Λύσεις θεμάτων ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ -4- Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016

Στο μάθημα: « Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής»

Γ΄Λυκείου, 22/04/2016

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Απάντηση

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α2. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f;

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Α3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα $(\alpha,\ \beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

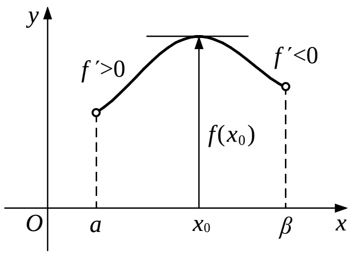
Απάντηση

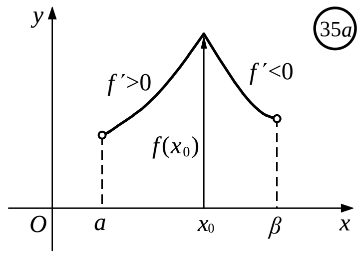
Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \qquad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0),\ \text{για κάθε } x \in (\alpha, \beta)\ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν f συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε ισχύει πάντοτε και $\int_a^\beta f(x)dx \neq 0$.

Σωστό (αφού η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Επομένως $\int_a^\beta f(x)dx > 0$ ή $\int_a^\beta f(x)dx < 0$).

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου:

$$A = \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \to \beta^-} f(x).$$

Λάθος (είναι $(B,\ A)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα)

γ. Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Σωστό

δ. Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Σωστό (αφού η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και χωρίς ρίζες θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι ή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως αύξουσα, ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως φθίνουσα).

ε. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση C_f της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Σωστό (αν $x_1 \in \mathbb{R}$ θέση τοπικού ακροτάτου, τότε από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_1)=0$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$-οριζόντια εφαπτομένη).

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & \text{αν } x<0 \\ \lambda, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

B1. Να δείξετε ότι $\kappa=2$ και $\lambda=4$.

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

ΛΥΣΗ

B1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, άρα και στο $x_0=0$

f : συνεχής στο $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{2+\kappa\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \frac{2+\kappa\cdot 1}{1} = 2+\kappa$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = 4$$

$$f(0) = \lambda$$

Άρα: $\lambda = 4$ και $2+\kappa = 4 \Leftrightarrow \kappa = 2$ και επομένως:

B2. Για $\kappa = 2$ και $\lambda = 4$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x+16-9x^2}{\sqrt{8x^2+x+16}+3x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x^2}}+3\right)} = (+\infty)\left(\frac{-1}{\sqrt{8}+3}\right) = -\infty$$

B3. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+2\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\left(2+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right] = 0,$$

αφού: $$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{-1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$$

και $$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$$, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$$

B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)-2\ln(8x+1),\ x\in[0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$)

Επίσης:

$$g(0)=f(0)=4>0$$

$$g(1)=f(1)-2\ln 9=2-2\ln 9=2\ln\frac{e}{9}<0$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, έχουμε ότι η εξίσωση:

$$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=2\ln(8x+1)$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω μία συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1)=0$$

$$f'(1)=1$$

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=2\ln x+3,\ \text{για κάθε } x>0$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-x(2\ln x+1),\ x>0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0,\ +\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x,\ x>0$

Γ3. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Αν ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t)>1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{fof} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με $1\ cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία $x(t_0)=2\ cm$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|<\sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}$$

για κάθε $a,\ \beta\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ με $a<\beta$.

ΛΥΣΗ

Γ1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$g'(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)-2\ln x-1-2=2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)-2\ln x-3=0$$

, λόγω της δεδομένης σχέσης. Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x)=c\in\mathbb{R}$, για κάθε x>0.

Γ2. Αφού από το ερώτημα Δ1 η συνάρτηση g είναι σταθερή θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $g(x)=c$.

Για $x=1\Rightarrow g(1)=c\Rightarrow 2f(1)+f'(1)-1=c\Rightarrow c=0$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$g(x)=0\Leftrightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)-x\left(2\ln x+1\right)=0\Leftrightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=x\left(2\ln x+1\right)\Leftrightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=2x\ln x+x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[x^2f(x)\right]'=\left[x^2\ln x\right]'\Leftrightarrow x^2f(x)=x^2\ln x+c_1\ (c_1\in\mathbb{R})$$

Για $x=1\Rightarrow f(1)=0+c_1\Rightarrow c_1=0$

Επομένως:

$$x^2 f(x) = x^2 \ln x \Leftrightarrow f(x) = \ln x,\ x > 0$$

Γ3. i). Έστω $A(x_0,\ f(x_0))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης C_f της f με την εφαπτομένη της (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο Α είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

Αφού η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $0(0,0)$ έχουμε:

$$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -\ln x_0 = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$$

Επομένως η ζητούμενη εξισωση είναι:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

ii) Έχουμε:

$$y(t) = (fof)(x(t)) = f(f(x(t))) = \ln(\ln(x(t)),\ t > 0,\ x(t) > 1$$

Η συνάρτηση $y(t)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $t > 0$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $t > 0$) με:

$$y'(t) = \frac{1}{\ln(x(t)} \cdot (\ln(x(t))' = \frac{1}{\ln(x(t)} \cdot \frac{1}{x(t)} \cdot x'(t),\ t > 0$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ sec είναι:

$$t = t_0 \Rightarrow y'(t_0) = \frac{1}{\ln(x(t_o)} \cdot \frac{1}{x(t_0)} \cdot x'(t_0) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2\ln 2}\ cm/\sec$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ln(|f(x)|),\ x \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right]$. Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right])$ με $K'(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $x \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right]$. Η $K'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συνατήσεων στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right])$ με $K''(x) = \frac{-(1+\ln x)}{x^2 \ln^2 x} > 0$, για κάθε $\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$ (είναι $x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0$).

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$, δηλαδή η K είναι κυρτή στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα $\left[a,\ \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ αντίστοιχα αφού:

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[a,\ \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ (άρα και συνεχής σε αυτά). Επομένως, υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(a,\ \frac{a+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right)$ τέτοια, ώστε:

$$K'(\xi_1) = 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)-K(a)}{\beta-\alpha} \quad \text{και} \quad K'(\xi_2) = 2\frac{K(\beta)-K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow K'(\xi_1) < K'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)-K(a)}{\beta-\alpha} < 2\frac{K(\beta)-K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)-K(a) < K(\beta)-K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < K(a)+K(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right) < \ln|f(a)|+\ln|f(\beta)| \Rightarrow \ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < \ln\left(|f(a)|\cdot|f(\beta)|\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < |f(a)|\cdot|f(\beta)| \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{|f(a)|\cdot|f(\beta)|} \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}$$

$\left(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\, f(a)<0,\ f(\beta)<0, \delta\iota\acute{o}\tau\iota\, \alpha,\beta \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right)\right)$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x,\ x \in \mathbb{R}$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

ii) Να αποδείξετε ότι :

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \ge e^5 \cdot x\left(x^4 + x^2 + 1\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ2. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1)$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x \ge 2x_0^{\,6}+3x_0^{\,4}+6x_0^{\,2}-12x_0$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$3<\frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2-\xi_1}<42 \quad \text{με } 0<\xi_1<\xi_2<1$$

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι:

$$3\int_0^1 e^{x^2}dx \ge 4$$

ii) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0, το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \left| f^{-1}(x) \right| dx$$

ΛΥΣΗ

Δ1.

i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$f'(x)=5x^4+3x^2+1>0,\ x\in\mathbb{R},$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή είναι «1-1» οπότε η f αντιστρέφεται.

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$e^{5x}+e^{3x+2}+e^{x+4} \ge e^5\cdot x\left(x^4+x^2+1\right) \Leftrightarrow \frac{e^{5x}+e^{3x+2}+e^{x+4}}{e^5} \ge x^5+x^3+x \Leftrightarrow e^{5(x-1)}+e^{3(x-1)}+e^{x-1} \ge x^5+x^3+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(e^{x-1}) \ge f(x) \Leftrightarrow e^{x-1} \ge x$$

Η τελευταία σχέση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού:

- Για $x>0$ γίνεται $x-1\ge \ln x$ (αληθής με χρήση της εφαρμογής 2,ii) στη σελίδα 266 του σχολικού βιβλίου).
- Για $x\le 0$, είναι προφανής, αφού $e^{x-1}>0$.

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

Σημείωση: Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x-1}-x,\ x\in\mathbb{R}$ και να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της, οπότε αποδυκνείουμε ότι $g(x)\ge 0 \Leftrightarrow e^{x-1}\ge x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

Δ2.

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=f(x)-1,\ x\in[0,1]$.

- Η συνάρτηση $K(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική).
- $\begin{matrix} K(0)=f(0)-1=-1<0 \\ K(1)=f(1)-1=2>0 \end{matrix}$, άρα $K(0)\cdot K(1)<0$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε $K(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=1$. Επειδή η f είναι συνάρτηση «1-1» το x_0 είναι μοναδικό.

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=2x^6+3x^4+6x^2-12x, x\in\mathbb{R}$ και έτσι θέλουμε ισοδύναμα να λύσουμε την ανίσωση:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x \geq 2{x_0}^6+3{x_0}^4+6{x_0}^2-12x_0 \Leftrightarrow h(x)\geq h(x_0) \quad \text{(I)}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$h'(x)=12x^5+12x^3+12x-1=12\left[\left(x^5+x^3+x\right)-1\right]=12(f(x)-1),\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} &h'(x)=0 \Leftrightarrow 12(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow x=x_0\in(0,1) \\ &x>x_0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>1 \Leftrightarrow f(x)-1>0 \Leftrightarrow h'(x)>0 \\ &0<x<x_0 \Leftrightarrow f(x)<f(x_0) \Leftrightarrow f(x)<1 \Leftrightarrow f(x)-1<0 \Leftrightarrow h'(x)<0 \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=x_0$ και άρα είναι $h(x)\geq h(x_0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος (Δ2 ii)

Έχουμε ισοδύναμα:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x \geq 2{x_0}^6+3{x_0}^4+6{x_0}^2-12x_0 \Leftrightarrow \frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x \geq \frac{{x_0}^6}{6}+\frac{{x_0}^4}{4}+\frac{{x_0}^2}{2}-x_0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αφού η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$\begin{aligned} &F'(x)=x^5+x^3+x=f(x),\ x\in\mathbb{R} \\ &F''(x)=f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_F της F στο σημείο της $A(x_0, F(x_0))$ είναι:

$$y-F(x_0)=F'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y=F(x_0)+f(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y=F(x_0)+(x-x_0)$$

Αφού η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$F(x)\geq y \Leftrightarrow F(x)\geq F(x_0)+(x-x_0) \Leftrightarrow F(x)-x\geq F(x_0)-x_0 \Leftrightarrow \frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x > \frac{{x_0}^6}{6}+\frac{{x_0}^4}{4}+\frac{{x_0}^2}{2}-x_0,\ x\in\mathbb{R}$$

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (I) είναι το $\mathbb{R}$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\xi_1+1,\ \xi_2+1\right]$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\xi_1+1\le t\le \xi_2+1 \Rightarrow f\left(\xi_1+1\right)\le f(t)\le f\left(\xi_2+1\right)\Rightarrow \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f\left(\xi_1+1\right)dt\le \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt\le \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f\left(\xi_2+1\right)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\xi_1+1\right)\left(\xi_2-\xi_1\right)\le \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt\le f\left(\xi_2+1\right)\left(\xi_2-\xi_1\right)\Rightarrow f\left(\xi_1+1\right)\le \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2-\xi_1}\le f\left(\xi_2+1\right)\ (II)$$

Τώρα έχουμε:

$$0<\xi_1<\xi_2<1\Rightarrow 1<\xi_1+1<\xi_2+1<2\Rightarrow f(1)<f\left(\xi_1+1\right)<f\left(\xi_2+1\right)<f(2)\Rightarrow 3<f\left(\xi_1+1\right)<f\left(\xi_2+1\right)<42\ (III)$$

Επομένως, από τη σχέση (ΙΙ),λόγω της σχέσης (ΙΙΙ) προκύπτει ότι:

$$3\le \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2-\xi_1}\le 42$$

Δ4.

i) Ισχύει ότι $e^{x-1}\ge x,\ x\in\mathbb{R}$ (ερώτημα Δ1,ii). Αν θέσουμε όπου x το x^2+1 έχουμε $e^{x^2}\ge x^2+1\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\ge 0$ (IV), για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\varphi(x)=e^{x^2}-x^2-1$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$(ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$) και επίσης δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (IV) έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^1\left(e^{x^2}-x^2-1\right)dx>0\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 1dx\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx>\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[x\right]_0^1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx>\frac{1}{3}+1\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx>\frac{4}{3}\Rightarrow 3\int_0^1 e^{x^2}dx>4$$

ii) Θέτουμε $f^{-1}(x)=u$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)\\
&dx=f'(u)du\\
&x=0\Leftrightarrow f(u)=0\Leftrightarrow u=0\\
&x=1\Leftrightarrow f(u)=1\Leftrightarrow u=x_0\\
&u\in\left[0,x_0\right]\subseteq\left[0,1\right]\Rightarrow u\ge 0
\end{aligned}$$

Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^1\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^{x_0}|u|f'(u)du=\int_0^{x_0}uf'(u)du=\int_0^{x_0}u\left(5u^4+3u^2+1\right)du=\int_0^{x_0}\left(5u^5+3u^3+u\right)du=\left[\frac{5u^6}{6}+\frac{3u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_0^{x_0}=\frac{5x_0^{\ 6}}{6}+\frac{3x_0^{\ 4}}{4}+\frac{x_0^{\ 2}}{2}$$