ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Τετάρτη, 18/05/2016

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

Απάντηση

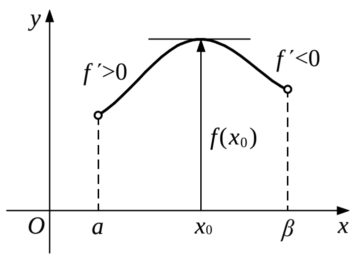
Θεωρία, στη σελίδα 262 του σχολικού βιβλίου.

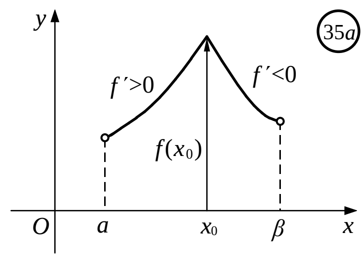
Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta)\ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Θεωρία, στη σελίδα 141 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Θεωρία, στη σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

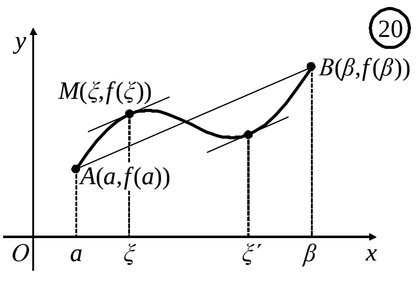
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

Απαντήσεις

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_a^\beta f(t)dt = G(a)-G(\beta)$

Λάθος (διότι είναι $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$)

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Σωστό (πρόταση στη σελίδα 166 του σχολικού βιβλίου).

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Λάθος. (Η αντίστοιχη πρόταση δεν ισχύει γενικά σε ένωση διαστημάτων)

δ) Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της , η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Σωστό (γνωστή πρόταση –σχόλιο στο σχολικό βιβλίο).

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

Σωστό (θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, σελίδα 195 σχολικό βιβλίο).

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in R$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

ΛΥΣΗ

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=0$$

$$\left(x^2+1\right)^2>0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f θα είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0, το $f(0)=0$.

Ο πίνακας μεταβολών (μονοτονίας-ακροτάτων) της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Ολ. ελάχιστο

B2. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=0\Leftrightarrow 1-3x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(x^2+1\right)^3>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$.
- Κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

Ο πίνακας μεταβολών (Κυρτότητας και Σημείων Καμπής) της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	∩	∪	∩

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε **δεν** έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$).

Πλάγιες-οριζόντιες: $y=\lambda x+\beta$ $(\lambda,\beta\in\mathbb{R})$ με:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ την $y=1$.

Ακόμα:

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο** $-\infty$ την $y=1$.

Παρατηρήσεις:

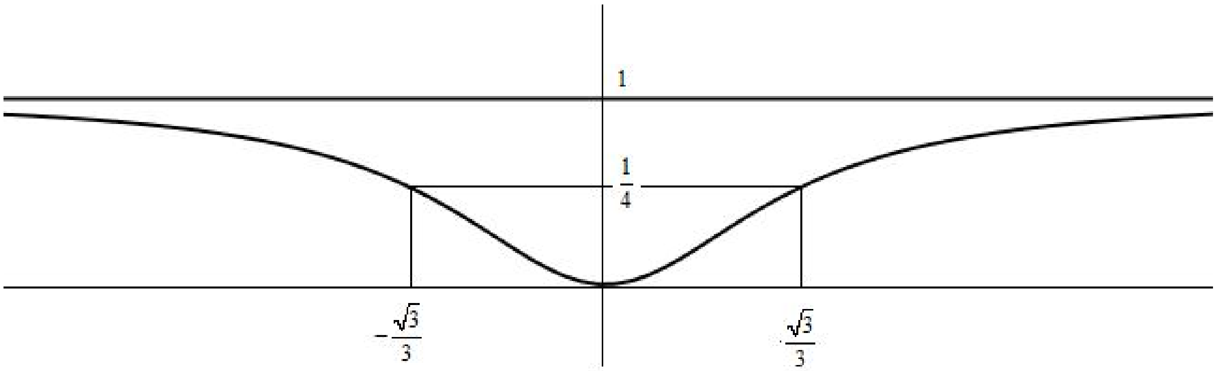
1.Μπορούμε να παρατηρήσουμε (και να αποδείξουμε) ότι η συνάρτηση f είναι άρτια ($f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$) και άρα θα έχει την ίδια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$**,** αποφεύγοντας έτσι να ξαναβρούμε τα παραπάνω όρια στο $-\infty$.

2. Μπορούμε, επίσης, να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ **και να δικαιολογήσουμε** ότι μια συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ αντίστοιχα (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

B4. Συνοπτικά ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	+	-
f'	-	-	+	+
$f(x)$	$\downarrow \cap$	$\downarrow \cup$	$\uparrow \cup$	$\uparrow \cap$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (αφού λάβουμε και υπόψη μας ότι είναι άρτια και θετική) είναι η επόμενη:



Σημείωση: Για την σωστή παρουσίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε, ότι αυτή είναι άρτια και θετική ($f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x = 0$, δηλαδή να διέρχεται από το O(0,0)).

ΘΕΜΑ 3°

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in R$.

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : R \to R$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$ για κάθε $x \in R$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Γ3. Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in R$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3 , να λυθεί η εξίσωση:

$$f\left(|\eta\mu x| + 3\right) - f\left(|\eta\mu x|\right) = f\left(x + 3\right) - f\left(x\right) \quad \text{όταν } x \in [0, +\infty) .$$

ΛΥΣΗ

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει προφανή ρίζα το $x_0=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$$

$$x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2}>e^0\Leftrightarrow e^{x^2}>1\Leftrightarrow e^{x^2}-1>0, x\in\mathbb{R}$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ και άρα:

$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο $x=0$, αφού στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1»).

<u>2^ος^ Τρόπος</u>

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 2/ii στη σελίδα 266) γνωρίζουμε ότι:

$$\ln x\leq x-1,\ \text{για κάθε } x>0 \ (\text{η ισότητα ισχύει για } x=1)$$

Θέτοντας όπου x το $e^{x^2}>0$ (για κάθε $x\in\mathbb{R}$) έχουμε:

$$\ln e^{x^2}\leq e^{x^2}-1\Leftrightarrow x^2\leq e^{x^2}-1\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$(\text{η ισότητα ισχύει για } e^{x^2}=1\Leftrightarrow e^{x^2}=e^0\Leftrightarrow x=0).$$

3ος Τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$, να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της και να πάρουμε $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έπειτα να πάρουμε $g(x^2) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| \Leftrightarrow |f(x)| = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$$

(Επειδή, από το προηγούμενο ερώτημα: $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και δεν έχει ρίζες σε αυτά, διότι αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα $\rho \in (-\infty, 0)$ ή $\rho \in (0, +\infty)$, τότε θα είναι από το θεώρημα του Fermat (που πληρούνται οι προϋποθέσεις του) ότι $f(\rho) = 0$. Οπότε έχουμε:

$$|f(\rho)| = 0 \Leftrightarrow e^{\rho^2} - \rho^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$$

άτοπο.

Άρα η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}
&x > 0,\ f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1\\
&x > 0,\ f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)\\
&x < 0,\ f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)\\
&x < 0,\ f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1
\end{aligned}$$

Επειδή οι ζητούμενες συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (και συνεχείς στο $x_0 = 0$ με $f(0) = 0$) θα έχουμε:

- $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ ή
- $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$ ή
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x < 0 \end{cases}$ ή
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x \geq 0 \end{cases}$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι οι **μοναδικές** οι οποίες **επαληθεύουν** την δοσμένη σχέση και είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x) = 4x^2 e^{x^2} + 2\left(e^{x^2} - 1\right) > 0 \text{, για κάθε } x \in (-\infty, 0) \text{ και για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

(αφού $x^2 e^{x^2} \geq 0$ και $e^{x^2} - 1 > 0$)

Επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων) η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$ (την επαληθεύει).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x),\ x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

αφού $x + 3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x)$ (η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, διότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$).

Για $x > 0$ έχουμε διαδοχικά:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) < g(x) \Leftrightarrow f\left(|\eta\mu x| + 3\right) - f\left(|\eta\mu x|\right) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως **μοναδική λύση** της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x = 0$

<u>2^ος Τρόπος</u>

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$ (την επαληθεύει).

Εξετάζουμε τις επόμενες περιπτώσεις ($x > 0$):

1η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x| + 3 > x$, τότε προκύπτει η διάταξη: $|\eta\mu x| < x < |\eta\mu x| + 3 < x + 3$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_1 \in \left(|\eta\mu x|, x\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_1\right) = \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(I)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_2 \in \left(|\eta\mu x|+3, x+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_2\right) = \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x|+3)}{(x+3) - \left(|\eta\mu x|+3\right)} = \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x|+3)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(II)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (I) και (II) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'\left(\xi_1\right) < f'\left(\xi_2\right) \Rightarrow \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} < \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x|+3)}{x - |\eta\mu x|}$$

Επειδή $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow x - |\eta\mu x| > 0$ έχουμε:

$$f(x) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(|\eta\mu x|+3) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x = 0$.

2η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x| + 3 < x$, τότε προκύπτει η διάταξη $|\eta\mu x| < |\eta\mu x| + 3 < x < x+3$.

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_3 \in \left(|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_3\right) = \frac{f(|\eta\mu x|+3) - f(|\eta\mu x|)}{\left(|\eta\mu x|+3\right) - |\eta\mu x|} = \frac{f(|\eta\mu x|+3) - f(|\eta\mu x|)}{3} \quad \text{(III)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x,\ \mathrm{x}+3\right]$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x,\ x+3]$ (επομένως και συνεχής στο $[x,\ x+3]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi_4 \in (x,\ x+3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_4) = \frac{f(x+3)-f(x)}{(x+3)-x} = \frac{f(x+3)-f(x)}{3} \quad \text{(IV)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (III) και (IV) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_3 < \xi_4 \Rightarrow f'(\xi_3) < f'(\xi_4) \Rightarrow \frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3} < \frac{f(x+3)-f(x)}{3} \Rightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|) < f(x+3)-f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

Σημείωση: Ακόμα και αν $|\eta\mu x|+3 = x$, τα παραπάνω θεωρήματα και τα συμπεράσματα εφαρμόζονται χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Εναλλακτικά:

Υποθέτουμε, αντίθετα, ότι υπάρχει $x_0 > 0$ που να είναι λύση της εξίσωσης. Ισχύει $|\eta\mu x_0| < x_0$ (από τη γνωστή ανισότητα $|\eta\mu x| \le |x|$ με την ισότητα μόνο για $x=0$) καθώς επίσης $|\eta\mu x_0| < |\eta\mu x_0| + 3$ και $x_0 < x_0 + 3$.

Αν διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|\eta\mu x_0| + 3 < x_0$, τότε $|\eta\mu x_0| < |\eta\mu x_0| + 3 < x_0 < x_0 + 3$
- Αν $x_0 \le |\eta\mu x_0| + 3$, τότε $|\eta\mu x_0| < x_0 \le |\eta\mu x_0| + 3 < x_0 + 3$.

και εφαρμόσουμε ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[|\eta\mu x_0|, |\eta\mu x_0| + 3]$, $[x_0, x_0 + 3]$ καταλήγουμε σε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και «$1-1$» κι έτσι παίρνουμε $\xi_1 = \xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα. Επομένως σε κάθε περίπτωση η δοθείσα εξίσωση έχει **μοναδική** λύση την $x = 0$.

3ος Τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(t) = f(t+3) - f(t),\ t \ge 0$

Επομένως αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$h(|\eta\mu x|) = h(x),\ x \ge 0$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$) με:

$$h'(t) = f'(t+3) - f'(t),\ t \ge 0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα (αφού η f είναι κυρτή) έχουμε διαδοχικά:

$$t+3>t \Rightarrow f'(t+3)>f'(t) \Rightarrow f'(t+3)-f'(t)>0 \Rightarrow h'(t)>0,\ t\geq 0$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και άρα είναι «1-1» στο $[0,+\infty)$. Άρα η δοθείσα εξίσωση για $x\geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$h(|\eta\mu x|)=h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x|=x \Leftrightarrow |\eta\mu x|=|x| \Leftrightarrow x=0,$$

Αφού στην ανισοισότητα $|\eta\mu x|\leq|x|$ το = ισχύει **μόνο** για $x=0$ (πρόταση σελίδας 171, σχολικό βιβλίο).

ΘΕΜΑ 4^ο^

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο , για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\cdot\eta\mu x\,dx=\pi$
- $f(R)=R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε $x\in R$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ και $f'(0)=1$

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο R

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$

Δ4. Να δείξετε ότι: $0<\int_1^{e^\pi}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\cdot\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$
$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx=\pi$$
$$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \quad (1)$$

Τώρα θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot \eta\mu x\right)=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot \lim_{x\to 0}\eta\mu x=1\cdot 0=0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0) θα είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f(\pi)=\pi$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot \eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Δ2. α) Έστω οτι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα έχουμε ότι $f'(x_0)=0$.

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (αφού τα μέλη της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) έχουμε:

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+e^{x},\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=x_0$ από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε:

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Leftrightarrow e^{x_0}=e^{0}\Leftrightarrow x_0=0,$$

Δηλαδή $f'(x_0)=f'(0)=0$, άτοπο αφού $f'(0)=1$.

Επομένως η συνάρτηση f **δεν** παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

β) Από το ερώτημα Δ2 (α) έχουμε ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (δηλαδή η συνάρτηση f' δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι επίσης συνεχής (αφού f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$). Επομένως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $f'(0)=1>0$ (Δ1 ερώτημα) θα είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής f και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ θα είναι[1] $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Έχουμε: $\begin{matrix} -1\le \eta\mu x\le 1 \\ -1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1 \end{matrix}$.

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με $f(x)>0$ (αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα $f(x)>0$ «κοντά» στο $+\infty$) έχουμε:

$$-2\le \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)}\le \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le \frac{2}{f(x)}$$

Τώρα έχουμε:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}=0$ και, από το κριτήριο της παρεμβολής, παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$$

Δ4. Για ευκολία θέτουμε $\mathrm{I}=\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx$. Θα δείξουμε ότι $0<\mathrm{I}<\pi^2$

Θέτουμε (αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα):

$$\begin{aligned} &u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\Rightarrow du=\frac{1}{e^u}dx\Rightarrow e^u du=dx \\ &u=\ln x\Rightarrow x=e^u \\ &x=1\Leftrightarrow u=0 \\ &x=e^\pi\Leftrightarrow u=\pi \end{aligned}$$

Οπότε :

$$\mathrm{I}=\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^\pi\frac{f(u)}{e^u}e^u du=\int_0^\pi f(u)du$$

Έχουμε, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$:

$$0\le x\le\pi \Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(x)\le\pi$$

Η ισότητες στην προηγούμενη σχέση δεν ισχύουν παντού και άρα έχουμε:

$$\int_0^\pi 0dx<\int_0^\pi f(x)dx<\int_0^\pi \pi dx\Rightarrow 0<\int_0^\pi f(x)dx<\pi^2\Leftrightarrow 0<I<\pi^2$$

---

[1] Στην πραγματικότητα ο ισχυρισμός αυτός είναι το αντίστροφο γνωστής πρότασης του σχολικού βιβλίου. Για την πλήρη δικαιολόγηση μπορούμε να πούμε: Αν ήταν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ θα είχαμε: $f(\mathbb{R})=f((-\infty,+\infty))=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ l\right)$ άτοπο αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Επίσης αν ήταν $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ θα είχαμε $f(x)<0$ για κάποια $x>0$ που είναι άτοπο (αφού η $f\uparrow$ και άρα $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$).

2ος Τρόπος

Επειδή η συνάρτηση $\ln x$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσες (από το ερώτημα Δ2(β)) έχουμε διαδοχικά:

$$1 \le x \le e^{\pi} \Rightarrow \ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi} \Rightarrow 0 \le \ln x \le 2 \Rightarrow f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$$

Διαιρώντας με $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ (δηλαδή $x > 0$) έχουμε:

$$\frac{f(0)}{x} \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{f(\pi)}{x} \Leftrightarrow 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Δηλαδή έχουμε τις ανισώσεις:

- $\dfrac{f(\ln x)}{x} \ge 0$, $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\dfrac{f(\ln x)}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = e^{\pi}$ δίνει $\dfrac{f(\ln e^{\pi})}{\pi} = \dfrac{\pi}{\pi} = 1 \neq 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx > 0$$

- $\dfrac{f(\ln x)}{x} \le \dfrac{\pi}{x} \Leftrightarrow \dfrac{f(\ln x)}{x} - \dfrac{\pi}{x} \le 0$, $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\dfrac{f(\ln x)}{x} - \dfrac{\pi}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = 1$ δίνει $\dfrac{f(\ln 1)}{1} - \dfrac{\pi}{1} = f(0) - \pi = -\pi \neq 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx - \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x}dx < 0 \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x}dx \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left[\ln x\right]_1^{e^{\pi}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left(\ln e^{\pi} - \ln 1\right) \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi(\pi - 0) \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$$

Άρα:

$$0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$$

3ος Τρόπος

Έστω F μία αρχική της f στο $[0,+\infty)$ (αυτό εξασφαλίζεται αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$). Άρα ισχύει ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$, $x \ge 0$. Έτσι ισχύει ότι:

$$\frac{f(\ln x)}{x} = \left[F(\ln x)\right]', x \ge 0$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{I} = \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_1^{e^{\pi}} \left[F(\ln x)\right]'dx = \left[F(\ln x)\right]_1^{e^{\pi}} = F\left(\ln e^{\pi}\right) - F(\ln 1) = F(\pi) - F(0) \quad (*)$$

Εφαρμοζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την F στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$, αφού F παραγωγίσιμη στο $\left[0,\pi\right]$ (άρα και συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$), οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in \left(0,\ \pi\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'\left(\xi\right)=\frac{F(\pi)-F(0)}{\pi}\Rightarrow f(\xi)=\frac{F(\pi)-F(0)}{\pi}\Rightarrow F(\pi)-F(0)=\pi f(\xi)\ (**)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (*) και (**) έχουμε:

$$0<\xi<\pi\Rightarrow f(0)<f(\xi)<f(\pi)\Rightarrow 0<f(\xi)<\pi\Rightarrow 0<\pi f(\xi)<\pi^2\Rightarrow 0<F(\pi)-F(0)<\pi^2\Rightarrow 0<\mathrm{I}<\pi^2$$

<u>4^{ος} Τρόπος</u>

Για το $I=\int_1^{e^\pi}\frac{f\left(\ln x\right)}{x}dx$, θέτουμε (αλλαγή μεταβλητής):

$$u=\ln x$$
$$du=\frac{1}{x}dx$$
$$x=1\Leftrightarrow u=\ln 1\Leftrightarrow u=0$$
$$x=e^\pi\Leftrightarrow u=\ln e^\pi\Leftrightarrow u=\pi$$

και έχουμε ότι $I=\int_0^\pi f(u)du$

Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$0\le u\le\pi\Rightarrow f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(u)\le\pi$$

Επομένως έχουμε:

$f(u)\ge 0$ και η f δεν είναι παντού 0, άρα $\int_0^\pi f(u)du>0\Leftrightarrow I>0$ (1).

Ακόμα $f(u)\le\pi\Leftrightarrow f(u)-\pi\le 0$ και η συνάρτηση $f(u)-\pi$ δεν είναι παντού 0, άρα:

$\int_0^\pi\left(f(u)-\pi\right)du<0\Leftrightarrow\int_0^\pi f(u)du-\int_0^\pi\pi du<0\Leftrightarrow I<\pi\left[x\right]_0^\pi\Leftrightarrow\mathrm{I}<\pi^2$ (2)

Επομένως $0<\mathrm{I}<\pi^2$.

<u>5^{ος} Τρόπος</u>

Εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση στο $I=\int_1^{e^\pi}\frac{f\left(\ln x\right)}{x}dx$ και έχουμε:

$$I=\int_1^{e^\pi}\frac{f\left(\ln x\right)}{x}dx=\int_1^{e^\pi}f\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\int_1^{e^\pi}f\left(\ln x\right)\left(\ln x\right)'dx=$$

$$=\left[f\left(\ln x\right)\left(\ln x\right)\right]_1^{e^\pi}-\int_1^{e^\pi}\left(\ln x\right)\cdot\left[f\left(\ln x\right)\right]'dx=$$

$$f\left(\ln e^\pi\right)\left(\ln e^\pi\right)-0-\int_1^{e^\pi}\left(\ln x\right)\cdot f'\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=f(\pi)\cdot\pi-\int_1^{e^\pi}K(x)dx=\pi^2-\int_1^{e^\pi}K(x)dx\ (\mathrm{I})$$

, όπου $K(x) = (\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \geq 0,\ x \in [1,\ e^{\pi}]$ διότι:

$x \geq 11 \Rightarrow \ln x \geq \ln 1 \Rightarrow \ln x \geq 0$

$x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 0$

$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και $f'(\ln x) > 0$.

Αφού η συνάρτηση $K(x)$ δεν είναι παντού 0, έχουμε (χρησιμοποιούμε και τη σχέση (1)):

$$\int_1^{e^{\pi}} K(x)dx > 0 \Leftrightarrow -\int_1^{e^{\pi}} K(x)dx < 0 \Leftrightarrow \pi^2 - \int_1^{e^{\pi}} K(x)dx < \pi^2 \Leftrightarrow I < \pi^2$$

Επομένως $0 < I < \pi^2$.

Σχόλιο: Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ από τα δεδομένα). Επίσης η συνάρτηση $\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ οπότε και η συνάρτηση $f'(\ln x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,\ e^{\pi}]$ που μας ενδιαφέρει.

Επομένως, η συνάρτηση $K(x) = (\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \geq 0,\ x \in [1,\ e^{\pi}]$ είναι συνεχής και άρα το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^{\pi}} K(x)dx$ έχει νόημα.

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών