

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 5

05/05/2016

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

A1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) της γραφικής παράστασης C_f μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0), \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A **και**
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

A3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ότι ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}, \quad \text{δηλαδή } (x^v)' = vx^{v-1}.$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbb{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}.$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}.$$

Δηλαδή: $(x^v)' = vx^{v-1}$

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Σωστό (πρόταση του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 178)

β. Αν $f(x) = \int_2^4 \sqrt{2+t^2} dt$, τότε $f'(3) = 0$.

Σωστό (η παράγωγος της f είναι παντού 0 αφού η f είναι σταθερή συνάρτηση, ως ορισμένο ολοκλήρωμα).

γ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Λάθος (όχι σε ένα τουλάχιστον σημείο αλλά σε ένα **το πολύ** σημείο).

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λάθος (δεν ισχύει **υποχρεωτικά**, αφού π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} ενώ $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, δηλαδή μπορεί και να μηδενίζεται σε κάποια σημεία).

ε. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Σωστό¹ (Αν έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = a$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Τότε όμως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ οπότε ασύμπτωτη είναι πάλι η } y = a).$$

¹ Εδώ προφανώς εννοεί «πλάγια ασύμπτωτη» ευθεία της μορφής $y = ax + \beta$ με $a \neq 0$, όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο στη σείδα 280.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) = 5.$$

B1. Να βρείτε το $f(5)$.

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B3. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

B4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1\right) = 2.$$

ΛΥΣΗ

B1. Η σχέση $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbf{R}$, οπότε για $x = 2$ έχουμε:

$$f(f(2)) + 2f(2) = 2 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow f(5) + 10 = 5 \Leftrightarrow f(5) = -5$$

B2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \text{ (επειδή η } f \text{ είναι συνάρτηση) και}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$$

άρα:

$$f(f(x_1)) + 2f(x_1) = f(f(x_2)) + 2f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

οπότε η f είναι 1-1, και άρα αντιστρέφεται.

B3. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(2))) + 2f(f^{-1}(2)) = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow f(2) + 4 = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow$$

$$5 + 4 - 1 = 2f^{-1}(2) \Rightarrow f^{-1}(2) = 4.$$

B4. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) &= 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow \\ f^{-1}(2x^2 + 7x) &= 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x = f(5) \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \\ x_1 &= -1 \quad \text{ή} \quad x_2 = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με g παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+a) - x + 1 \text{ με } a, x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - 1 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 1$$

Γ1. Να δείξετε ότι $a=1$.

Γ2. Αν $g(e) = -1$, να δείξετε ότι $g(x) = -\ln^2 x$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Γ3. Αν $g(x) = -(\ln x)^2$ σε όλο το διάστημα $(0, +\infty)$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0 \in (0, 1)$ για την οποία η διαφορά $f(x) - g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων M, N με $M(\xi, f(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και $N(\xi, g(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi \in (0, +\infty)$, στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία M και N αντίστοιχα.

Γ4. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g αντίστοιχα και των ευθειών $x=1$, $x=e$.

ΛΥΣΗ

Γ1. Έχουμε:

$$f(x)-1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο $x_1 = 0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του \mathbb{R} .

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2x + a - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Γ2. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x} &\Rightarrow g'(x) \ln x - \frac{2g(x)}{x} = 0 \Rightarrow g'(x) \ln^2 x - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} g(x) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow g'(x) \ln^2 x - (\ln^2 x)' g(x) = 0 \Rightarrow \frac{g'(x) \ln^2 x - (\ln^2 x)' g(x)}{\ln^4 x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{\ln^2 x} \right)' = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\frac{g(x)}{\ln^2 x} = c$, $x \in (1, +\infty)$.

Για $x = e$ είναι:

$$x = e \Rightarrow \frac{g(e)}{\ln^2 e} = c \Rightarrow c = -1$$

Επομένως:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -\ln^2 x, x \in (1, +\infty)$$

Γ3. i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 + \ln^2 x, x \in (0, +\infty), \text{ η οποία είναι συνεχής στο } (0, +\infty).$$

Θα βρούμε το ελάχιστο της $K(x)$.

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$) με:

$$K'(x) = 2x + 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = 2 \frac{x^2 + \ln x}{x}, x > 0$$

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση $\Phi(x) = x^2 + \ln x$, $x > 0$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

(Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $K(x)$ είναι όμοια με τις ρίζες και το πρόσημο αντίστοιχα της συνάρτησης $\Phi(x)$). Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ως

άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$ με $\Phi'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και στο διάστημα $(0,1)$, οπότε:

$$\Phi((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} \Phi(x) \right) = (-\infty, 1), \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \ln x) = 1$$

Επειδή $0 \in (-\infty, 1) = \Phi((0,1))$ υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow K'(x_0) = 0$.

Έχουμε:

$$x > x_0 \Rightarrow \Phi(x) > \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) > 0 \Leftrightarrow K'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) < 0 \Leftrightarrow K'(x) < 0$$

Άρα η συνάρτηση $K(x)$ είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, x_0]$ (στο x_0 είναι συνεχής) και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης K φαίνονται στον επόμενο πίνακα μεταβολών.

x	0	x_0	$+\infty$
$K'(x)$		-	+
$K(x)$		↓	↑

Ολ. Ελ

Επομένως, η συνάρτηση $K(x) = f(x) - g(x)$ παρουσιάζει ένα **μόνο** ελάχιστο (ολικό) στο $x_0 \in (0,1)$.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = g'(\xi)$.

Η συνάρτηση $K(x) = f(x) - g(x)$ έχει ακρότατο στο $x_0 \in (0,1)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$) με:

$$K'(x) = f'(x) - g'(x), x \in (0,1).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$$

Το $x_0 = \xi$ είναι μοναδικό, ως μοναδική ρίζα της συνάρτησης Φ του ερωτήματος (Γ3i) (αφού η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$), άρα και μοναδική ρίζα της συνάρτησης K' .

Γ4. i) Έχουμε διαδοχικά:

$$I = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) - \frac{\ln^2 x}{x^2 + 1}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{\frac{(x-1)^x}{x-1}}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2 + 1)}} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1)^{x-1}}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2 + 1)}} \right]$$

Θα βρούμε ξεχωριστά τα παραπάνω όρια.

Με χρήση του κανόνα του de l'Hospital για τα παραπάνω όρια έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{(x-1)\ln(x-1)} = \lim_{u \rightarrow u_0} e^u, \text{ όπου } u = (x-1)\ln(x-1)$$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = -\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1} = \lim_{u \rightarrow u_0} e^u = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 \text{ (όπου } u = x-1, \text{ όταν } x \rightarrow 1 \Leftrightarrow u \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln^2 x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \frac{1}{x} \ln x}{3x^2 - 2x + 1} = 0$$

Επομένως:

$$I = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2 + 1)}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

ii) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x) - g(x)| dx = \int_1^e |K(x)| dx = \int_1^e K(x) dx = \int_1^e (x^2 + 1 + \ln^2 x) dx =$$

$$= \int_1^e x^2 dx + \int_1^e 1 dx + \int_1^e \ln^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e + [x]_1^e + J = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + e - 1 + J = \frac{e^3 + 3e - 4}{3} + J \text{ (V)}$$

, όπου $J = \int_1^e \ln^2 x dx$. Τώρα για το J έχουμε:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx = \\
 &= e - 2 \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx = e - 2 [x \ln x]_1^e + 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 2e + 2 \int_1^e 1 dx = -e + 2 [x]_1^e = -e + 2e - 2 = e - 2
 \end{aligned}$$

Επομένως, από τη σχέση (V), έχουμε τελικά:

$$E(\Omega) = \frac{e^3 + 3e - 4}{3} + J = \frac{e^3 + 3e - 4}{3} + e - 2 = \frac{e^3 + 3e - 4 + 3e - 6}{3} = \frac{e^3 + 6e - 10}{3}$$

, δηλαδή $E(\Omega) = \frac{e^3 + 6e - 10}{3}$ τ.μ

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} , με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 f(x) + f(1-x) &= 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και} \\
 f'(x) &\neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2f(1)$

Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0 .

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = 0$

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x) dx = 1$ καθώς και ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

Δ5. i) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x) dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}$$

ii) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^\lambda}$$

ΛΥΣΗ

Δ1. Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} , δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , αντίστοιχα.

Από την σχέση $f(x) + f(1-x) = 0$, για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Αρα ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x = \frac{1}{2}$, η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».

Δ2. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ και
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Αρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_0) = f(1) - f(0) \Leftrightarrow f'(x_0) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f'(x_0) = 2f(1)$$

(γιατί για $x = 1$ από την σχέση $f(x) + f(1-x) = 0$ έχουμε $f(1) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = -f(1)$).

2^{ος} τρόπος: Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση $K(x) = f(x) - 2f(1)x$, $x \in [0,1]$, αφού στο διάστημα $[0,1]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

Δ3. Για το σημείο $A(x_1, g(x_1))$ στο οποίο η g τέμνει τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$g(x_1) = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \text{ αφού η } f \text{ είναι συνάρτηση «1-1»}$$

$$\text{Αρα } A\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g , στο σημείο $A\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° πρέπει να αποδείξουμε

ότι η g είναι παραγωγίσιμη² στο $x_0 = \frac{1}{2}$ με $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)} - 0}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{f'(x)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{f'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Αφού:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} \left(f' \text{ συνεχής στο } \frac{1}{2} \right) \text{ και } f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}, \text{ δηλαδή } g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Επομένως, $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$

Δ4 i) Έχουμε ότι:

$$f(x) + f(1-x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(1-x)dx = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = 0 \quad (I), \text{ όπου } I_1 = \int_0^1 f(x)dx \text{ και}$$

$$I_2 = \int_0^1 f(1-x)dx. \text{ Για το ολοκλήρωμα } I_2 \text{ έχουμε:}$$

$$1-x = u \Leftrightarrow x = 1-u$$

Θέτουμε: $dx = -du$, οπότε έχουμε:
 $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$
 $x = 0 \Leftrightarrow u = 1$

$$I_2 = \int_0^1 f(1-x)dx = -\int_1^0 f(u)du = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx = I_1$$

Επομένως, από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1 + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow I_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0$$

ii) Είναι $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1$ (I)

από την σχέση $f(x) + f(1-x) = 0$, για $x = 1$ έχουμε $f(0) + f(1) = 0$ (II)

² Η παραγωγή της συνάρτησης g γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

Από τις σχέσεις (I) και (II), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε $f(0) = -\frac{1}{2}$ και $f(1) = \frac{1}{2}$.

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι $E(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f^{-1}(x)| dx$.

Θέτουμε:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$

$$dx = f'(u) du$$

$$x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0 \quad (\text{αφού η } f \text{ είναι «1-1»})$$

$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$E(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f^{-1}(x)| dx = \int_0^1 |u| \cdot f'(u) du = \int_0^1 u f'(u) du = [u f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du = f(1) - 0 = \frac{1}{2},$$

δηλαδή $E(\Omega) = \frac{1}{2}$ τ.μ.

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$

$$dx = f'(u) du$$

Δ5. i) Θέτουμε ξανά: $x = 0 \Leftrightarrow u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$ (αφού $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$)

$$x = f(\lambda) \Leftrightarrow u = f^{-1}(f(\lambda)) \Leftrightarrow u = \lambda$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} u f'(u) du = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + [u f(u)]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} - \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(u) du = \\ &= \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda) \end{aligned}$$

ii) Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l' Hospital έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda f(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \cdot \ln \lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln \lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda}} = 0$$

Επεξεργασία λύσεων: www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος