ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2015-2016

ΤΑΞΗ: Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α.

α. Σωστό .

β. Λάθος .

γ. Σωστό .

δ. Λάθος .

ε. Σωστό.

Β. Απόδειξη:

Έστω ότι το x - ρ είναι παράγοντας του P(x). Τότε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για x = ρ παίρνουμε:

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0$$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta x)$ με $\alpha, \beta > 0$ έχει ελάχιστο το $-\alpha$ και περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$.

Επομένως $-\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και $\dfrac{2\pi}{\beta} = \pi \Leftrightarrow \beta\pi = 2\pi \Leftrightarrow \beta = 2$

Β. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\eta\mu(\beta x)-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 4\eta\mu(2x)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(2x)=\eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \text{ ή } 2x=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\kappa\pi+\frac{\pi}{8} \text{ ή } x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{8} \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z}\right)$$

ΘΕΜΑ 3^o

A. Αφού το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha^2-1)x^4+(\alpha+1)x^3+x^2+(4\beta-1)x+6,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ είναι $3^{ου}$ βαθμού έχουμε:

$$\alpha^2-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=-1 \text{ και } \alpha+1\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq -1$$

Επομένως $\alpha=1$.

Ακόμα, επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x – 1 είναι -4, έχουμε:

$$P(1)=-4 \Leftrightarrow (\alpha^2-1)+(\alpha+1)+1+(4\beta-1)+6=-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha+4\beta+6=-4 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha+4\beta+10=0$$

Για $\alpha=1$ έχουμε:

$$2+4\beta+10=0 \Leftrightarrow 4\beta=-12 \Leftrightarrow \beta=-3$$

B. Για $\alpha=1$ και $\beta=-3$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x)=2x^3+x^2-13x+6$ και η προς λύση ανίσωση είναι:

$$2x^3+x^2-13x+6<0$$

Επειδή $P(2)=0$, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ και η διάρεση του $P(x)$ με το $x-2$ (ας πούμε με βάση το σχήμα Horner) δίνει:

$$P(x)=(x-2)(2x^2+5x-3)<0$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο των παραγόντων και του πολυωνύμου $P(x)$

x	$-\infty$ -3	-3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2	2 ∞
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x^2+5x-3$	$+$	$-$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης $P(x)<0$ είναι όλα τα $x\in(-\infty,\ -3)\cup\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για τη συνάρτηση $f(x)=\log(5\cdot 4^x-2\cdot 25^x)$ πρέπει να ισχύει:

$5\cdot 4^x-2\cdot 25^x>0\Leftrightarrow 5\cdot 2^{2x}>2\cdot 5^{2x}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}>\frac{2}{5}\Leftrightarrow 2x<1\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$ (αφού η συνάρτηση $h(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$).

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$.

Για τη συνάρτηση $g(x)=-2\cdot 5^{2x}+25\cdot 2^{x-1}-5$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Β. Για κάθε $x<1$ έχουμε διαδοχικά:

$$10^{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow 10^{\log(5\cdot 4^x-2\cdot 25^x)}=g(x)\Leftrightarrow 5\cdot 4^x-2\cdot 25^x=-2\cdot 5^{2x}+25\cdot 2^{x-1}-5\Leftrightarrow$$
$$5\cdot 4^x=25\cdot 2^{x-1}-5\Leftrightarrow 5\cdot\left(2^x\right)^2-25\cdot\frac{2^x}{2}+5=0\Leftrightarrow 10\cdot\left(2^x\right)^2-25\cdot 2^x+10=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(2^x\right)^2-5\cdot 2^x+2=0$$

Στην τελευταία εξίσωση θέτουμε $2^x=\omega>0$ και έχουμε την εξίσωση $2\omega^2-5\omega+2=0$, η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1=2$ και $\omega_2=\frac{1}{2}$. Οπότε είναι:

$$\omega_1=2\Leftrightarrow 2^x=2\Leftrightarrow x=1$$
$$\omega_2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-1$$

Όμως η τιμή $x=1$ απορρίπτεται, αφού $1\notin A$ ενώ η τιμή $x=-1$ είναι δεκτή, αφού $-1\in A$.

Γ. Έχουμε:

$$f(-1)=\log\frac{117}{100}$$
$$f(0)=\log 3$$
$$g(1)=-30$$

Επομένως η παράσταση Κ γίνεται:

$$K = f(-1) - f(0) - \log\left|g(1)\right| - \log 13 = \log\frac{117}{100} - \log 3 - \log 30 - \log 13 = \log\frac{117}{100} - \log 90 - \log 13 =$$

$$= \log\frac{117}{100} - \log\left(90\cdot 13\right) = \log\frac{\frac{117}{100}}{90\cdot 13} = \log\frac{117}{100\cdot 90\cdot 13} = \log\frac{9\cdot 13}{100\cdot 90\cdot 13} = \log\frac{1}{1000} = -3$$

Επομένως K=3.

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών