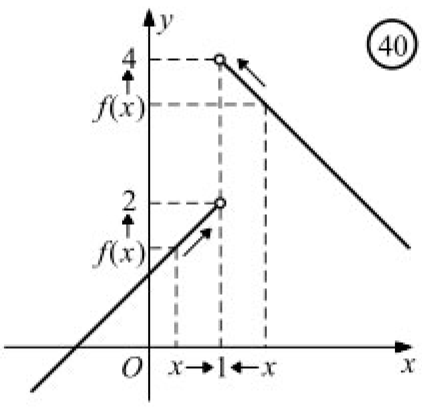
— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

Έστω, τώρα, η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases},$$

της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



Παρατηρούμε ότι:

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά (x<1), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2\,.$$

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά (x>1), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θελουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=4\,.$$

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$$

και διαβάζουμε:

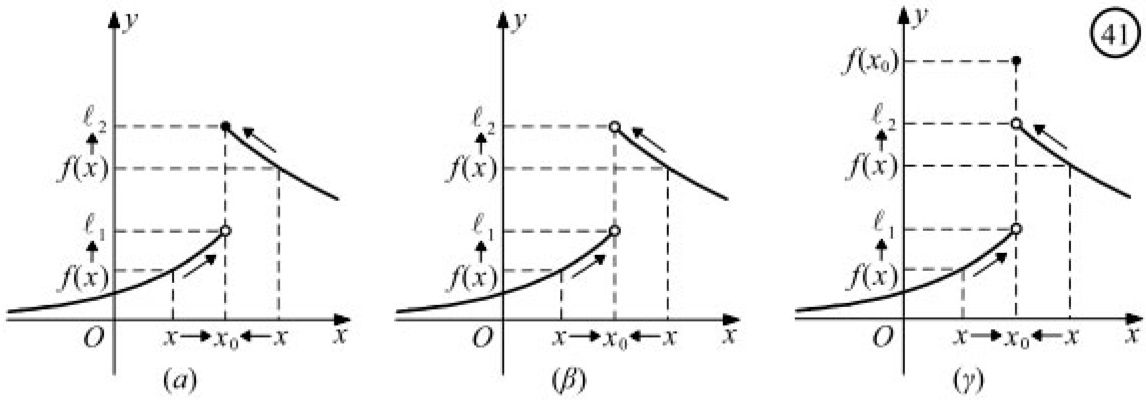
"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1".

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2,καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2".



Τους αριθμούς $l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $l_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

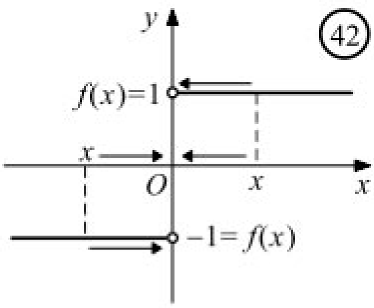
Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$, αφού:

— για $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$,

— για $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$,



και έτσι:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

● Στα προηγούμενα γνωρίσαμε την έννοια του ορίου διαισθητικά. Είδαμε ότι, όταν γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, εννοούμε ότι οι τιμές f(x) βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο ℓ, για όλα τα x ≠ x_0 τα οποία βρίσκονται "αρκούντως κοντά στο x_0". Για να διατυπώσουμε, τώρα, τα παραπάνω σε μαθηματική γλώσσα εργαζόμαστε ως εξής

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x)$, θα εννοούμε ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με ℓ.

Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$$

Αποδεικνύεται ότι :

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_o, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

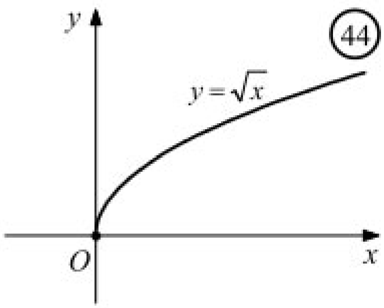
Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής

● (α, x_0), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad (\Sigma\chi.\ 44)$$

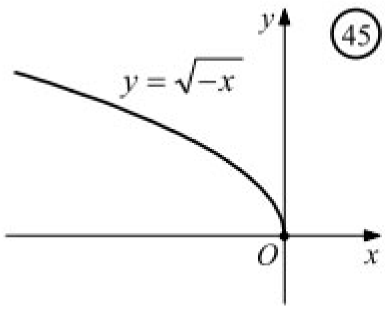


● Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0,β), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0 \quad (\Sigma\chi.\ 45)$$



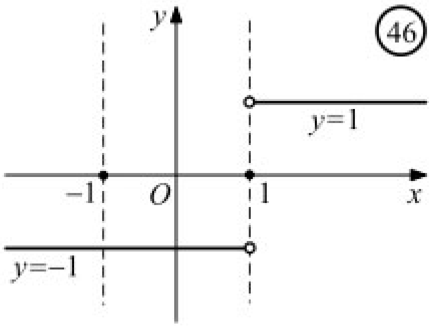
ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

Έτσι για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0=0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$



ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα Ρ θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_o,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα Ρ.

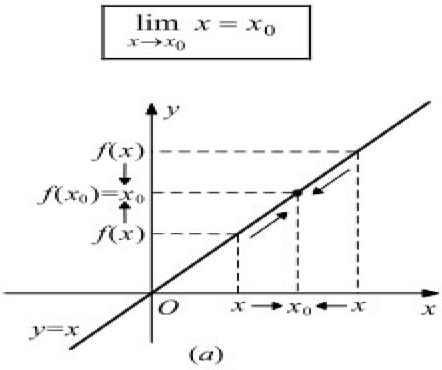
β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα Ρ, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

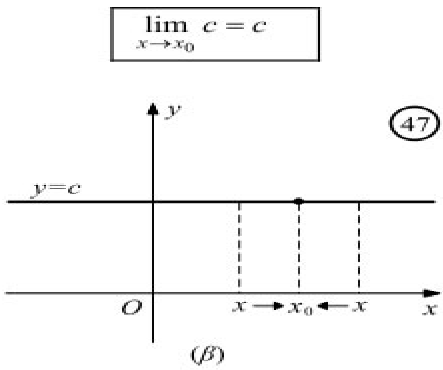
γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα Ρ, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο $x_0 = 0$, αφού ορίζεται στο σύνολο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και είναι θετική σε αυτό.

Όριο ταυτοτικής - σταθερής συνάρτησης

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι :



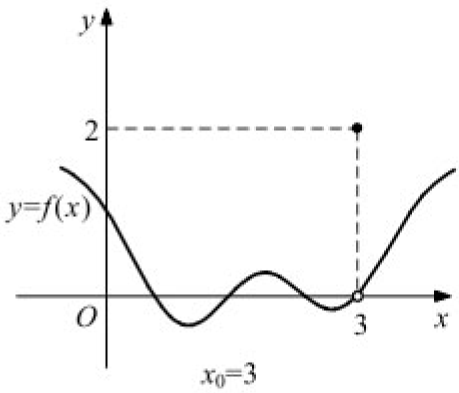


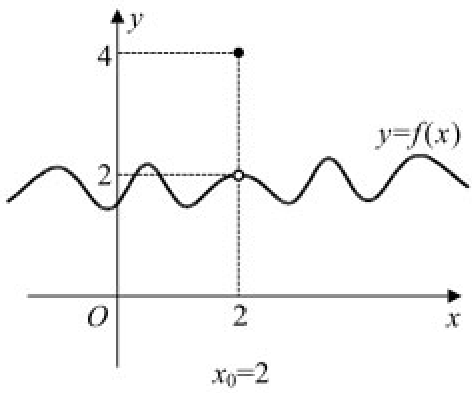
Η πρώτη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης f(x) = x (Σχ. 47α) στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο x_0, ενώ η δεύτερη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της σταθερής συνάρτησης g(x) = c (Σχ. 47β) στο x_0 είναι ίσο με c.

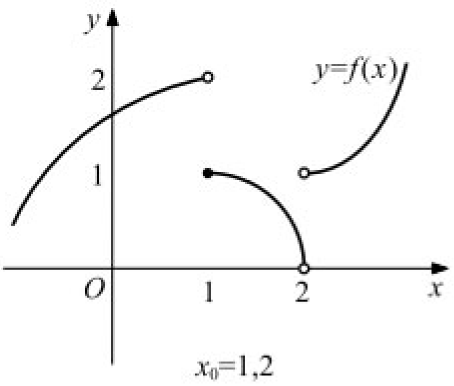
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

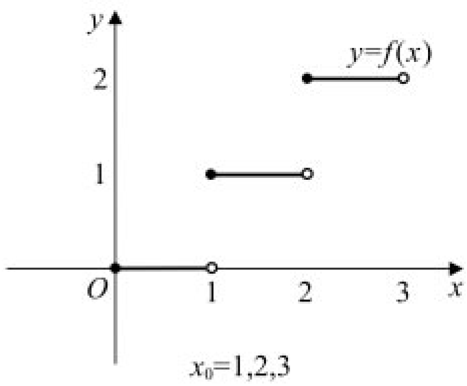
Α. Κατανοώ

1/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι :









4/Α (Σχολικό βιβλίο). Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2, +\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim_{x\to -2} f(x)=2$

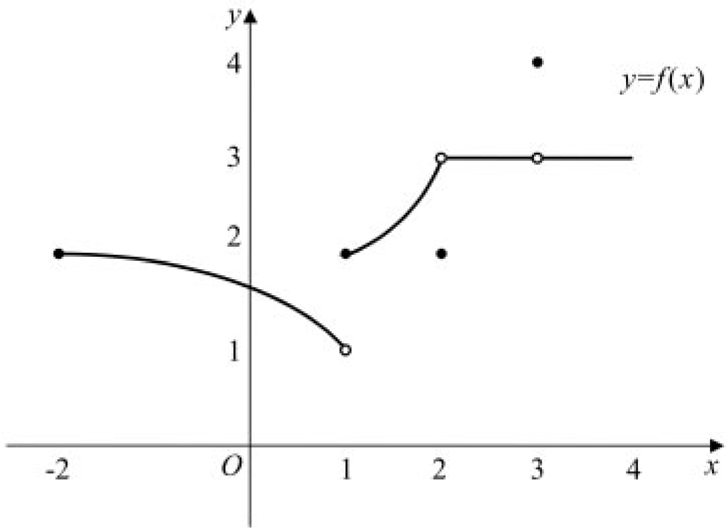
ii) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$

iii) $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

iv) $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

v) $\lim_{x\to 3} f(x)=4$

vi) $\lim_{x\to 4} f(x)=3$



Β. Εμπεδώνω

2. (Σχολικό βιβλίο). Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, $x_0=2$

ii) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -x+1, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

iv) $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0=0$.

3. (Σχολικό βιβλίο). Ομοίως όταν :

i) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$, $x_0=1$ ή $x_0=-1$

ii) $f(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x-1}$, $x_0=\dfrac{1}{3}$.

5. (Σχολικό βιβλίο). Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ με $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2-6$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του λ ∈ **R**, για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$

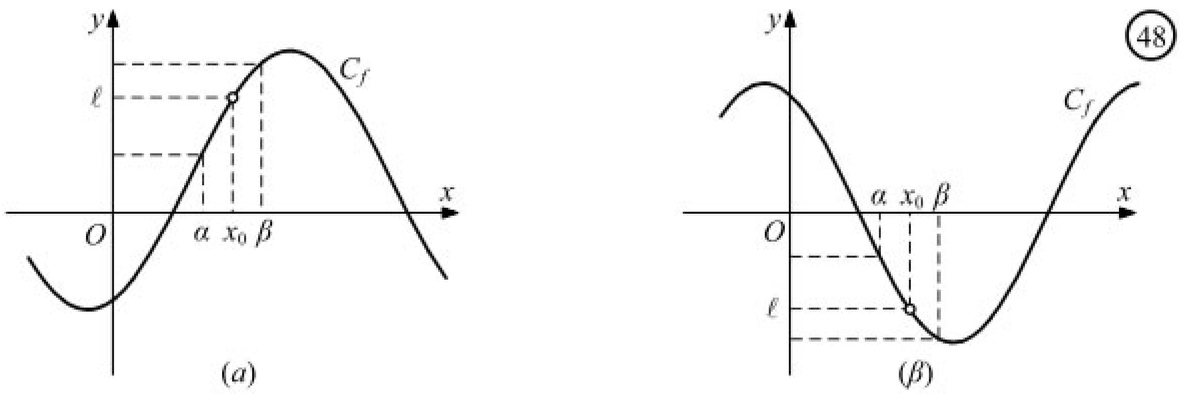
ΜΑΘΗΜΑ 13ο
Ιδιότητες ορίων

Όριο και διάταξη

Για το όριο και τη διάταξη αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48α)
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48β)



ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} x^{\nu} = x_0^{\nu}.$$

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_{\nu} x^{\nu} + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0}(\alpha_v x^v + \alpha_{v-1}x^{v-1} + \cdots + \alpha_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}(\alpha_v x^v) + \lim_{x\to x_0}(\alpha_{v-1}x^{v-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0\\ &= \alpha_v \lim_{x\to x_0} x^v + \alpha_{v-1}\lim_{x\to x_0} x^{v-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0\\ &= \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1}x_0^{v-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - 6x^2 + 7x - 2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 2 = -4.$$

— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου P(x), Q(x) πολυώνυμα του x και $x_0 \in$ **R** με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

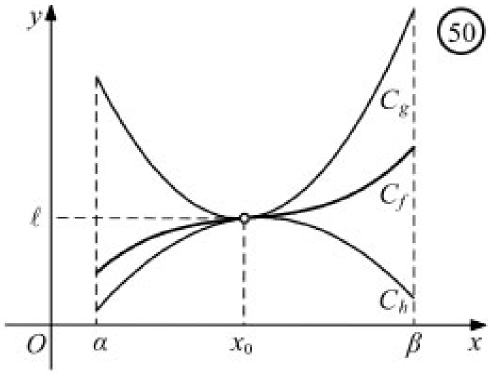
$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον} \quad Q(x_0) \neq 0$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2+2x+1} = \frac{2^2+4}{2^2+2\cdot 2+1} = \frac{8}{9}.$$

Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι "κοντά στο x_0" μια συνάρτηση f "εγκλωβίζεται" (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g. Αν, καθώς το x τείνει στο x_0, οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ. Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Για παράδειγμα, $\lim_{x \to 0} \left(x\eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

Πράγματι, για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left| x\eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \le |x|,$$

Οπότε:

$$-|x| \le x\eta\mu \frac{1}{x} \le |x|.$$

Επειδή $\lim_{x \to 0} (-|x|) = \lim_{x \to 0} |x| = 0$, σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \left(x\eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

.

Τριγωνομετρικάόρια

Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων. Αρχικά αποδεικνύουμε[1] ότι:

$$|\eta\mu x| \le x\ ,\quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν } x = 0)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

- $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.

- α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$
- β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέρουμε μέχρι τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(g(x)\right)$, της σύνθετης συνάρτησης fog στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε u = g(x).

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

[1] Η απόδειξη παραλείπεται αφού είναι εκτός εξεταστέας ύλης.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)$ με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: "$g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0" και γιαυτό δεν θα ελέγχεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Εύρεση ορίου με ιδιότητες)

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(x^2+1\right)^9 \cdot \left|x^3-1\right|\right]$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[(x^2+1)^9\,|x^3-1|\right] &= \lim_{x\to 0}(x^2+1)^9 \cdot \lim_{x\to 0}|x^3-1| \\ &= \left[\lim_{x\to 0}(x^2+1)\right]^9 \cdot \left|\lim_{x\to 0}(x^3-1)\right| \\ &= 1^9 \cdot |-1| = 1.\end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΟΡΙΟΥ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (Μορφή $\frac{0}{0}$)

1^{η} περίπτωση (Ρητή συνάρτηση)

Αν $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα. Παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος και έχουμε:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\left(x-x_0\right)\cdot R(x)}{\left(x-x_0\right)K(x)}=\frac{R(x)}{K(x)}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{K(x)}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε όμως ότι για x = 2 μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος.

Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x(x^2-5x+6)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-3)}{x+2}=\frac{x^2-3x}{x+2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{x+2}=\frac{4-3\cdot 2}{2+2}=-\frac{1}{2}.$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 1

2η περίπτωση (Άρρητη συνάρτηση)

Αν $f(x)=\dfrac{\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}}{P(x)}$, πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση και έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}}{P(x)}=\frac{\left(\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}\right)\cdot\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)}{P(x)\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)}=\frac{A(x)-B(x)}{P(x)\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)}=..$$

Ή

$$f(x)=\frac{\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}}{\sqrt{\Gamma(x)}-\sqrt{\Delta(x)}}=\frac{\left(\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}\right)\cdot\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)\left(\sqrt{\Gamma(x)}+\sqrt{\Delta(x)}\right)}{\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)\left(\sqrt{\Gamma(x)}-\sqrt{\Delta(x)}\right)\left(\sqrt{\Gamma(x)}+\sqrt{\Delta(x)}\right)}=\frac{\left(A(x)-B(x)\right)\cdot\left(\sqrt{\Gamma(x)}+\sqrt{\Delta(x)}\right)}{\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)\left(\Gamma(x)-\Delta(x)\right)}=...$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

Για x =1 μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{x^2+3}-2x$ και έτσι έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(2x)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}$$

$$=\frac{-3x^2+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(-3(x+1))}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-6}{\sqrt{4}+2}=-\frac{3}{2}.$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 2.

3^{η} περίπτωση (τρίτη ρίζα)

Αν $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{A(x)}-\sqrt[3]{B(x)}}{P(x)}$ ή $(x)=\dfrac{\sqrt[3]{A(x)}+\sqrt[3]{B(x)}}{P(x)}$, τότε έχοντας υπόψη μας τις ταυτότητες:

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$$

πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση:

$$\left(\sqrt[3]{A(x)}\right)^2\pm\sqrt[3]{A(x)}\cdot\sqrt[3]{B(x)}+\left(\sqrt[3]{B(x)}\right)^2$$

καταλήγουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{A(x)}-\sqrt[3]{B(x)}}{P(x)}=\frac{A(x)-B(x)}{\left(A(x)-B(x)\right)Q(x)\cdot\left[\left(\sqrt[3]{A(x)}\right)^2+\sqrt[3]{A(x)}\cdot\sqrt[3]{B(x)}+\left(\sqrt[3]{B(x)}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{A(x)}\right)^2+\sqrt[3]{A(x)}\cdot\sqrt[3]{B(x)}+\left(\sqrt[3]{B(x)}\right)^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$$

ΛΥΣΗ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{(x-1)(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=$$

$$=\frac{1}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=\frac{1}{6}$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 3.

4η περίπτωση (Κλαδική συνάρτηση-πλευρικά όρια)

$$f(x)=\begin{cases} A(x), & \alpha\nu\ x \ge x_0 \\ \\ B(x), & \alpha\nu\ x < x_0 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τα:

$$\lim_{x\to x_0^+} A(x) = ...l_1$$
$$\lim_{x\to x_0^+} B(x) = ...l_2$$

— Αν $l_1 = l_2 = l$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

— Αν $l_1 \neq l_2$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0 = 1$ της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-4, & x<1 \\ -\dfrac{1}{x}, & x\ge 1 \end{cases}.$$

ΛΥΣΗ

Αν x < 1, τότε $f(x) = 3x^2 - 4$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(3x^2-4) = 3\cdot 1^2 - 4 = -1.$$

Αν x > 1, τότε f(x) = −1/x, οπότε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Επομένως $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 4.

5η περίπτωση (Κριτήριο της παρεμβολής)

Τα όρια της μορφής :

$$\lim_{x\to 0}\left[g(x)\eta\mu\frac{A(x)}{x^\nu}\right]$$
$$\lim_{x\to 0}\left[g(x)\sigma\upsilon\nu\frac{A(x)}{x^\nu}\right]$$

υπολογίζονται συνήθως με το Κ.Π. ως εξής:

$$\left|g(x)\eta\mu\frac{A(x)}{x^{\nu}}\right| = |g(x)|\cdot\left|\eta\mu\frac{A(x)}{x^{\nu}}\right| \le |g(x)|$$

Επομένως:

$$-|g(x)| \le g(x)\eta\mu\frac{A(x)}{x^{\nu}} \le |g(x)|$$

Βρίσκουμε τα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(|g(x)|\right)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|g(x)|\right)$. Αν είναι ίσα ($=l$), τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)\eta\mu\frac{A(x)}{x^{\nu}}\right] = l$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right)$$

ΛΥΣΗ

Για ευκολία θέτουμε $f(x) = x^3\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)$ και έχουμε διαδοχικά:

$$|f(x)| = \left|x^3\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right| = |x^3|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right| = |x^3|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right| \le |x^3|$$

Δηλαδή:

$$-|x^3| \le f(x) \le |x^3| (I)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(-|x^3|\right) = \lim_{x\to 0}\left(|x^3|\right) = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο της παρεμβολής θα είναι:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right) = 0$$

Γενικότερα το κριτήριο ης παρεμβολής χρησιμοποιείται όταν ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και η $f(x)$ μπορεί να «κλειστεί» από δύο άλλες συναρτήσεις που έχουν το ίδιο όριο όταν $x \to x_0$.

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 5.

$6^η$ περίπτωση (Τριγωνομετρικά όρια)

Έχουμε υπόψη μας τα επόμενα τριγωνομετρικά όρια και μετασχηματίζουμε κατάλληλα το όριο που ζητάμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\eta\mu x}=1\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\kappa x}{\kappa x}=1\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\kappa x}{x}=\kappa\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu\lambda x}=\frac{\kappa}{\lambda}\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Όσα σημειώνονται με (*) χρειάζονται **απόδειξη** πριν την εφαρμογή τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\qquad \text{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^2+x}$$

ΛΥΣΗ

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=1\cdot 1=1$$

$$\textbf{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x\left(x+1\right)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1\cdot 1=1$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 6 .

$7^η$ περίπτωση (Όρια με απόλυτα)

Αν ζητείται όριο με μορφή παραπλήσια της $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|\varphi(x)|}{h(x)}$, τότε:

— Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x))=l>0 \Rightarrow \varphi(x)>0,\ x\in(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|\varphi(x)|}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{h(x)}=\ldots$$

— Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x))=m<0 \Rightarrow \varphi(x)<0,\ x\in(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|\varphi(x)|}{h(x)}=-\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{h(x)}=\ldots$$

— Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x))=0$, τότε κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την $\varphi(x)$ και εξετάζουμε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+}(\varphi(x)),\ \lim\limits_{x\to x_0^-}(\varphi(x))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

$$\text{i) } \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-x+1|-1}{x^2-1} \qquad \text{ii) } \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

i) Αφού $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+1)=1>0$, τότε $x^2-x+1>0$ «κοντά στο 1». Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-x+1|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

ii) Αφού:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$$
$$x^2-1>0,\ x\in(1,+\infty)$$
$$x^2-1<0,\ x\in(-1,1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}(x+1)=-2$$

Επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$ δεν υπάρχει.

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 7.

$8^{η}$ περίπτωση (Όρια με παράμετρο)

Να βρείτε τα α, β ώστε:

— $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x,a,\beta)}{\varphi(x)}=l\in\mathbb{R}$, $\mu\varepsilon \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, τότε πρέπει και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x,a,\beta)=0$ (II) διότι διαφορετικά το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x,a,\beta)}{\varphi(x)}\notin\mathbb{R}$. Από τη σχέση (II) παίρνουμε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων α και β. Λύνουμε αυτήν τη σχέση ως προς α ή β και αντικαθιστούμε στο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x,a,\beta)}{\varphi(x)}$ το οποίο στη συνέχεια παραγοντοποιούμε, ώστε να εξαλειφθεί ο όρος $(x-x_0)$. Στο τέλος έχουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

— Να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}A(x,a,\beta), x\geq x_0\\ B(x,a,\beta), x<x_0\end{cases}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}A(x,a,\beta)=\lim_{x\to x_0^-}B(x,a,\beta)$$

Από την οποία έχουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε τα α και β ώστε:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+\beta x-4}{x^2-1}=2$ **ii)** $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=1$, όπου $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta x+2, & \alpha\nu\ x\geq -1\\ ax+3, & \alpha\nu\ x<-1\end{cases}$

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$ πρέπει και $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+ax^2+\beta x-4)=a+\beta-3=0\Leftrightarrow \beta=3-\alpha$ (1)

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2+\beta x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2+(3-a)x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2+3x-ax-4}{x^2-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{ax(x-1)+(x^3+3x-4)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{ax(x-1)+(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax+x^2+x+4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{ax+x^2+x+4}{x+1}=\frac{a+6}{2}$$

Άρα:

$$\frac{a+6}{2}=2\Leftrightarrow a=-2\ \kappa\alpha\iota\ (1)\Leftrightarrow \beta=5$$

ii) Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(\alpha x^2 - \beta x + 2\right) = \alpha + \beta + 2 = 1 \Leftrightarrow a + \beta = -1 (I)$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(ax + 3\right) = 3 - a = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

Άρα $\beta = -1 - 2 \Leftrightarrow \beta = -3$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 8 .

9η περίπτωση (Μετασχηματισμός ορίου)

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)$, της σύνθετης συνάρτησης fog στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε u = g(x).

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x\to x_o} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $l = \lim_{u\to u_o} f(u)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το όριο:

i) $\lim_{x\to 0} \eta\mu\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$ **ii)** $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $u = x^2 + \frac{\pi}{4}$, τότε $\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0}\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, οπότε

$$\lim_{x\to 0} \eta\mu\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{u\to\frac{\pi}{4}} \eta\mu u = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ii) Είναι:

$$\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\frac{\eta\mu 3x}{3x}$$

Θέσουμε u = 3x, τότε $\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0} 3x = 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3\lim_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 3\cdot 1 = 3.$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 9.

10^{η} περίπτωση (Η συνάρτηση «κρύβεται»)

Αν δίνεται $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\left(x, f(x)\right)=l\in\mathbb{R}$ (δηλαδή το όριο μιας παράστασης της $f(x)$ ή όπως λέμε «η συνάρτηση κρύβεται») και ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε:

— Θέτουμε $\varphi\left(x, f(x)\right)=h\left(x\right)$ (1) οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} h\left(x\right)=l$

— Λύνουμε την (1) ως προς $f(x)=....$

— Με τις ιδιότητες των ορίων βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=...$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=2$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-1}{x-1}=h(x)$ και άρα $\lim\limits_{x\to 1} h\left(x\right)=2$

Έχουμε:

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=h(x)\Leftrightarrow f(x)=\left(x-1\right)h(x)+1$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\left(x-1\right)h(x)+1\right]=\lim_{x\to 1}\left(x-1\right)\cdot\lim_{x\to 1} h(x)+1=1$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 10 .

11^{η} περίπτωση (Θεωρητικές ασκήσεις)

Στις Θεωρητικές ασκήσεις στα όρια έχουμε υπόψη μας τα επόμενα:

Σε ασκήσεις όπου δίνεται σχέση που ιακοποιεί η συνάτηση f :

Α) $f\left(x+y\right)=...$ και αναζητούμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Θέτουμε $x-x_0=h$, οπότε όταν $x\to x_0\Leftrightarrow h\to 0$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f\left(x_0+h\right)=...$$

Β) $f\left(x\cdot y\right)=...$ και αναζητούμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Θέτουμε $\dfrac{x}{x_0}=h$ οπότε όταν $x\to x_0\Leftrightarrow h\to 1$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 1} f\left(x_0 \cdot h\right) = \ldots$$

Γ) $f\left(\frac{x}{y}\right) = \ldots$ και αναζητούμε το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Θέτουμε $\frac{x_0}{x} = h \Leftrightarrow x = \frac{x_0}{h}$ οπότε

όταν $x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 1$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 1} f\left(\frac{x_0}{h}\right) = \ldots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x+y) = f(x) + 2f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(0),\ f(1)$

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$x = y = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0) + 2f(0) + 0 \Rightarrow f(0) = 3f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$
$$x = 0, y = 1 \Rightarrow f(0+1) = f(0) + 2f(1) + 0 \Rightarrow f(1) = f(0) + 2f(1) \Rightarrow f(1) = -f(0) \Rightarrow f(1) = 0$$

ii) Θέτουμε $x - 1 = h \Leftrightarrow x = 1 + h$ και όταν: $x \to 1 \Leftrightarrow h \to 0$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\left[f(1) + 2f(h) + h\right] = \lim_{h\to 0}\left[2f(h) + h\right] = 2\lim_{h\to 0} f(h) + \lim_{h\to 0} h = 2\cdot 1 + 0 = 2$$

2. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y) - 2xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

$$\text{και } f(x) < 0, x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(1),\ f(2)$

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$x = y = 1 \Rightarrow f(1) = f(1)\cdot f(1) - 2 \Rightarrow f(1) = \left[f(1)\right]^2 - 2 \Rightarrow \left[f(1)\right]^2 - f(1) - 2 = 0 \Rightarrow f\left(1\right) = -1 \text{ ή } f\left(1\right) = 2$$

και επειδή $f(x) < 0, x \in \mathbb{R}$ θα είναι $f\left(1\right) = -1$

$$x = 1, y = 2 \Rightarrow f\left(1\cdot 2\right) = f(1)\cdot f(2) - 2 \Rightarrow f(2) = -f(2) - 2 \Rightarrow f(2) = -1$$

ii) Θέτουμε $\frac{x}{2}=h$ και όταν: $x\to 2 \Leftrightarrow h\to 1$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{h\to 1} f(2h)=\lim_{h\to 1}\left[f(2)\cdot f(h)-4h\right]=\lim_{h\to 1}\left[-f(h)-4h\right]=-\lim_{h\to 1} f(h)-4\lim_{h\to 1} h=-1-4=-5$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 11, 12, 13 , 14 και 15.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ

1/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim_{x\to 0}(x^5-4x^3-2x+5)$ ii) $\lim_{x\to 1}(x^{10}-2x^3+x-1)$

iii) $\lim_{x\to -1}(x^8+2x+3)^{20}$ iv) $\lim_{x\to 3}\left[(x-5)^3\,|x^2-2x-3|\right]$

v) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x-5}{x+3}$ vi) $\lim_{x\to 0}\frac{|x^2-3x|+|x-2|}{x^2+x+1}$

vii) $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{(x+2)^2}$ viii) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2+4x+3}$.

2/Α (Σχολικό βιβλίο). . Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x\to 2} f(x)=4$. Να βρείτε το $\lim_{x\to 2} g(x)$ αν:

i) $g(x)=3(f(x))^2-5$ ii) $g(x)=\frac{|2f(x)-11|}{(f(x))^2+1}$

iii) $g(x)=(f(x)+2)(f(x)-3)$.

Β. Εμπεδώνω

3/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}$ ii) ii) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

iii) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$ iv) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^3-27}{x}$.

4/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

5/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε (αν υπάρχει), το όριο της f στο x_0 αν :

i) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 5x, & x>1\end{cases}$ και $x_0=1$

ii) $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<-1\\ x^2+1, & x\ge -1\end{cases}$ και $x_0=-1$.

6/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\eta\mu x}{x}\right)$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^3+x}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$.

7/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu 2x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}$.

8/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν:

i) $1-x^2\le f(x)\le 1+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $1-x^4\le f(x)\le \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

9/Α (Σχολικό βιβλίο). Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2ax+\beta, & x\le 3\\ \alpha x+3\beta, & x>3\end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α,β **∈ R**, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

Β. Εμπεδώνω

1/Β (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\nu+1}-(\nu+1)x+\nu}{x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$

2/Β (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

i) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}$ ii) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$

iii) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

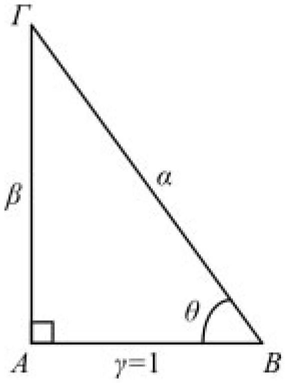
4/Β . Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν :

i) $\lim\limits_{x\to 1}(4f(x)+2-4x)=-10$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$.

3. (Σχολικό βιβλίο). Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με γ =1.
Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$, ii) $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)$

iii) $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$.



Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(που αντιστοιχούν σε κάθε προηγούμενη περίπτωση)

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-x}$$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$$

3. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4} \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+28}-3}{\sqrt[3]{x+9}-2}$$

4. Να βρείτε τα όρια:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5}, & \alpha\nu\ x>5\\[2mm] \dfrac{x^2-5x}{x^2-25}, & \alpha\nu\ x<5\end{cases}$$

5. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 0}\left(x^5\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x^{1000}}\right)\right) \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 0} f(x),\ \text{όταν } \left|f(x)-x^5\right|\le x,\ \text{για κάθε } x\in(-1,1)$$

6. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x} \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\eta\mu x} \quad \textbf{iii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{x+1}-1} \quad \textbf{iv)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 4x-1}{x^2+x}$$

7. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 1}\frac{|x-2|-|2x-1|}{x^2-1} \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to -2}\frac{|2x+4|+|x^2+2x|}{x-4}$$

8. Να βρείτε τα α και β όταν:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2-\beta}{x^3-1}=3 \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to -1}\frac{x^4+(a-\beta)x^3+ax^2-1}{x+1}=-1$$

9. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)} \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x^2-1} \qquad \textbf{ii)} \lim_{x\to -2}\frac{\sigma\upsilon\nu(x+2)-1}{x^3+2x^2}$$

10. α) Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2f(x)-5}{x^2-9}=\dfrac{1}{2}$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

β) Αν $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)f(x)-\left(\sqrt{x+2}-1\right)\right]=3$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

11. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x+y)=f(x)-f(y)-xy, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

Να βρείτε:

i) Το $f(1)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

12. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-2xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».

iii) Αν $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x^2)}{x^2}, & \alpha\nu\ x>0\\[2ex] x^5\eta\mu\dfrac{2015}{x^{2015}}-a, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$, να βρείτε το α, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

13. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y) \text{ για κάθε } x,y\in(0,+\infty).$$

i) Να βρείτε το $f(1)$.

ii) Αν $\lim\limits_{x\to 1}=f(1)$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in(0,+\infty)$.

14. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε το $f(0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

iii) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ για κάποιο $a\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ **β)** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

15. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)}{h} = 6$$

i) Να βρείτε το $f(3)$.

ii) Να βρείτε το όριο $A = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$.

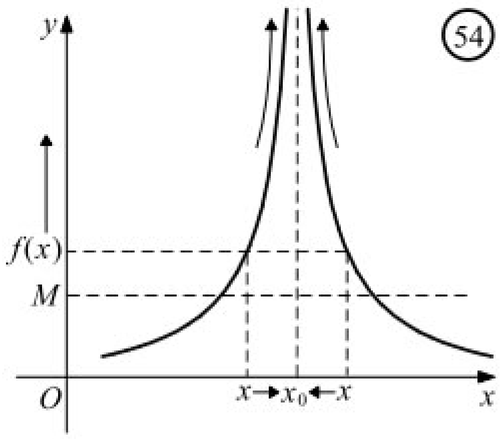
ΜΑΘΗΜΑ 14ο

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in R$

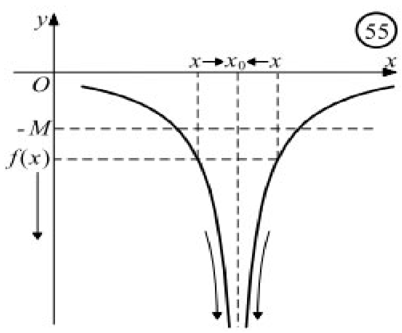
— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x΄x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές f(x) αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



— Στο σχήμα 55 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x΄x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές f(x) ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό −M (M >0). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$



Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty .$$

Αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{και γενικά} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbf{N}$$

Ενώ:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{και γενικά} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \quad \nu \in \mathbf{N} \qquad (\text{Σχ. } 57\beta).$$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbf{N}$

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbf{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbf{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f{\cdot}g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)+(-\infty) \quad \text{και} \quad 0\cdot(\pm\infty).$$

και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty) \quad \text{και} \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς

Για παράδειγμα:

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ (Εύρεση ορίου Α= $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ όταν $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$)

Γράφουμε:

$$A = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{g(x)}\cdot f(x)\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και έχουμε:}$$

Αν $g(x) > 0$, τότε:

$$A = (+\infty)\cdot l = \begin{cases} +\infty, & \alpha\nu\ l > 0 \\ -\infty, & \alpha\nu\ l < 0 \end{cases} \qquad \text{ή}$$

Αν $g(x) < 0$, τότε:

$$A = (-\infty)\cdot l = \begin{cases} -\infty, & \alpha\nu\ l > 0 \\ +\infty, & \alpha\nu\ l < 0 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{|x-1|}$ ii) $\lim_{x\to 2}\frac{-3x+2}{(x-2)^2}$.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $\lim_{x\to 1}|x-1|=0$ και $|x-1|>0$ κοντά στο 1, είναι $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$. Επειδή επιπλέον είναι $\lim_{x\to 1}(x^2-5x+6)=2$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right]=+\infty .$$

ii) Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και $(x-2)^2>0$ κοντά στο 2, είναι $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$. Επειδή επιπλέον είναι $\lim_{x\to 2}(-3x+2)=-4$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{-3x+2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right]=-\infty .$$

2. Να βρεθούν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-2}$$

στο $x_0 = 2$ και στη συνέχεια να εξετασθεί, αν υπάρχει το όριο της f(x) στο 2.

ΛΥΣΗ

— Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ και $x-2>0$ για $x>2$, είναι $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$. Επειδή επιπλέον $\lim_{x\to 2^+}(x^2-x+1)=3$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2}(x^2-x+1)\right]=+\infty .$$

— Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ και $x-2<0$ για $x<2$, είναι $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$. Επειδή επιπλέον $\lim_{x\to 2^-}(x^2-x+1)=3$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right]=-\infty .$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο 2.

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 1,2,3.

ΜΕΘΟΔΟΣ («Διερεύνηση ορίου με παράμετρο» της μορφής $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,\lambda)}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\lambda)\neq 0$, δηλαδή όταν ο αριθμητής εναι και συνάρτηση μιας παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ **).**

Γράφουμε:

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,\lambda)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{g(x)}\cdot f(x,\lambda)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0} f(x,\lambda)$$

Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\lambda)=h(\lambda)$ (είναι δηλαδή συναρτήσει του λ) και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Α) Αν $h(\lambda)>0\Leftrightarrow \lambda\in\Delta_1$ (Δ_1 διάστημα) και ανάλογα με το αν $g(x)>0$ ή $g(x)<0$ «κοντά» στο x_0 θα είναι $A=\pm\infty$.

Β) Αν $h(\lambda)<0\Leftrightarrow \lambda\in\Delta_2$ (Δ_1 διάστημα) και ανάλογα με το αν $g(x)>0$ ή $g(x)<0$ «κοντά» στο x_0 θα είναι $A=\pm\infty$.

Γ) Αν $h(\lambda)=0$, τότε έχουμε την περίπτωση της απροσδιοριστίας $\dfrac{0}{0}$ που είδαμε προηγούμενα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

3/Β (Σχολικό). Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \qquad \text{και} \qquad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να βρείτε τις τιμές των λ, μ ∈ **R** για τις οποίες υπάρχουν στο **R** τα όρια (ή να βρείτε τα όρια για όλες τις τιμές των λ, μ ∈ **R)** :

$$\lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} g(x).$$

ΛΥΣΗ

Για τη συνάρτηση $f(x)$ έχουμε:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left[\left((\lambda-1)x^2+x-2\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1}\left((\lambda-1)x^2+x-2\right)=\lambda-1+1-2=\lambda-2$$

Ακόμα:

$$\gamma\iota\alpha\ x>1 \text{ είναι } x^2-1>0$$
$$\gamma\iota\alpha\ -1<x<1 \text{ είναι } x^2-1<0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $\lambda-2>0 \Leftrightarrow \lambda>2$, τότε:

Αν $x>1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=+\infty$, οπότε $A=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=+\infty$

Αν $-1<x<1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=-\infty$, οπότε $A=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=-\infty$

Άρα το όριο της $f(x)$ στο $x_0=1$ δεν υπάρχει.

— Αν $\lambda-2<0 \Leftrightarrow \lambda<2$, τότε:

Αν $x>1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=+\infty$, οπότε $A=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=-\infty$

Αν $-1<x<1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=-\infty$, οπότε $A=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=+\infty$

Άρα το όριο της $f(x)$ στο $x_0=1$ δεν υπάρχει.

— Αν $\lambda=2$, τότε $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$

Για την συνάρτηση $g(x)$ έχουμε:

$$A=\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+\mu}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+2x+\mu\right)\right]$$

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x+\mu\right)=\mu\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to 0} x=0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $x>0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ και άρα:

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+2x+\mu\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x+\mu\right)=(+\infty)\cdot\mu$$

Οπότε: $\mathrm{A}\nu\ \mu>0$, τότε $\mathrm{A}=+\infty$ ενώ

$\mathrm{A}\nu\ \mu<0$, τότε $\mathrm{A}=-\infty$ και

Αν $\mu=0$, τότε $A=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}=2$

— Αν $x<0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$ και άρα:

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+2x+\mu\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x+\mu\right)=\left(-\infty\right)\cdot\mu$$

Οπότε: Αν Αν $\mu>0$, τότε $\mathrm{A}=-\infty$ ενώ

Αν Αν $\mu<0$, τότε $\mathrm{A}=+\infty$ και

Αν $\mu=0$, τότε $A=\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x\left(x+2\right)}{x}=2$

Επομένως:

Αν $\mu>0$ δεν υπάρχει το όριο της $g(x)$ στο $x_0=0$.

Αν $\mu<0$ δεν υπάρχει το όριο της $g(x)$ στο $x_0=0$.

Αν $\mu=0$ $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 4

ΜΕΘΟΔΟΣ (Η συνάρτηση «κρύβεται»)

Αν δίνεται $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\left(x,f(x)\right)=\pm\infty$ (δηλαδή το όριο μιας παράστασης της $f(x)$ ή όπως λέμε «η συνάρτηση κρύβεται») και ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, τότε:

— Θέτουμε $\varphi\left(x,f(x)\right)=h\left(x\right)$ (1) οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}h\left(x\right)=\pm\infty$

— Λύνουμε την (1) ως προς $f(x)=....$

— Με τις ιδιότητες των ορίων βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=...$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}f\left(x\right)$, όταν :

i) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+1}{f(x)}=+\infty$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x^2+2x}=-\infty$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε:

$$\frac{x^2-3x+1}{f(x)}=h(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-3x+1}{h(x)}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 2} h(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{h(x)} = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+1}{h(x)} = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{h(x)}\cdot\left(x^2-3x+1\right)\right] = 0\cdot(-1) = 0$$

ii) Θέτουμε:

$$\frac{f(x)-2}{x^2+2x} = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = \left(x^2+2x\right)\cdot\varphi(x)+2\,'$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x) = -\infty$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left[\left(x^2+2x\right)\cdot\varphi(x)+2\right] = \lim_{x\to 2}\left(x^2+2x\right)\cdot\lim_{x\to 2}\varphi(x)+2 = \infty$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 6 και 7.

<u>Βασική πρόταση</u> (που μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις χωρίς απόδειξη. Ωστόσο για λόγους πληρότητας παραθέτουμε την απόδειξη παρακάτω)

A) *Αν* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)\geq g(x)$ *για κάθε* $x\in\left(a,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *τότε και* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

B) *Αν* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)\leq g(x), x\in\left(a,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Α) Αφού $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow g(x) > 0$ «κοντά» στο x_0. Έχουμε:

$$f(x)\geq g(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{g(x)} \text{ «κοντά» στο } x_0.$$

Είναι $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = 0$, άρα από το κριτήριο της παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = +\infty \text{ (αφού } \frac{1}{f(x)} > 0 \text{ «κοντά» στο } x_0\text{).}$$

B) $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow g(x) < 0$ «κοντά» στο x_0. Έχουμε:

$$f(x) \le g(x) < 0 \Leftrightarrow -f(x) \ge -g(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < -\frac{1}{f(x)} \le -\frac{1}{g(x)} \text{ «κοντά» στο } x_0.$$

Είναι $\lim_{x\to x_0} \frac{-1}{g(x)} = 0$, άρα από το κριτήριο της παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x\to x_0} \frac{-1}{f(x)} = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{-\frac{1}{f(x)}} = -\infty \text{ (αφού} -\frac{1}{f(x)} > 0 \text{ «κοντά» στο } x_0\text{).}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ

1/Α (Σχολικό). Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν :

i) $f(x) = \frac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0 = 0$ ii) $f(x) = \frac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0 = 1$

iii) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$.

2/Α (Σχολικό). Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν :

i) $f(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{4}{1-x^2}$, $x_0 = 1$ ii) $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_0 = 0$

iii) $f(x) = x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$, $x_0 = 0$.

Β. Εμπεδώνω

1/Β (Σχολικό). Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim_{x\to 4} \frac{-9}{x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8}$

2/Β (Σχολικό). Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ δεν έχει όριο στο $\frac{\pi}{2}$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ δεν έχει όριο στο 0.

4/Β (Σχολικό). Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν :

$$\text{i) } \lim_{x\to 1}\frac{x-4}{f(x)}=+\infty \qquad \text{ii) } \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x+2}=-\infty \qquad \text{iii) } \lim_{x\to 1}[f(x)(3x^2-2)]=+\infty .$$

Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i) } \lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{\left(x^2-1\right)^2} \qquad \textbf{ii) } \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x+1}{x^4+x^2} \qquad \textbf{iii) } \lim_{x\to 1}\frac{-3x+2}{\left|x^4-1\right|}$$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i) } \lim_{x\to -1}\frac{1-2x}{-\left(x+1\right)^2} \qquad \textbf{ii) } \lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2}{-x^4-x^2} \qquad \textbf{iii) } \lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{2x^2+1}{\left|\frac{1}{2}-x\right|}$$

3. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i) } \lim_{x\to -1}\frac{x^4+1}{x^2-1} \qquad \textbf{ii) } \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^3} \qquad \textbf{iii) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5}{x^2-x-2}$$

4. Να βρείτε τα όρια για όλες τις τιμές των λ, μ **є R:**

$$\textbf{i) } \lim_{x\to -1}\frac{\lambda x^2-x-2}{x^2-1} \qquad \textbf{ii) } \lim_{x\to 2}\frac{\mu^2x^3-2\mu x+2}{x^2-2x+4}$$

5. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)\cdot f(y)=yf(x)+xf(y)-xy \text{, για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε:

i) τη συνάρτηση f

ii) Το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$

6. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις , τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-5}{f(x)}=+\infty,\ \lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{x+2}=-\infty$$

Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+g(x)\right]$

7. Αν $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot \eta\mu 3x}{\sqrt{x+9}-3}=-\infty$, να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$

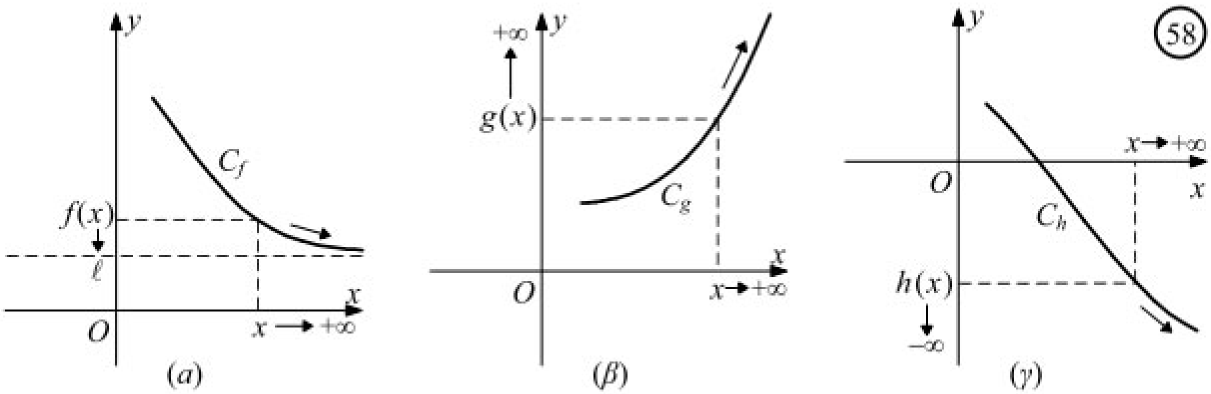
8. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to l}\frac{x^2-1}{x^3-x^2}$ για τις διάφορες τιμές του $l\in\mathbb{R}$

ΜΑΘΗΜΑ 15ο

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής (α, +∞).



Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— το f(x) προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο +∞ όριο το ℓ και γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

— το g(x) αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο +∞ όριο το +∞ και γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

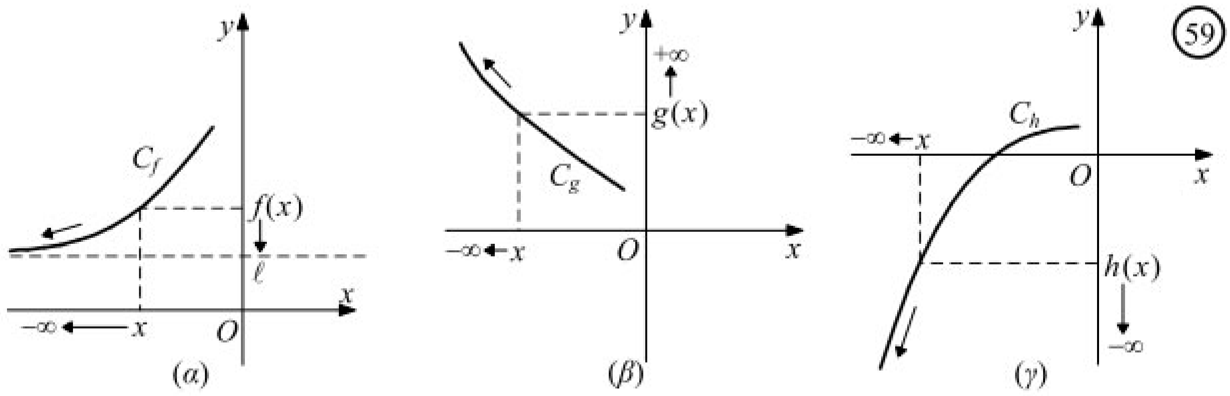
— το h(x) μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο +∞ όριο το −∞ και γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \to -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$. Έτσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty\,.$$

Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) = 2x^3\left(1-\frac{5}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right).$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)=1-0+0-0=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty=\lim_{x\to+\infty}(2x^3).$$

Γενικά:

Για την πολυωνυμική συνάρτηση:

$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x)=\lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Για παράδειγμα,

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{3x^2-x+1}{5x^3+x-7}.$$

Για $x \neq 0$ έχουμε :

$$f(x)=\frac{3x^2\left(1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)}{5x^3\left(1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}\right)}=\frac{3x^2}{5x^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}}{1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}}.$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}}{1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5x}\right)=0$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^3}\right)$$

Γενικά,

Για την ρητή συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$$

, $\alpha_\nu\neq 0$, $\beta_\kappa\neq 0$ ισχύει :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)\qquad\text{και}\qquad\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-6x+1}{3x^2+x-2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2}{3x^2}\right)=\frac{5}{3}.$$

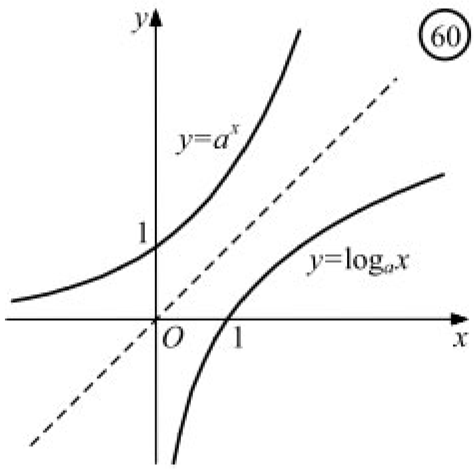
Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται [1] ότι :

Αν α >1 (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0,\qquad\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$$

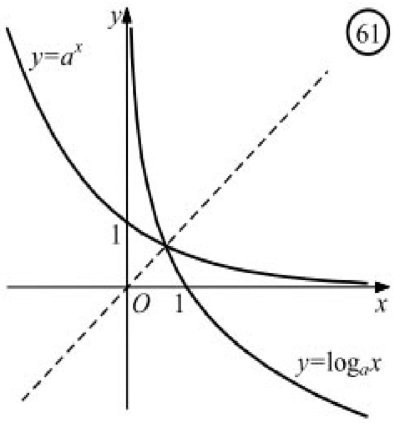
$$\lim_{x\to0}\log_\alpha x=-\infty,\qquad\lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$$



Αν 0 < α <1 (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$



ΜΕΘΟΔΟΣ (Εύρεσης ορίου $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ και $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ με $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα)

$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + a_0 \left(\alpha_\nu \neq 0\right)$, $Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \ \left(\beta_\mu \neq 0\right)$

Α. $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\alpha_\nu x^\nu\right)$ (παίρνουμε δηλαδή το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου)

Β. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} = \frac{a_\nu}{\beta_\mu} \lim_{x\to\pm\infty} x^{\nu-\mu}$ (δηλαδή παίρνουμε το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(3x^3-2x^2+x-1\right)\quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(5x^4+2x^3-x^2-x+1\right)$$

ΛΥΣΗ

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3-2x^2+x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3\right)=3\cdot(+\infty)=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^4+2x^3-x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^4\right)=5\cdot(+\infty)=+\infty$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 1.

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-3x^4+5x^2+x-3}{x^2+4x+7}\quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4+4x^3-2x^2+x-7}{5x+8}$$

ΛΥΣΗ

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5-3x^4+5x^2+x-3}{x^2+4x+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+4x^3-2x^2+x-7}{5x+8}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4}{5x}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=\dfrac{3}{5}\cdot(-\infty)=-\infty$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 1 και 2.

ΜΕΘΟΔΟΣ (Εύρεσης ορίου $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}\right)$

Αρχικά κάνουμε αντικατάσταση έχοντας υπόψη τις ιδιότητες των ορίων και τις επιτρεπτές πράξεις του απείρου. Αν πάρουμε απροσδιόριστη μορφή , τότε:

Α) Βγάζουμε «κοινό παράγοντα» εντός του ριζικού και στη συνέχεια «σπάμε τη ρίζα» [προσέχοντας αν $x>0$ $(x\to+\infty)$ ή $x<0$ $(x\to-\infty)$]. Αν η προηγουμένη διαδικασία δώσει και πάλι απροσδιόριστη μορφή, τότε:

Β) Πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση της και συνεχίζουμε τη διαδικασία του «κοινού παράγοντα».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$$

ΛΥΣΗ

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty+\infty=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)-\lim\limits_{x\to-\infty}x=+\infty-(-\infty)=+\infty$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}+x\right)\qquad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right)$$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\sqrt{x^2-x+1}+x=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x=x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x=x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]=(+\infty)\cdot 2=+\infty$$

ii) Έχουμε:

$$\sqrt{x^2+x-2}-x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-x=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-x=-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-x=-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1\right)$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1\right)\right]=(-\infty)\cdot 2=-\infty$$

3. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\sqrt{x^2-x+1}+x=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x=-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x=x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]=(-\infty)\cdot 0=;$$

Τώρα λοιπόν ακολουθούμε το Β) βήμα (Πολλαπλασιασμός με συζυγή παράσταση)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 3 και 4.

ΜΕΘΟΔΟΣ (Διερεύνηση ορίου $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,\lambda)$ όταν $x\to\pm\infty$)

Ακολουθούμε τα βήματα της προηγούμενης μεθόδου μεταφέροντας και την παράμετρο.

Καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής $(\pm\infty)\cdot g(\lambda)$ (όπου λ η παράμετρος)

Στη συνέχεια εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

A) $g(\lambda)>0 \Leftrightarrow \lambda\in\Delta_1$ (Δ_1 διάστημα)

B) $g(\lambda)<0 \Leftrightarrow \lambda\in\Delta_2$ (Δ_2 διάστημα)

Γ) $g(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=\alpha, \lambda=\beta,...$.Στην περίπτωση αυτή αντικαθιστούμε στο αρχικό όριο τις τιμές του λ και βρίσκουμε το ζητούμενο όριο με την μέθοδο που ξέρουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$

ΛΥΣΗ:

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$A=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu\right)\right]=(-\infty)(\mu-1)$$

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $\mu-1>0\Leftrightarrow\mu>1$, τότε $A=-\infty$

— Αν $\mu-1<0\Leftrightarrow\mu<1$, τότε $A=+\infty$

— Αν $\mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=1$, το ζητούμενο όριο γίνεται $A=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ (που με την διαδικασία του κοινού παράγοντα καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή $(-\infty)\cdot 0$.

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$A=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\frac{1}{(+\infty)\cdot(-2)}=0$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2}=\frac{\mu-1}{\mu}\lim_{x\to+\infty}x=\frac{\mu-1}{\mu}\cdot(+\infty),\mu\neq 0$$

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $\frac{\mu-1}{\mu}>0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1)>0 \Leftrightarrow \mu>1$ ή $\mu<0$, τότε $B=+\infty$

— Αν $\frac{\mu-1}{\mu}<0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1)<0 \Leftrightarrow 0<\mu<1$, τότε $B=-\infty$

— Αν $\frac{\mu-1}{\mu}=0 \Leftrightarrow \mu=1$, τότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

— Αν $\mu=0$, τότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+2x^2+3}{5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{5x}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=-\infty$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 5.

ΜΕΘΟΔΟΣ (Εύρεση ορίου εκθετικών και λογαριθμικών ορίων που είναι απροσδιόριστης μορφής)

— Αν έχουμε ζητούμενο όριο της μορφής $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(a^x,\beta^x)}{G(a^x,\beta^x)}$ με $a>\beta>0$, τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα το a^x και δημιουργούνται παραστάσεις $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$ που $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x=0$, αφού $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$

— Αν έχουμε ζητούμενο όριο της μορφής $\lim_{x\to-\infty}\frac{F(a^x,\beta^x)}{G(a^x,\beta^x)}$ με $a>\beta$, τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα το β^x και δημιουργούνται παραστάσεις $\left(\frac{a}{\beta}\right)^x$ που $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x=0$, αφού $\frac{a}{\beta}>1$.

— Στις λογαριθμικές συναρτήσειςΤης μορφής $\lim_{x\to\pm\infty}\ln P(x)$ ή $\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}\right)$ που καταλήγουν σε απροσδιόριστη μορφήδουλεύουμε βγάζοντας κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο ως προς x ή με συζυγή παράσταση όπως είδαμε προηγούμενα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^{x+2}-1}{3^{x+1}-5\cdot2^x+3}$ **ii)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{5\cdot e^{x+2}-7\cdot2^x}{e^{x+3}-2^{x+2}}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^{x+2}-1}{3^{x+1}-5\cdot2^x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left[1-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]}{3^x\left[3-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{3-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x}=\frac{1-4\cdot0-0}{3-5\cdot0+3\cdot0}=\frac{1}{3}$$

διότι:

$$0<\frac{2}{3}<1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0 \text{ και } 0<\frac{1}{3}<1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5\cdot e^{x+2}-7\cdot2^x}{e^{x+3}-2^{x+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left[5\cdot\frac{e^{x+2}}{2^x}-7\right]}{2^{x+2}\left[\frac{e^{x+3}}{2^{x+2}}-1\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{e^2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^x-7}{4\left[\frac{e^3}{4}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^x-1\right]}=\frac{\frac{5}{e^2}\cdot0-7}{4\left(\frac{e^3}{4}\cdot0-1\right)}=\frac{7}{4}$$

διότι:

$$\frac{e}{2}>1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^x=0$$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)\right) \quad \textbf{ii}\ \lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{|x|+1}$$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2+2x+3-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+3}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\ln\frac{2}{2}=\ln 1=0$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{|x|+1}=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\ln 1=0$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 6, 7 και 8.

ΜΕΘΟΔΟΣ (Όρια με τριγωνομετρικούς όρους της μορφής:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu a x^\kappa}{x^\nu},\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu a x^\kappa}{x^\nu}\quad(\kappa,\nu\in\mathbb{N})$$

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της παρεμβολής:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu a x^\kappa}{x^\nu}\right|\le\left|\frac{1}{x^\nu}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x^\nu}\right|\le\frac{\sigma\upsilon\nu a x^\kappa}{x^\nu}\le\left|\frac{1}{x^\nu}\right|$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\frac{1}{x^\nu}\right|=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\left|\frac{1}{x^\nu}\right|\right)=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu a x^\kappa}{x^\nu}=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\eta\mu x)^{2015}}{x^{999}}\right)\quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\eta\mu 3x}{x^2-x+\sigma\upsilon\nu 3x}$$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\left|\frac{(\eta\mu x)^{2015}}{x^{999}}\right|\le\frac{1}{x^{999}}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^{999}}\le\frac{(\eta\mu x)^{2015}}{x^{999}}\le\frac{1}{x^{999}}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^{999}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{999}}=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\eta\mu x)^{2015}}{x^{999}}\right)=0$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\eta\mu 3x}{x^2-x+\sigma\upsilon\nu 3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{x\eta\mu 3x}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{x\eta\mu 3x}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{\eta\mu 3x}{x}}{1-\frac{1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}}\quad(1)$$

Θα βρούμε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}$. Έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu 3x}{x}\right|\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu 3x}{x}\le\frac{1}{x}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x}=0$.

Όμοια:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}\right|\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu 3x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

από το κριτήριο της παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}=0$.

Επομένως από την (1) είναι $A=\frac{1+0}{1-0+0}=1$.

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 9 .

ΜΕΘΟΔΟΣ (Όρια με απόλυτα)

Σε όρια όπου συναντούμε $|g(x)|$ πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα επόμενα:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=l>0 \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ g(x)>0, x\in(\alpha,+\infty)$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=l>0 \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha<0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ g(x)>0, x\in(-\infty,\alpha)$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x)=l<0 \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ g(x)<0, x\in(\alpha,+\infty)$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=l<0 \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha<0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ g(x)<0, x\in(-\infty,\alpha)$$

Έτσι θα είναι $|g(x)|=g(x)$ ή $|g(x)|=-g(x)$ και θα έχουμε ένα όριο χωρίς απόλυτες τιμές, εφαρμόζοντας τα προηγούμενα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|2-x^2|+|x^2-3|+3x}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}(2-x^2)=-\infty \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ 2-x^2<0,\ x\in(\alpha,+\infty)\\ \lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3)=+\infty \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \beta>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ 2-x^2<0,\ x\in(\beta,+\infty)\supset(\alpha,+\infty)\end{array}\right. (\alpha>\beta)$$

Επομένως (όταν $x\in(\alpha,+\infty)$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|2-x^2|+|x^2-3|+3x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(2-x^2)+(x^2-3)+3x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 10 .

ΜΕΘΟΔΟΣ (Θεωρητικές ασκήσεις)

Οι περισσότερες θεωρητικές ασκήσεις ανήκουν στην κατηγορία «Η συνάρτηση κρύβεται» και ακολουθούμε τη γνωστή διδικασία. Στο τέλος του Κεφαλαίου θα δούμε και συνδυαστικές-θεωρητικές ασκήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=3$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x-3f(x)}{f(x)+3x+2}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-3f(x)}{f(x)+3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-3\frac{f(x)}{x}\right)}{x\left(\frac{f(x)}{x}+3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-3\frac{f(x)}{x}}{\frac{f(x)}{x}+3+\frac{2}{x}}=\frac{5-3\cdot 3}{3+3+0}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

2. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-3f(x)}{f(x)+3x}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3f(x)}{f(x)+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3xg(x)}{xg(x)+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\big(5-3g(x)\big)}{x\big(g(x)+3\big)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-3g(x)}{g(x)+3}=\frac{5-9}{3+3}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 11, 12, 13 και 14.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ

1/Α (Σχολικό). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3+2x-5)$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-2x+1)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^3+8}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^{10}+x+3}$

vii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{5}{x+2}\right)$ viii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5}{x}-\frac{x^2+3}{x+2}\right)$.

2/Α (Σχολικό). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right)$, $\alpha\neq\beta$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$.

3/Α (Σχολικό). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$.

B. Εμπεδώνω

2/Β (Σχολικό). Να προσδιορίσετε το λ ∈ R, ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x\right)$ να υπάρχει στο **R**.

3/Β (Σχολικό). Αν $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+\beta$, να βρείτε τις τιμές των α, β ∈ R για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

4/Β (Σχολικό). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$.

Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^5-2x^3+x^2+2\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^7-3x^4+3x^3+9\right)$

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7x^{10}-7x^9+6x^2-3\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^{13}+8x^8+9x^5+11\right)$

3. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-2}+9x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-2}-9x\right)$

4. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-x-2}-3x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+x-2}-3x\right)$

5. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-5}+\lambda x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-2)x^5-3x^3+2x^2+x-1}{(\lambda+1)x^3-3x^2+x+3}$

6. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x-3^{x+1}+2}{4^{x+2}-5\cdot 3^x+1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot e^{x+1}-6\cdot 2^x}{e^x-2^{x+1}}$

7. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^\nu+2015}{8x^3+2014}$ $(\nu\in\mathbb{N})$ **ii)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]$`

8. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2+1}{x+1}}$

9. Να βρείτε τα όρια:

i) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x+5}$ **ii)** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x^{23}}{x^2+3x+5}$,

iii) $\Gamma=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-\eta\mu x}{x^2+\sigma\upsilon\nu x}$ **iv)** $\Delta=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x\eta\mu 2x}{x^2-x+\sigma\upsilon\nu 2x}$

10. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^3-2|-|x^2+2x-4|}{x^2+1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^4+6|-|x^2+2x-4|}{x^2+1}$

11. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2f(x)}{f(x)+5x+1}$

12. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \ (1),\ \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]=3 \ (2)$$

Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}^*$ ώστε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)+\lambda x-1}{xf(x)-2x^2+1}=1$$

13. Αν $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\left[3f^2(x)+2g^2(x)\right]=0$$

,να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$

14. Αν $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3 \text{ και } \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-3x\right]=4$$

Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)+\mu x-2}{xf(x)-3x^2+x+1}=2$$

ΜΑΘΗΜΑ 16^{ο}
Επανάληψη στα όρια

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $f(x) > \lambda \left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$ «κοντά» στο x_0, τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \lambda$

2. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \left|f(x)\right| = l \left(l \in \mathbb{R}\right)$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -l$

3. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$, τότε $f(x) \geq 0$ «κοντά στο x_0».

4. Μια συνάρτηση είναι δυνατόν να μην ορίζεται σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ αλλά να υπάρχει το όριό της στο x_0.

5. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ (Με την προϋπόθεση ότι όλα τα όρια υπάρχουν).

6. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x) + g(x)\right] = l \in \mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν πάντα τα όρια $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

7. Για όλες τις συναρτήσεις f, g με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ είναι :

$$\lim_{x \to x_o} \left[f(x) - g(x)\right] = 0.$$

8. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f\left(x\right) \neq 0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

9. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε η f παίρνει μόνο θετικές τιμές «κοντά» στο x_0

10. Αν η f είναι άρτια συνάρτηση και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, τότε και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

11. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left|f(x)\right| = +\infty$

12. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$

13. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

14. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. Αν $a > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

16. Αν Αν $a > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

17. Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

18. Αν Αν $a > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^3} = 0$

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{(x-1)^4} = -\infty$

Τέστ Θεωρίας (30΄) στα ΟΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

2) Το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

3) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f με $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_0 και αν το όριο της f στο x_0 υπάρχει, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$.

4) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$

5) Δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbf{N}$

6) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

7) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8) Αν $\lim\limits_{x \to x_o} [f(x) + g(x)] = l \in \mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν πάντα τα όρια $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

9) Αν Αν $a > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

10) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = l \, (l \in \mathbb{R})$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -l$

(Μονάδες 10x3=30)

Β. Πότε λέμε ότι της f έχει αριστερό όριο στο x_0, και πότε δεξιό όριο στο x_0 και πώς σχετίζονται αυτά με την ύπαρξη του ορίου της f στο x_0;

(Μονάδες 20)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

(Μονάδες 20)

B. Έστω το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in \mathrm{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

(Μονάδες 30)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

(Μονάδες 7)

Α2. Αν $P(x)$ πολυώνυμο ν βαθμού ($\nu \in \mathbb{N}$) και $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

(Μονάδες 8)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$, τότε κατ΄ανάγκη $\lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

β) Ισχύει $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

γ) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ "κοντά" στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

δ) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$

ε) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x^2 - x}$$

(Μονάδες 8)

Β2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \to 3} \frac{|1 - x^2| + |x^2 - 3| - 14}{x^2 - 2x - 3}$$

(Μονάδες 8)

Β3. Να βρείτε το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ (αν υπάρχει):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}, & \alpha\nu\ x > 1 \\ \frac{x^2 - x}{\eta\mu 3x}, & \alpha\nu\ x < 1 \end{cases}$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν f, g οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}-1$ και $g(x)=(x-2)^2$ αντίστοιχα, να βρείτε τα επόμενα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 1}\frac{(fog)(x)}{x^2-1} \qquad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-1}{x}$$

(Μονάδες 4x2=8)

Γ2. Να βρείτε τα α και β ώστε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^3-\beta x^2+x-1}{x^2-x-2}=-2$$

(Μονάδες 9)

Γ3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \qquad \text{και} \qquad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} g(x)$$

για όλες τις τιμές των λ, μ ϵ **R.**

(Μονάδες 4x2=8)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-2xy \text{ για κάθε } x,y\in[0,+\infty),$$

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές $f(0),\ f(1),\ f(2)$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».

(Μονάδες 10)

Δ3. Αν $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x^2)}{x^2}, \alpha\nu\ x>0\\ x^5\eta\mu\dfrac{2015}{x^{2015}}-a, \alpha\nu\ x<0\end{cases}$$

, να βρείτε το α ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

(Μονάδες 9)

Τα μαθήματα συνεχίζονται...............