**ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΣΤΑ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Παρασκευή, 10/06/2016**

---

## ΘΕΜΑ 1ο

**Α1.** Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 38.

**Α2**. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 13.

**Α3.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 92.

**Α4.**

**α)** Σωστό.

**β)** Λάθος.

**γ)** Λάθος.

**δ)** Σωστό.

**ε)** Λάθος.

## ΘΕΜΑ 2ο

**Β1**. $f(1)=2 \Leftrightarrow \sqrt{1+a}=2 \Leftrightarrow a+1=4 \Leftrightarrow a=3$

**Β2**. Για $a=3$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\sqrt{x^2+3},\ x\in\mathbb{R}$. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}},\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι $f'(1)=\frac{1}{2}$, $f(1)=2$.

Έστω $y=\lambda x+\kappa$ με $\lambda,\kappa\in\mathbb{R}$ η ζητούμενη εφαπτομένη στο σημείο $A(1, f(1))$. Τότε $\lambda=f'(1)=\frac{1}{2}$. Άρα είναι $y=\frac{1}{2}x+\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$ (1). Οι συνετεταγμένες του σημείου $A$ θα επαληθεύουν την εξίσωση (1). Επομένως. $2=\frac{1}{2}\cdot 1+\kappa \Leftrightarrow \kappa=\frac{3}{2}$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

**Β3**. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=0\Leftrightarrow x=0$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow x>0$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow x<0$$

Άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$,οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=\sqrt{3}$.

**Β4.** Το ζητούμενο όριο γράφεται διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

## ΘΕΜΑ 3$^o$

**Γ1 α**). Έχουμε:

$$P(\Pi)=\frac{26}{51}$$
$$P(\Pi)=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}=\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}\Leftrightarrow\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}=\frac{26}{51}\Leftrightarrow 52\lambda+26=51\lambda+51\Leftrightarrow \lambda=25$$
$$N(\Omega)=2\cdot 25+1=51$$

**β)** Έστω $N\left(M\cap A\right)=x$ το πλήθος των σφαιρών που είναι μπλέ με άρτια ένδειξη. Τότε:

$$P\left(M\cap A\right)=\frac{x}{51}\Leftrightarrow\frac{6}{51}=\frac{x}{51}\Leftrightarrow x=6$$

**Γ2. α)** Τα $M$ και $K$ είναι ασυμβίβαστα και συμπληρωματικά μεταξύ τους ,δηλαδή $M\cup K=\Omega$ και $M\cap K=\varnothing$. Άρα:

$$P\left(M\cup K\right)=P\left(M\right)+P\left(K\right)\Leftrightarrow 1=P\left(M\right)+\frac{7}{10}P\left(M\right)\Leftrightarrow\frac{17P\left(M\right)}{10}=1\Leftrightarrow P\left(M\right)=\frac{10}{17}$$

Αν $N(M)$ το πλήθος των μπλε σφαιρών έχουμε:

$$P(M)=\frac{10}{17}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{51}=\frac{10}{17}\Leftrightarrow N(M)=\frac{510}{17}\Leftrightarrow N(M)=30$$

Άρα το πλήθος των κόκκινων σφαιρών είναι $N(K)=51-30=21$.

**β)** Το πλήθος των μπλέ σφαιρών με περιττό αριθμό είναι $N(M\cap\Pi)=30-6=24$, αφού οι 6 είναι μπλέ με άρτιο αριθμό. Επομένως:

$$P(M\cap\Pi)=\frac{N(M\cap\Pi)}{N(\Omega)}=\frac{24}{51}$$

**γ)** Το πλήθος των περιττών σφαιρών είναι 26. Οι μπλέ σφαίρες είναι 30. Από αυτές οι 6 είναι με άρτιο αριθμό. Άρα οι υπόλοιπες 30-6=24 είναι μπλέ σφαίρες με περιττό αριθμό. Άρα οι 26-24=2 είναι οι κόκκινες σφαίρες με περιττό αριθμό, δηλαδή $N(K\cap\Pi)=2$. Άρα:

$$P(K\cap\Pi)=\frac{N(K\cap\Pi)}{N(\Omega)}=\frac{2}{51}$$

## <u>ΘΕΜΑ 4$^{ο}$</u>

**Δ1.**

- Αν ν=άρτιος , τότε $\delta=\dfrac{x_{\frac{\nu}{2}}+x_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}=3\Leftrightarrow x_{\frac{\nu}{2}}+x_{\frac{\nu}{2}+1}=6$ (δηλαδή το ημιάθροισμα των δύο «μεσαίων» παρατηρήσεων. Η μόνη δυνατότητα δοκιμάζοντας τις τιμές είναι $x_6=x_7=3$.

Άρα $\dfrac{\nu}{2}=6\Leftrightarrow\nu=12$

- Αν ν=περιττός, τότε $\delta=x_{\frac{\nu+1}{2}}=3$ (δηλαδή η μεσαία παρατήρηση) ,άρα $\dfrac{\nu+1}{2}=6$ (6$^{η}$ παρατήρηση) ή $\dfrac{\nu+1}{2}=7$ (7$^{η}$ παρατήρηση). Επομένως $\dfrac{\nu+1}{2}=6\Leftrightarrow\nu=11$ ή $\dfrac{\nu+1}{2}=7\Leftrightarrow\nu=13$

Επομένως ν=12 ή ν=11 ή ν=13.

**Δ2. α)**

| $x_i$ | $\nu_i$ | $x_i\cdot\nu_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 6 |
| 4 | 4 | 16 |

| | | |
|---|---|---|
| $x_6$ | 1 | $x_6$ |
| ΣΥΝΟΛΟ | ν=12 | 27+ $x_6$ |

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow \frac{8}{3} = \frac{27 + x_6}{12} \Leftrightarrow 81 + 3x_6 = 96 \Leftrightarrow 3x_6 = 15 \Leftrightarrow x_6 = 5$$

**β)** Για το διάγραμμα των συχνοτήτων: σε ένα διάγραμμα $x_i - v_i$ υψώνουμε σε κάθε $x_i$ μία κάθετη γραμμή με μήκος $v_i$. Ενώνοντας τα σημεία $\left(x_i, v_i\right)$ παίρνουμε το πολύγωνο συχνοτήτων.

**Δ3.** Ο νέος πίνακας που διαμορφώνεται με βάση τα νέα δεδομένα είναι:

| $y_i$ | $v_i$ | $x_i \cdot v_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 6 |
| 3 | 2 | 6 |
| 4 | 4 | 16 |
| 5 | 1 | 5 |
| ΣΥΝΟΛΟ | ν=12 | 35 |

Αν  είναι η νέα μέση τιμή έχουμε:

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i \cdot v_i}{v} \Rightarrow \overline{y} = \frac{35}{12}$$

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης , Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών