ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2015-2016

ΤΑΞΗ: Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α.

α. Σωστό.

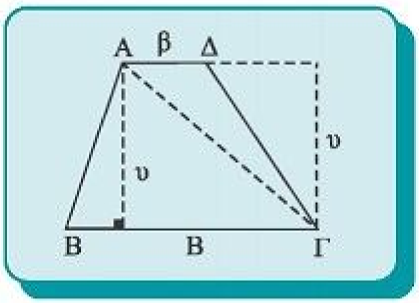
β. Λάθος (πρέπει R να είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου).

γ. Σωστό.

δ. Λάθος (το σωστό είναι $\omega_\nu = \dfrac{360}{\nu}$).

ε. Σωστό.

Β. Απόδειξη:



Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

Ε = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ)   (1).

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

(ΑΒΓ) = 12 Β • υ και (ΑΒΔ) = 12 β • υ   (2), Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{B}+\beta}{2}\cdot \upsilon$, δηλαδή το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 2^{o}

Α. Έχουμε:

$$\alpha^2 = 64$$
$$\beta^2 = 112$$
$$\gamma^2 = 16$$

Είναι $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$ και άρα $\hat{\mathrm{B}} > 90^0$. Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α = 8, $\beta = 4\sqrt{7}$ και γ = 4 είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$.

Β. Από το Νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ για τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ έχουμε διαδοχικά:

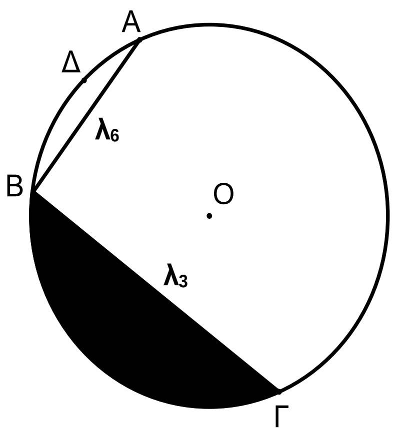
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{B}} = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{B}} = \frac{64+16-112}{2\cdot 8\cdot 4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2}$$

Επομένως $\hat{\mathrm{B}} = 120^0$.

Γ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα της οξείας γωνίας για την $\hat{\mathrm{A}} < 90^0$ (αφού το τρίγωνο ΑΒΓ έχει μόνο μία αμλεία γωνία τη $\hat{\mathrm{B}}$):

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot \mathrm{A}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{A}\Delta = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta} \Leftrightarrow \mathrm{A}\Delta = \frac{112+16-64}{8\sqrt{7}} \Leftrightarrow \mathrm{A}\Delta = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

ΘΕΜΑ 3^{o}



Α. Έχουμε $E = 4\pi = \pi R^2 \Leftrightarrow R = 2$.

Β. Είναι $\widehat{ΑΒ}=60^0$ (αφού η αντίστοιχη χορδή ΑΒ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου).

Επίσης $\widehat{ΒΓ}=120^0$ (αφού η αντίστοιχη χορδή ΑΒ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου).

Άρα:

$$\widehat{ΑΓ}=360^0-\left(\widehat{ΑΒ}-\widehat{ΒΓ}\right)\Leftrightarrow \widehat{ΑΓ}=360^0-180^0\Leftrightarrow \widehat{ΑΓ}=180^0$$

Επομένως $Α\hat{Ο}Γ=180^0$, οπότε η χορδή ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

Γ. α. Το μήκος l του τόξου $\overset{\frown}{ΑΔΒ}$ είναι: $l=l_{ΑΒ}+l_{ΒΓ}$ (1).

Η γωνία $Α\hat{Ο}Β=60^0$ και άρα έχουμε: $l_{ΑΒ}=\dfrac{\pi R\cdot 60}{180}=\dfrac{\pi R}{3}$ (2)

Η γωνία $Β\hat{Ο}Γ=120^0$ και άρα έχουμε: $l_{ΒΓ}=\dfrac{\pi R\cdot 120}{180}=\dfrac{2\pi R}{3}$ (3)

Η σχέση (1) από τις σχέσεις (2) και (3) γίνεται:

$$l=l_{ΑΒ}+l_{ΒΓ}=\frac{\pi R\cdot 60}{180}+\frac{\pi R\cdot 120}{180}=\frac{\pi R}{3}+\frac{2\pi R}{3}=\pi R=2\pi$$

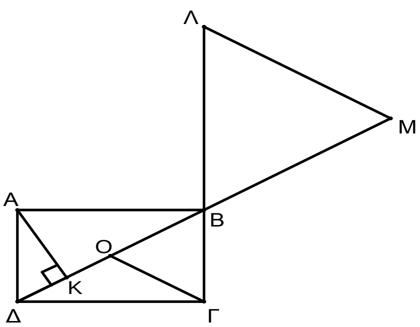
β. Το εμβαδόν ε του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος είναι:

$$\varepsilon=\left(Β\widehat{Ο}Γ\right)-\left(ΒΟΓ\right)=\frac{\pi R^2\cdot 60^0}{360^0}-\frac{1}{2}\cdot\lambda_3\cdot\alpha_3=\frac{\pi R^2}{6}-\frac{1}{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2}=\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=$$

$$=\frac{4\pi}{6}-\frac{4\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}\ \tau.\mu$$

, όπου $ΒΓ=\lambda_3=R\sqrt{3}$ η βάση και $a_3=\dfrac{R}{2}=\upsilon$ το ύψος , αντίστοιχα, του τριγώνου ΒΟΓ.

ΘΕΜΑ 4^{ο}



Α. Έχουμε:

$$\left(ΑΒΓΔ\right)=48\Leftrightarrow ΑΒ\cdot ΑΔ=48\Leftrightarrow 8\cdot ΑΔ=48\Leftrightarrow ΑΔ=6$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\mathrm{\Delta B}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{AB}^2 \Leftrightarrow \mathrm{\Delta B}^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow \mathrm{\Delta B}^2 = 100 \Leftrightarrow \mathrm{\Delta B} = 10$$

Β. Από γνωστό θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{\Delta B} \cdot \mathrm{BK} \Leftrightarrow 64 = 10 \cdot \mathrm{BK} \Leftrightarrow \mathrm{BK} = \frac{32}{5}$$

Γ. Τα τρίγωνα ΒΟΓ και ΒΛΜ έχουν $\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \Lambda\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Επομένως ο λόγος των εμαβαδών τους θα είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις ίσες γωνίες, δηλαδή:

$$\frac{(\mathrm{BO\Gamma})}{(\mathrm{B\Lambda M})} = \frac{\mathrm{BO} \cdot \mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{BM} \cdot \mathrm{B\Lambda}} \Leftrightarrow \frac{(\mathrm{BO\Gamma})}{(\mathrm{B\Lambda M})} = \frac{\frac{\mathrm{\Delta B}}{2} \cdot \mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Delta B} \cdot 2\mathrm{B\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{(\mathrm{BO\Gamma})}{(\mathrm{B\Lambda M})} = \frac{1}{4}$$

Δ. Θα υπολογίσουμε πρώτα το εμβαδόν του ΒΟΓ. Έχουμε:

$$(\mathrm{BO\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OB} \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{\Delta B}}{2} \cdot \upsilon = \frac{\mathrm{\Delta B} \cdot \upsilon}{4} \quad (1)$$

Όμως $\upsilon = \mathrm{AK}$ (2). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$\mathrm{AK}^2 = \mathrm{\Delta K} \cdot \mathrm{KB} = \frac{18}{5} \cdot \frac{32}{5} \Leftrightarrow \mathrm{AK}^2 = \frac{576}{25} \Leftrightarrow \mathrm{AK} = \frac{24}{5} \, (3)$$

, αφού $\mathrm{\Delta K} = \mathrm{\Delta B} - \mathrm{KB} = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$.

Άρα η σχέση (1) λόγω των σχέσεων (2) και (3) γίνεται:

$$(\mathrm{BO\Gamma}) = \frac{\mathrm{\Delta B} \cdot \upsilon}{4} \Leftrightarrow (\mathrm{BO\Gamma}) = \frac{10 \cdot \frac{24}{5}}{4} \Leftrightarrow (\mathrm{BO\Gamma}) = 12 \ \tau.\mu$$

Όμως , όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (Γ), είναι $\frac{(\mathrm{BO\Gamma})}{(\mathrm{B\Lambda M})} = \frac{1}{4}$ και άρα έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{BO\Gamma})}{(\mathrm{B\Lambda M})} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (\mathrm{B\Lambda M}) = 4(\mathrm{BO\Gamma}) \Leftrightarrow (\mathrm{B\Lambda M}) = 48 \ \tau.\mu$$

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος