ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΥ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΟΜΑΔΑ Α)

Πέμπτη, 19/05/2016

ΘΕΜΑ 1°

Α1. Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 87 (μόνο η περίπτωση ν=περιττός)

Α3.

α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Σωστό.

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ 2°

Β1.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	**Αριθμός υπαλλήλων** v_i	**Αθροιστική συχνότητα** N_i	**Σχετική συχνότητα** $f_i\%$	$x_i v_i$
0	**5**	**5**	**25**	**0**
1	**4**	**9**	**20**	**4**
2	**2**	**11**	**10**	**4**
3	**4**	**15**	**20**	**12**
4	**5**	**20**	**25**	**20**
ΣΥΝΟΛΑ	**20**		**100**	**40**

Έχουμε[1]:

$$\nu = 20\,,\; f_3 = \frac{10}{100} = 0{,}10 \text{ και επομένως (όπου ν το μέγεθος του δείγματος)}$$

$$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow \nu_3 = 20 f_3 \Leftrightarrow \nu_3 = 20 \cdot 0{,}10 \Leftrightarrow \nu_3 = 2$$

Β2. Έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{40}{20} = 2 \text{ (ή και } \overline{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 2\text{)}$$

Β3. Ο αριθμός των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες είναι η αθροιστική συχνότητα $N_4 = 15$ που αντιστοιχεί στην τιμή $x_4 = 3$ (ή αλλιώς $\sum_{i=1}^{3} \nu_i$ =5+4+2+4 ή ακόμα και $20 - \nu_5 = 15$).

Β4. Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες είναι $f_3 + f_4 + f_5 = (10 + 20 + 25)\% = 55\%$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{2}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2},\; x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Ζητούμε τις τιμές $f'(-1)$, $f'(1)$. Έχουμε:

$$f'(-1) = \frac{1-(-1)^2}{\left((-1)^2+1\right)^2} = 0$$

$$f'(1) = \frac{1-1^2}{\left(1^2+1\right)^2} = 0$$

Γ3. Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2},\; x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -1 \text{ ή } x = 1\right)$$

---

[1] Τα έγχρωμα στοιχεία είναι αυτά που συμπληρώθηκα. Το ερώτημα δεν ζητάει δικαολόγηση για κάθε αριθμό που συμπληρώνεται στο τετράγωνο.

(προφανώς $\left(x^2+1\right)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Ο πίνακας μεταβολών-μονοτονίας της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	-1	1 $\quad +\infty$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
		Τ.Ελ.	Τ.Μεγ.

Άρα η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f (η οποία είναι και συνεχής στα σημεία $x_1=-1, x_2=1$) είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,\ 1]$.
- Γνησίως φθίνουσα στα διαστήματ $(-\infty,\ -1]$ και στο $[1,\ +\infty)$.
- Τοπικό Ελάχιστο στο $x_1=-1$, το $f(-1)=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$.
- Τοπικό Μέγιστο στο $x_2=1$,το $f(1)=\dfrac{1}{(-1)^2+1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

Γ4. Οι τιμές 2015 και 2016 ανήκουν στο διάστημα $2015,\ 2016\in[1,\ +\infty)$ στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως:

$$2015<2016\Rightarrow f(2015)>f(2016)$$

Δηλαδή, η τιμή $f(2015)$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή $f(2016)$.

<u>Σημείωση:</u> Δεν απαιτείται υπολογισμός των $f(2015)$ και $f(2016)$ και μετά σύγκριση. Ωστόσο, δεν είναι λάθος ο συλλογισμός αυτός.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$a=\lim_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x-2)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x-2)=4-2=2$$

Επομένως $a=2$.

Δ2. Για $a=2$ η συνάρτηση $f(x)=x^2+ax-3,\ x\in\mathbb{R}$ γίνεται $f(x)=x^2+2x-3, x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$f'(x)=2x+2,\ x\in\mathbb{R}$$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(-2,\ f(-2)\right)$ είναι της μορφής $y=\lambda x+\kappa$ $(\lambda,\ \kappa\in\mathbb{R})$. Θα προσδιορίσουμε τα $\lambda,\ \kappa\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$f(-2)=\left(-2\right)^2+2\cdot\left(-2\right)-3=4-4-3=-3$, επομένως το σημείο είναι $M\left(-2,\ -3\right)$.

$$\lambda=f'\left(-2\right)=2\cdot\left(-2\right)+2=-4+2=-2$$

Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M\left(-2,\ -3\right)$ οι συντεταγμένες του Μ θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα:

$$-3=\lambda\cdot\left(-2\right)+\kappa\Leftrightarrow-3=\left(-2\right)\cdot\left(-2\right)+\kappa\Leftrightarrow-3=4+\kappa\Leftrightarrow\kappa=-7$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι $y=-2x-7$

Δ4. Αφού τα σημεία $A_i\left(x_i,\ y_i\right), i=1,2,3,4,5$ ανήκουν στην ευθεία $y=-2x-7$ θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Επομένως:

$$\begin{aligned}y_1&=-2x_1-7\\y_2&=-2x_2-7\\y_3&=-2x_3-7\\y_4&=-2x_4-7\\y_5&=-2x_5-7\end{aligned}$$

Επίσης για την μέση τιμή $\overline{x}$ των τετμημένων τους είναι:

$$\overline{x}=2\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}=2\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10\ (1)$$

Τώρα για την ζητούμενη μέση τιμή των τεταγμένων τους $\overline{y}$ έχουμε:

$$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5}=\frac{\left(-2x_1-7\right)+\left(-2x_2-7\right)+\left(-2x_3-7\right)+\left(-2x_4-7\right)+\left(-2x_5-7\right)}{5}=$$

$$=\frac{-2\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\right)-5\cdot7}{5}=\frac{-2\cdot10-35}{5}=\frac{-55}{5}=-11$$

Άρα $\overline{y}=-11$

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών