Λύσεις θεμάτων ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ -2- Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016
Στο μάθημα: « Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής»
Γ΄Λυκείου,
23/03/2016

ΘΕΜΑ 1^{ο} :

Α1. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μίας συνάρτησης f στο διάστημα Δ;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta.$$

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0\in\Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f εκτός από το κοινό τους σημείο.

Σωστό

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α , β , γ ∈ Δ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_a^\gamma f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx.$$

Λάθος

γ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \text{εφόσον}\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

Σωστό

δ. Αν το $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε $f''\left(x_0\right)=0$.

Σωστό

ε. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $\left[a,\beta\right]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx.$$

Σωστό

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}+2$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

Β3. Να ορίσετε την f^{-1}.

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη .

Β5. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog .

ΛΥΣΗ

Β1. Πρέπει να ισχύει:

$$e^x-2\ge 0 \Leftrightarrow e^x\ge 2 \Leftrightarrow x\ge \ln 2$$

Επομένως $D_f=[\ln 2,\ +\infty)$

Β2. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f **.** Εχουμε διαδοχικά:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}-2<e^{x_2}-2 \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}<\sqrt{e^{x_2}-2} \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}+3<\sqrt{e^{x_2}-2}+3$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,\ +\infty)$.

<u>Σημείωση:</u> Μπορεί, πιο εύκολα, η μονοτονία της συνάρτησης f να προκύψει και ως εξής: *Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με* $f'(x)=\dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x-2}}$, $x>\ln 2$. *Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο* $[\ln 2,\ +\infty)$.

Έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[f(\ln 2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ με $f(\ln 2)=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\sqrt{e^x-2}+3\right)=+\infty$, δηλαδή το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[3,\ +\infty)$. Η f δεν έχει ρίζες αφού $f(x)\ge 3$, για κάθε $x\in[\ln 2,\ +\infty)$.

Β3. Για κάθε $y\in[3,\ +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=4\sqrt{e^x-2}+3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{4}=\sqrt{e^x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{y-3}{4}\right)^2=e^x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x=\left(\frac{y-3}{4}\right)^2+2 \Leftrightarrow x=\ln\left[\left(\frac{y-3}{4}\right)^2+2\right]$$

Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \ln\left[\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 2\right],\ x \in [3,\ +\infty)$$

Β4. Η συνάρτηση g είναι άρτια , αφού $g(x) = g(-x) = \frac{1}{x^2} + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Επομένως η g **δεν** είναι αντιστρέψιμη.

Β4. Για το πεδίο ορισμού της fog έχουμε:

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \,/\, \frac{1}{x^2} + 2 \geq \ln 2\right\} = \mathbb{R}^*$$

(αφού $\frac{1}{x^2} + 2 > 1,\ \ln 2 < 1$ είναι πάντα αληθείς)

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(fog)(x) = f\left(g(x)\right) = 4\sqrt{e^{\frac{1}{x^2}+3} - 2} + 2$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot \ln x,\ x > 0.$$

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ4. i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e},\ x = e$.

ΛΥΣΗ

Γ1. Έχουμε:

$$2x\cdot\ln x+\frac{1}{x}>0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}2x^2\cdot\ln x+1>0,$$

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση:

$g(x)=2x^2\cdot\ln x+1$, $x>0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$g'(x)=4x\cdot\ln x+2x=2x\cdot(2\ln x+1)$$

και έχουμε:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x\cdot(2\ln x+1)=0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

και

$$g'(x)>0\Leftrightarrow 2x\cdot(2\ln x+1)>0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}\ln x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$g'(x)<0\Leftrightarrow 2x\cdot(2\ln x+1)<0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}\ln x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},\ +\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{e-1}{e}>0.$$

Επομένως:

$$g(x)\geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{e-1}{e}>0 \text{ για κάθε } x>0\ ,$$

άρα αποδείξαμε ότι:

$$2x\ln x+\frac{1}{x}>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Γ2. Έχουμε: Η f είναι και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$f'(x)=[(x^2+1)\cdot\ln x]'=2x\ln x+x+\frac{1}{x}=x+\left(2x\ln x+\frac{1}{x}\right)>0$$

Αφού:

$x>0$ και $2x\ln x+\frac{1}{x}>0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$.

Επίσης το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=0$, η οποία λόγω της μονοτονίας της f είναι και μοναδική.

Γ3. Έχουμε: Η f' είναι και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με;

$$f''(x)=\left(2x\ln x+x+\frac{1}{x}\right)'=2\ln x+2+1-\frac{1}{x^2}=2\ln x+3-\frac{1}{x^2}$$ και

$$f^{(3)}(x)=\left(2\ln x+3-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}>0$$ για κάθε $x>0$.

Αφού $f^{(3)}(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e}\right)=1-e^2<0$ και $f''(1)=2>0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},\ 1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε:

$$0 < x < x_0 \overset{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0$$

και

$$x > x_0 \overset{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0.$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Γ4. i. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot \ln x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x^2+1)\cdot \ln x = -\infty,$$

αφού:

$$\lim_{x\to 0+}(x^2+1) = 1 \text{ και } \lim_{x\to 0+}\ln x = -\infty.$$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|f(x)\right| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{e} f(x)dx = -I_1 + I_2$, όπου $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx$ και $I_2 = \int_{1}^{e} f(x)dx$

αφού , επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$$
$$\frac{1}{e} < x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$$

Έχουμε:

$$I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x dx=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}=\frac{4}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}$$

$$I_2=\int_1^e\left(x^2+1\right)\cdot\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x dx=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx=\frac{e^3}{3}+e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=$$

$$=\frac{e^3}{3}+e-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\left[x\right]_1^e=\frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}+\frac{10}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{20}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}\ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\ .$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ \ x\in\mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1\left(e^x-1\right)\frac{f(x)}{e^x-x}dx$$

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(e^x f'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x=xf'(x)+c\ \ (1)$$

Για $x=0$ είναι $0-1=0+c\Leftrightarrow c=-1$. Επομένως από την σχέση (1) έχουμε:

$$e^x f'(x)-e^x=xf'(x)-1\Leftrightarrow e^x f'(x)-xf'(x)=e^x-1\Leftrightarrow\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}\ \ (2)$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$. Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x\in\mathbb{R}$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x\in\mathbb{R}$) με $h'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$
$$h'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$$
$$h'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow x<0$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)$ είναι και συνεχής στο $x_0=0$ είναι :

- Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επομένως η $h(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, δηλαδή $h(x)\geq h(0)=1>0$, $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln\left|e^x-x\right|\right)'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left|e^x-x\right|+c_1,\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ είναι $0=0+c_1\Leftrightarrow c_1=0$. Επομένως από την σχέση (2) έχουμε $f(x)=\ln\left|e^x-x\right|$ ή $f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ x\in\mathbb{R}$, αφού $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}$. Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow x<0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$ (επειδή η f είναι και συνεχής στο 0).

Δ3. Η f' είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f''(x) = \dfrac{(2-x)e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $(2-x)e^x - 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $K(x) = (2-x)e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$K'(x) = -e^x + (2-x)e^x = e^x(1-x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} K'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 1 \\ K'(x) > 0 &\Leftrightarrow x < 1 \\ K'(x) < 0 &\Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_1 = 1$ το $K(1) = e - 1 > 0$.

Θα βρούμε τις εικόνες $K\left((-\infty,1]\right)$, $K\left([1,+\infty)\right)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} K\left((-\infty,1]\right) &= \left(\lim_{x\to-\infty} K(x),\ K(1)\right] = \left(-1,\ e-1\right] \\ K\left([1,+\infty)\right) &= \left(\lim_{x\to+\infty} K(x),\ K(1)\right] = \left(-\infty, e-1\right] \end{aligned}$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} K(x) = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} K(x) = -\infty$$

Επειδή $0 \in \left(-1,\ e-1\right]$ και $0 \in \left(-\infty, e-1\right]$ η $K(x)$ έχει μία ρίζα ξ_1 στο $(-\infty,1]$ και μία ρίζα ξ_2 στο $[1,+\infty)$, οι οποίες είναι μοναδικές, επειδή η $K(x)$ είναι «1-1» στα διαστήματα αυτά (ως γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[1, +\infty)$ αντίστοιχα). Για να αποδείξουμε όμως ότι τα σημεία $A\left(\xi_1, f(\xi_1)\right)$ και $B\left(\xi_2, f(\xi_2)\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f πρέπει να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ (ισοδύναμα η $K(x)$) αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ξ_1, ξ_2.

Έχουμε:

$$1 > x > \xi_1 \Rightarrow K(x) > K(\xi_1) \Rightarrow K(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$
$$x < \xi_1 \Rightarrow K(x) < K(\xi_1) \Rightarrow K(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$
$$x > \xi_2 \Rightarrow K(x) < K(\xi_2) \Rightarrow K(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$
$$1 < x < \xi_2 \Rightarrow K(x) > K(\xi_2) \Rightarrow K(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Επομένως η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής τα $\xi_1 \in (-\infty,\ 1]$ και $\xi_2 [1,\ +\infty)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln\left(e^x - x\right) - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- $h(0) = -1 < 0$
- $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$ (διότι $\dfrac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$). Άρα $h(0) \cdot h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$.
- Επομένως υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x_0} - x_0\right) - \sigma\upsilon\nu x_0$. Για τη μοναδικότητα του x_0 θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη (ή «1-1» με τον ορισμό). Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $h'(x) = f'(x) + \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, διότι είναι $f'(x) > 0$ και $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Δ5. Έχουμε:

$$I = \int_0^1 \left(e^x - 1\right)\frac{f(x)}{e^x - x}dx = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} \cdot f(x)dx = \int_0^1 f'(x) \cdot f(x)dx = \left[f(x)f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot f'(x)dx.$$

Επομένως:

$$I = f^2(1) - f^2(0) - I \Leftrightarrow 2I = \ln^2\left(e - 1\right) \Leftrightarrow I = \frac{\ln^2\left(e-1\right)}{2}.$$