ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΟΜΟΓΕΝΩΝ
8/9/2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, ορισμός σελίδα 191 σχολικό βιβλίο.

Α2. Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος σελίδα 251 σχολικό βιβλίο.

Α3.

α. Σωστό.

β. Λάθος.

γ. Λάθος.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση $3x^2+ax+3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2-36<0$ (αφού $-6<\alpha<6$).
Επομένως έχουμε:

$$z=\frac{-a\pm i\sqrt{36-a^2}}{6}$$

δηλαδή:

$$z_1=-\frac{a}{6}+\frac{\sqrt{36-a^2}}{6},\ z_2=-\frac{a}{6}-\frac{\sqrt{36-a^2}}{6}$$

Άρα $|z_1|^2=|z_2|^2=\left(\frac{a}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{36-a^2}}{6}\right)^2=\frac{a^2}{36}+\frac{36-a^2}{36}=\frac{36}{36}=1$

Β2. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}&|z-1|^2+|z+1|^2=(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=z\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\overline{z}+z+\overline{z}+1=\\&=2z\overline{z}+2=2|z|^2+2=4\end{aligned}$$

Η σχέση $|z-1|^2+|z+1|^2=4$ εκφράζει γεωμετρικά ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές με μήκη αντίστοιχα τα μέτρα των $z-1,\ z+1$ και υποτείνουσα μήκους 2.

Β3. Έχουμε:

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{a}{6}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=-3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $x=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.

Η οριζόντια ασύμπτωτη δεν υπάρχει, αφού $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)=\infty$.

Γ2. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την f στο διάστημα $\left[1,e\right]$ και έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,e\right]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)
- $f(1)=-1<0$
  $f\left(e\right)=1-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-1}{e}>0$

Άρα υπάρχει $\xi\in\left(1,e\right)$, τέτοι ώστε $f\left(\xi\right)=0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}>0\ (x>0)$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα «1-1» δηλαδή έχει μονάδική ρίζα την $\xi\in\left(1,e\right)$

Γ3. Έχουμε

$x>e\Rightarrow f(x)>f(e)\Rightarrow f(x)>\dfrac{e-1}{e}>0$ και άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_e^{2e}\left|f(x)\right|dx=\int_e^{2e}f(x)dx=\int_e^{2e}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_e^{2e}\ln x dx-\int_e^{2e}\frac{1}{x}dx=\left[x\ln x\right]_e^{2e}-\int_e^{2e}dx-\left[\ln x\right]_e^{2e}=$$

$$=2e\ln 2e-e\ln e-e-\ln 2e+\ln e=2e\left(\ln 2+1\right)-2e-\left(\ln 2+1\right)+1=2e\ln 2-\ln 2=\left(2e-1\right)\ln 2\,\tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)=2xe^{-x}-f(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x}{e^x}-f(x)\Leftrightarrow e^x f'(x)=2x-e^x f(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)=2x\Leftrightarrow\left[e^x f(x)\right]'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow e^x f(x)=x^2+c\ \ (1)$$

, όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Για $x=1\Rightarrow ef(1)=1+c\Rightarrow e\cdot e^{-1}=1+c\Rightarrow c=0$

Επομένως έχουμε από την (1)

$$(1)\Rightarrow e^x f(x)=x^2\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{e^x}$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2}{e^x}, x\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-x^2}{e^x}=0\Leftrightarrow(x=0,x=2)$$

Για $x<0\Rightarrow f'(x)<0$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Για $0<x<2\Rightarrow f'(x)>0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$.

Για $x>2\Rightarrow f'(x)<0$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$

Το σύνολο τιμών Α της συνάρτησης f είναι $A=f\left((-\infty,0]\right)\cup f\left([0,2]\right)\cup f\left([2,+\infty)\right)$.

Έχουμε:

$$f\left((-\infty,0]\right)=\left[f(0),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)$$
$$f\left([0,2]\right)=\left[f(0),f(2)\right]=\left[0,4e^{-2}\right]$$
$$f\left([2,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to\infty}f(x),f(2)\right]=\left(0,4e^{-2}\right]$$

(Χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του Dl΄Hospital $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$)

Επομένως $A=[0,+\infty)$.

Δ3. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$x^2=2e^{x-2}\Leftrightarrow x^2=\frac{2e^x}{e^2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{e^x}=\frac{2}{e^2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{e^2}$$

Έχουμε:

- $\frac{2}{e^2}\in f\left((-\infty,0]\right)=[0,+\infty)$ και άρα υπάρχει $\xi_1\in(-\infty,0]$, τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=\frac{2}{e^2}$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- $\frac{2}{e^2}\in f\left([0,2]\right)=\left[0,4e^{-2}\right]$ και άρα υπάρχει $\xi_2\in[0,2]$,τέτοιο ώστε $f(\xi_2)=\frac{2}{e^2}$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.
- $\frac{2}{e^2}\in f\left([2,+\infty)\right)=\left(0,4e^{-2}\right]$ και άρα υπάρχει $\xi_3\in[2,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(\xi_3)=\frac{2}{e^2}$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\left(-1, f(-1)\right)$ είναι:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - e = -3e\left(x+1\right) \Leftrightarrow y = -3ex - 2e$$

Αφού η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, 0\right]$ θα έχουμε:

$$f(x) \geq -3ex - 2e \Leftrightarrow f(x) + 3ex + 2e \geq 0 \,,\ x \in \left(-\infty, 0\right]$$

Μαθηματικός Περιηγητής

Γενική Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος