ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 5

05/05/2016

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) της γραφικής παράστασης C_f μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)\ ,\ \lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**
- για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Α3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, $\nu\in \mathbf{N}-\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει:

$$f'(x)=\nu x^{\nu-1},\ \text{δηλαδή}\ \left(x^\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}.$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

Δηλαδή: $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

Σωστό (πρόταση του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 178)

β. Αν $f(x)=\int_2^4\sqrt{2+t^2}\,dt$, τότε $f'(3)=0$.

Σωστό (η παράγωγος της f είναι **παντού** 0 αφού η f είναι σταθερή συνάρτηση, ως ορισμένο ολοκλήρωμα).

γ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Λάθος (όχι σε ένα τουλάχιστον σημείο αλλά σε ένα **το πολύ** σημείο).

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε υποχρεωτικά $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λάθος (δεν ισχύει **υποχρεωτικά**, αφού π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ενώ $f'(x)=3x^2\geq 0$, δηλαδή μπορεί και να μηδενίζεται σε κάποια σημεία).

ε. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Σωστό[1] (Αν έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=a$ θα είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$. Τότε όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, οπότε ασύμπτωτη είναι πάλι η $y=a$).

---

[1] Εδώ προφανώς εννοεί «πλάγια ασύμπτωτη» ευθεία της μορφής $y=ax+\beta$ με $\alpha\neq 0$, όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο στη σείδα 280.

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left(fof\right)(x)+2f(x)=2x+1,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(2)=5.$$

B1. Να βρείτε το $f(5)$.

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B3. Να βρείτε το $f^{-1}\left(2\right)$.

B4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}\left(2x^2+7x\right)-1\right)=2.$$

ΛΥΣΗ

B1. Η σχέση $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbf{R}$, οπότε για $x=2$ έχουμε:

$$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1 \Leftrightarrow f(5)+10=5 \Leftrightarrow f(5)=-5$$

B2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$$

άρα:

$$f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$$

οπότε η f είναι $1-1$, και άρα αντιστρέφεται.

B3. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(2)))+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$$

$$5+4-1=2f^{-1}(2)\Rightarrow f^{-1}(2)=4.$$

B4. Έχουμε:

$$f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2x^2+7x)-1=f^{-1}(2) \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(2x^2+7x)=5 \Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5) \Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0 \Leftrightarrow$$

$x_1=-1$ ή $x_2=-\dfrac{5}{2}$.

<u>Παρατήρηση:</u> Κανονικά σε τέτοιου είδους ασκήσεις θα πρέπει εξ΄αρχής να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} ,δηλαδή το σύνολο τιμών της f για να δούμε για ποια χορίζεται η εξίσωση., Αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Στην προκειμένη περίπτωση είναι $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3^ο^

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g$ με g παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$, για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x)=x(x+a)-x+1 \text{ με } a,\ x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)-1\geq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$g'(x)\ln x=\frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x>1$$

Γ1. Να δείξετε ότι α=1.

Γ2. Αν $g(e)=-1$, να δείξετε ότι $g(x)=-\ln^2 x$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Γ3. Αν $g(x)=-(\ln x)^2$ σε όλο το διάστημα $(0,\ +\infty)$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0\in(0,\ 1)$ για την οποία η διαφορά $f(x)-g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

ii) Να αποδείξετε όι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων Μ, Ν με $M(\xi,\ f(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και $N(\xi,\ g(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi\in(0,\ +\infty)$, στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα.

Γ4. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\dfrac{g(x)}{f(x)}}\right]$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g αντίστοιχα και των ευθειών $x=1$, $x=e$.

ΛΥΣΗ

Γ1. Έχουμε:

$$f(x)-1\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge 1 \Leftrightarrow f(x)\ge f(0),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο $x_1=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x+a-1,\ x\in\mathbb{R}$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

<u>Παρατήρηση:</u> Θα πρέπει να επαληθεύσουμε την ευρεθείσα τιμή, αφού το αντίστροφο του Θεώρηματος του Fermat **δεν ισχύει**. Έχουμε:

Για $\alpha=1$ η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x)=x(x+1)-x+1=x^2+x-x+1=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x)=x^2+1\ge 1=f(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η τιμή α=1 είναι δεκτή.

Γ2. Για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$g'(x)\ln x=\frac{2g(x)}{x} \Rightarrow g'(x)\ln x-\frac{2g(x)}{x}=0 \Rightarrow g'(x)\ln^2 x-2\ln x\cdot\frac{1}{x}g(x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)\ln^2 x-\left(\ln^2 x\right)'g(x)=0 \Rightarrow \frac{g'(x)\ln^2 x-\left(\ln^2 x\right)'g(x)}{\ln^4 x}=0 \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{\ln^2 x}\right)'=0$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\dfrac{g(x)}{\ln^2 x}=c$, $x\in(1,\ +\infty)$.

Για $x=e$ είναι:

$$x=e \Rightarrow \frac{g(e)}{\ln^2 e}=c \Rightarrow c=-1$$

Επομένως:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x}=-1 \Leftrightarrow g(x)=-\ln^2 x,\ x\in(1,\ +\infty)$$

Γ3. i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$K(x)=f(x)-g(x)=x^2+1+\ln^2 x,\ x\in(0,\ +\infty)$, η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Θα βρούμε το ελάχιστο της $K(x)$.

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$) με:

$$K'(x)=2x+2\ln x\cdot\frac{1}{x}=2\frac{x^2+\ln x}{x},\ x>0$$

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση $\Phi(x)=x^2+\ln x,\ x>0$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. (Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $K(x)$ είναι όμοια με τις ρίζες και το πρόσημο αντίστοιχα της συνάρτησης $\Phi(x)$). Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$) με $\Phi'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$, για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$. Άρα η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$, άρα και στο διάστημα $(0,1)$, οπότε:

$$\Phi\left((0,1)\right)=\left(\lim_{x\to0^+}\Phi(x),\ \lim_{x\to1^-}\Phi(x)\right)=(-\infty,1),\ \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to0^+}\Phi(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+\ln x\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}\Phi(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x^2+\ln x\right)=1$$

Επειδή $0\in(-\infty,1)=\Phi\left((0,1)\right)$ υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\Phi(x_0)=0\Leftrightarrow K'(x_0)=0$.

Έχουμε:

$$x>x_0\Rightarrow\Phi(x)>\Phi(x_0)\Rightarrow\Phi(x)>0\Leftrightarrow K'(x)>0$$
$$0<x<x_0\Rightarrow\Phi(x)<\Phi(x_0)\Rightarrow\Phi(x)<0\Leftrightarrow K'(x)<0$$

Άρα η συνάρτηση K(x) είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ x_0]$ (στο x_0 είναι συνεχής) και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0,+\infty)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης K φαίνονται στον επόμενο πίνακα μεταβολών.

x	0	x_0	$+\infty$
K΄(x)	-		+
K(x)	↓	Ολ. Ελ	↑

Επομένως, η συνάρτηση $K(x)=f(x)-g(x)$ παρουσιάζει **ένα μόνο** ελάχιστο (ολικό) στο $x_0\in(0,1)$.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,\ +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=g'(\xi)$.

Η συνάρτηση $K(x)=f(x)-g(x)$ έχει ακρότατο στο $x_0\in(0,1)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$) με:

$$K'(x)=f'(x)-g'(x),\, x\in(0,1).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$K'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$$

Το $x_0=\xi$ είναι μοναδικό, ως μοναδική ρίζα της συνάρτησης Φ του ερωτήματος (Γ3i) (αφού η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$), άρα και μοναδική ρίζα της συνάρτησης K'.

Γ4. i) Έχουμε διαδοχικά:

$$I=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\dfrac{g(x)}{f(x)}}\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)-\dfrac{\ln^2 x}{x^2+1}}\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{\dfrac{(x-1)^x}{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]$$

Θα βρούμε ξεχωριστά τα παραπάνω όρια.

Με χρήση του κανόνα του de l' Hospital για τα παραπάνω όρια έχουμε:

$$\lim_{x\to1^+}(x-1)^{x-1}=\lim_{x\to1^+}e^{(x-1)\ln(x-1)}=\lim_{u\to u_0}e^u,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ u=(x-1)\ln(x-1)$$

$$u_0=\lim_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{(x-1)^2}}=-\lim_{x\to1^+}(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to1^+}(x-1)^{x-1}=\lim_{u\to u_0}e^u=e^0=1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\ (\acute{o}\pi o\upsilon\ u=x-1,\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ x\to1\Leftrightarrow u\to0)$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln^2 x}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\dfrac{1}{x}\ln x}{3x^2-2x+1}=0$$

Επομένως:

$$I=\frac{\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{x-1}}{\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}=\frac{1}{1-0}=1$$

ii) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι:

$$\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\int_1^e\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_1^e\left|K(x)\right|dx=\int_1^e K(x)dx=\int_1^e\left(x^2+1+\ln^2 x\right)dx=$$

$$=\int_1^e x^2dx+\int_1^e 1dx+\int_1^e \ln^2xdx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e+\left[x\right]_1^e+J=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}+e-1+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+J\ \ (V)$$

, όπου $J=\int_1^e \ln^2xdx$. Τώρα για το J έχουμε:

$$J=\int_1^e \ln^2xdx=\int_1^e\left(x\right)'\cdot\ln^2 xdx=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=e-2\int_1^e \ln xdx=$$

$$=e-2\int_1^e(x)'\cdot\ln xdx=e-2\left[x\ln x\right]_1^e+2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=e-2e+2\int_1^e 1dx=-e+2\left[x\right]_1^e=-e+2e-2=e-2$$

Επομένως, από τη σχέση (V), έχουμε τελικά:

$$\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\frac{e^3+3e-4}{3}+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+e-2=\frac{e^3+3e-4+3e-6}{3}=\frac{e^3+6e-10}{3}$$

, δηλαδή $\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\dfrac{e^3+6e-10}{3}$ τ.μ

ΘΕΜΑ 4^o

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)+f(1-x)=0\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}\ \text{και}$$

$$f'(x)\neq0\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=2f(1)$

Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}\ ,\ x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx=0$

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x)dx=1$ καθώς και ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και τις ευθείες $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$.

Δ5. i) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K(\lambda)=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx+\int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx, \text{ όπου } \lambda>\frac{1}{2}$$

ii) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{K(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}$$

ΛΥΣΗ

Δ1. Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αντίστοιχα.

Από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$, για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

Άρα ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η $x=\frac{1}{2}$, η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».

Δ2. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ και
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\Leftrightarrow f'(x_0)=f(1)-f(0)\Leftrightarrow f'(x_0)=f(1)+f(1)\Leftrightarrow f'(x_0)=2f(1)$$

(γιατί για $x=1$ από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$ έχουμε $f(1)+f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=-f(1)$).

$2^{ος}$ τρόπος: Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση $K(x)=f(x)-2f(1)x,\ x\in[0,1]$, αφού στο διάστημα $[0,1]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

Δ3. Για το σημείο $A(x_1,\ g(x_1))$ στο οποίο η g τέμνει τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$g(x_1)=\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0\Leftrightarrow f(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}$$, αφού η f είναι συνάρτηση «1-1»

Άρα $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g, στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0 πρέπει να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη[2] στο $x_0=\frac{1}{2}$ με $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{f'(x)}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Αφού:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(f'\ \textit{συνεχής στο}\ \frac{1}{2}\right)$$ και $$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$$, δηλαδή $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$

Επομένως, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\omega=45^0$

Δ4 i) Έχουμε ότι:

$f(x)+f(1-x)=0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=0\Rightarrow I_1+I_2=0\ (1)$, όπου $I_1=\int_0^1 f(x)dx$ και $I_2=\int_0^1 f(1-x)dx$. Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε:

Θέτουμε: $$\begin{aligned}&1-x=u\Leftrightarrow x=1-u\\&dx=-du\\&x=1\Leftrightarrow u=0\\&x=0\Leftrightarrow u=1\end{aligned}$$, οπότε έχουμε:

[2] Η παραγώγιση της συνάρτησης g γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

$$I_2 = \int_0^1 f(1-x)dx = -\int_1^0 f(u)du = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx = I_1$$

Επομένως , από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1 + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0$$

ii) Είναι $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1\ (I)$

από την σχέση $f(x) + f(1-x) = 0$, για $x = 1$ έχουμε $f(0) + f(1) = 0\ (II)$

Από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε $f(0) = -\frac{1}{2}\ \kappa\alpha\iota\ f(1) = \frac{1}{2}$.

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| f^{-1}(x) \right| dx$.

Θέτουμε:

$$\begin{aligned} & f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \\ & dx = f'(u)du \\ & x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0 \quad \text{(αφού η } f \text{ είναι «1-1»)} \\ & x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| f^{-1}(x) \right| dx = \int_0^1 |u| \cdot f'(u)du = \int_0^1 u f'(u)du = \left[uf(u) \right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - 0 = \frac{1}{2},$$

δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega) = \frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ5. i) Θέτουμε ξανά:

$$\begin{aligned} & f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \\ & dx = f'(u)du \\ & x = 0 \Leftrightarrow u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} \quad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0) \\ & x = f(\lambda) \Leftrightarrow u = f^{-1}\left(f(\lambda)\right) \Leftrightarrow u = \lambda \end{aligned}$$

και έχουμε:

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} uf'(u)du = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \left[uf(u) \right]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} - \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(u)du =$$

$$= \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda)$$

ii) Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l’ Hospital έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{K}(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda f(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda\cdot\ln\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1+\ln\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda}}=0$$

Επεξεργασία λύσεων: www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος