ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ. ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 304 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 152 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Σωστό.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Λάθος.

ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ

Β1. Έστω $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$**,** τότε έχουμε διαδοχικά:

$$|z-3i|^2 - 18 = |z-3|^2 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}+3i) - 18 = (z-3)(\bar{z}+3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 3iz - 3i\bar{z} + 9 - 18 = z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 \Leftrightarrow 3i(z-\bar{z}) - 18 = -3(z+\bar{z}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6y = 18 = -6x \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία $x - y - 3 = 0$.

Β2. Έστω $w = \kappa + \lambda i \ (\kappa, \lambda \in \mathbb{R})$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$|w-i| = \mathrm{Im}(z) + 1 \Leftrightarrow |\kappa + \lambda i - i| = \lambda + 1 \Leftrightarrow |\kappa + (\lambda-1)i| = \lambda + 1 \Leftrightarrow |\kappa + (\lambda-1)i|^2 = (\lambda+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2 + (\lambda-1)^2 = (\lambda+1)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 = 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}\kappa^2$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή $y=\frac{1}{4}x^2$.

B3. Έστω $M(x_o, y_0)$ τυχαίο σημείο της παραβολής. Άρα έχουμε $y_0=\frac{1}{4}{x_0}^2$. Οι αποστάσεις του σημείου Μ από την ευθεία (ε) $x-y-3=0$ είναι:

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|x_0-y_0-3|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|x_0-\frac{1}{4}{x_0}^2-3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|4x_0-{x_0}^2-12|}{4\sqrt{2}}=\frac{{x_0}^2-4x_0+12}{4\sqrt{2}}$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x_0)={x_0}^2-4x_0+12, x_0\in\mathbb{R}$ αυτή είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) και έχουμε:

$$f'(x_0)=2x_0-4$$
$$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=2$$
$$f'(x_0)>0 \Leftrightarrow x_0>2$$
$$f'(x_0)<0 \Leftrightarrow x_0<2$$

΄Αρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στο σημείο $x_0=2$, το $f(2)=4-8+12=8$.

Επομένως η ελάχιστη απόσταση $|z-w|$ είναι:

$$|z-w|_{\min}=\frac{8}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

__Σημείωση:__ Μπορούμε να πάρουμε την προβολή ενός τυχαίου σημείου Ν της παραβολής (έστω Μ) και ένα τυχαίο σημείο Κ της ευθείας. Τότε θα έχουμε $(NK)\geq(NM)$ και:

$$(\mathrm{MN})=d(N,\varepsilon)=\frac{{x_0}^2-4x_0+12}{4\sqrt{2}}=\frac{{x_0}^2-4x_0+4+8}{4\sqrt{2}}=\frac{(x_0-2)^2+8}{4\sqrt{2}}\geq\frac{8}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ln x, x\in(0,\ +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x)=\frac{xe^{x-1}-1}{x}, x\in(0,\ +\infty)$. Αρκεί να εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $\varphi(x)=xe^{x-1}-1,\ (0,\ +\infty)$.

Η συνάρτηση $\varphi(x)=xe^{x-1}-1,\ (0,\ +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $\varphi'(x)=e^{x-1}(x+1)>0, x\in(0,\ +\infty)$ και άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης η φ έχει ρίζα το 1 αφού $\varphi(1)=0$ Τώρα έχουμε:

- $x>1 \Leftrightarrow \varphi(x)>\varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>0$ και άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.
- $0<x<1 \Leftrightarrow \varphi(x)<\varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<0$ και άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$.

Για το σύνολο τιμών της Α έχουμε $A=f\left([1,+\infty)\right)\cup f\left((0,\ 1]\right)$. Είναι:

- $f\left([1,+\infty)\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)=[1,+\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ και έχουμε:

$$f(1)=0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[e^{x-1}\left(1-\frac{\ln x}{e^{x-1}}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{x-1}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\cdot 1=\infty$$

(χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του De l΄ Hospital)

- $f\left((0,\ 1]\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=[1,+\infty)$, αφού η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=+\infty$.

Επομένως το σύνολο τομών της f είναι $A=[1,+\infty)$.

Γ2. Η συνάρτηση $K(t)=\sqrt{t^2-1}$ ορίζεται όταν $t\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Το πεδίο ορισμού της $h(x)$ είναι το $\mathbb{R}$.

Επειδή $1\in[1,+\infty)$ θα πρέπει:

$$h(x)\geq 1 \Leftrightarrow f(x^2+1)-f(2)+1\geq 1 \Leftrightarrow f(x^2+1)\geq f(2) \Leftrightarrow x^2+1\geq 2 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

(αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και $x^2+1, 2\in[1,+\infty)$)

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Γ3. Επειδή η συνάρτηση η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$ και γνησίως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ θα είναι και «1-1» στα διαστήματα αυτά. Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=f(1) \Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}$$

Όμως:

- $\frac{3}{2}\in[1,+\infty)=f([1,+\infty))$ και άρα υπάρχει $x_1\in[1,+\infty)$ (μοναδικό) τέτοιο , ώστε $f(x_1)=\frac{3}{2}$.
- $\frac{3}{2}\in[1,+\infty)=f((0,\ 1])$ και άρα υπάρχει $x_2\in(0,\ 1]$ (μοναδικό) τέτοιο, ώστε $f(x_2)=\frac{3}{2}$.

Επομένως υπάρχουν $x_1, x_2>0$ που να είναι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ και αφού αυτή διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ θα έχουμε:

$$\frac{3}{2}-f(\xi)=f'(\xi)(0-\xi) \Leftrightarrow \frac{3}{2}-f(\xi)=-\xi f'(\xi)$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\Pi(x)=xf'(x)-f(x)+\frac{3}{2}, x\in[x_1,1]$ έχει μονάδική ρίζα $\xi\in(x_1,1)$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση $\Pi(x)$ στο διάστημα $[x_1,1]$:

Έχουμε:

- Η $\Pi(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,1]$(ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων).
- $\Pi(1)=1f'(1)-f(1)+\frac{3}{2}=1\cdot 0-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}>0$
- $\Pi(x_1)=x_1 f'(x_1)-f(x_1)+\frac{3}{2}=x_1 f'(x_1)-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=x_1 f'(x_1)<0$ (αφού η f' είναι γνησίως $0<x_1<1 \Leftrightarrow f'(x_1)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x_1)<0$ αύξουσα στο (0,1)).

[<u>Σημείωση:</u> Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f''(x)=\frac{x^2e^{x-1}+1}{x^2}>0, x\in(0,1)$.]

Άρα η $\Pi(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi\in(x_1,1)$ και επειδή η $\Pi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1,1)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$\Pi'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) > 0, x \in [x_1, 1]$, η $\Pi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1» . Επομένως η ρίζα $\xi \in (x_1, 1)$ είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα :

$$\left(x^2 - x\right) f'(x) + xf(x) = 1 \Leftrightarrow x(x-1)f'(x) + xf(x) = 1$$

$$(x-1)f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$\left[(x-1)f(x)\right]' = \left(\ln x\right)' \Leftrightarrow (x-1)f(x) = \ln x + c$$

Όπου c μια σταθερά. Είναι $x = 1 \Leftrightarrow c = 0$ και άρα έχουμε:

$(x-1)f(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$, για $0 < x \neq 1$. Για $x = 1$, αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, πρέπει:

$$f(1) = \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$ (εφαρμόσαμε τον κανόνα του De l΄ Hospital στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$)

[ευκολότερα: η αρχική σχέση για $x = 1$ δίνει $f(1) = 0$]

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt - \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{f(t)}{t}dt = \int_1^x f(t)dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(t)}{t}dt, x > 0$$

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων), αφού οι συναρτήσεις $f(t), \dfrac{f(t)}{t}$ είναι συνεχείς στο $(0, +\infty)$. Είναι:

$$F'(x) = f(x) + \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = f(x) - \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, +\infty)$$

- Για $0 < x \neq 1$ έχουμε:

$$F'(x)=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{1}{x}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{1}{x}\frac{-\ln x}{\frac{1-x}{x}}=\frac{\ln x}{x-1}+\frac{\ln x}{1-x}=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{\ln x}{x-1}=0$$

- Για $x=1\Leftrightarrow F'(1)=f(1)-f(1)=0$

Άρα $F'(x)=0, x\in(0,+\infty)$ και επομένως $F(x)=c$, όπου c σταθερά. Είναι: $F(1)=c\Leftrightarrow c=0$

Επομένως :

$$F(x)=0\Leftrightarrow\int_1^x f(t)dt-\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{f(t)}{t}dt=0\Leftrightarrow\int_1^x f(t)dt=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{f(t)}{t}dt$$

Δ3. α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ διότι $\frac{f(t)}{t}$ είναι συνεχής (ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων) και άρα έχουμε:

$$g(x)=-\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{f(t)}{t}dt=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}dt, x\in(0,+\infty)$$

$$g'(x)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{\ln x}{x-1}=f(x), 0<x\neq1$$

[Σημείωση: Είναι πιο εύκολα: $g(x)=-\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{f(t)}{t}dt=\int_1^x f(t)dt$ (λόγω της σχέσης του ερωτήματος Δ2) και άρα $g'(x)=f(x),\ x>0$].

Για $x=1$ έχουμε:

$$g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}dt}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}}{1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1=f(1)$$

Άρα:

$$g'(x)=f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, & 0<x\neq1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη για $0<x\neq1$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$g''(x)=f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, 0<x\neq1 \text{ και}$$

$$g''(1)=f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=-\frac{1}{2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $A(x)=x-1-x\ln x, x>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $A'(x)=1-\ln x-1=-\ln x, x>0$. Έχουμε:

$$A'(x)>0 \Leftrightarrow -\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$$
$$A'(x)<0 \Leftrightarrow -\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$$
$$0<x<1 \Leftrightarrow A(x)<A(1) \Leftrightarrow A(x)<0$$
$$x>1 \Leftrightarrow A(x)<A(1) \Leftrightarrow A(x)<0$$

Επομένως $g''(x)<0$ για κάθε $x>0$ και άρα η συνάρτηση g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο $(0,+\infty)$ (Για $x=1$, A(1)=0)

[Σημείωση: Η $A(x)$ έχει μέγιστο στο σημείο $x_0=1$, το $A(1)=0$, επομένως $A(x)\le 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x_0=1$).]

β) Η C_g τέμνει τον άξονα των $x'x$ όταν $g(x)=-\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ (είναι μοναδική αφού η g είναι «1-1» ως γνησίως αύξουσα διότι είναι:

$$g'(x)=f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases} \quad \text{με } f(x)>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

[Σημείωση: Είναι :

- $x>1 \Leftrightarrow \left(\ln x>0 \ \kappa\alpha\iota\ x-1>0, \acute{\alpha}\rho\alpha \frac{\ln x}{x-1}>0\right)$ και
- $0<x<1 \Leftrightarrow \left(\ln x<0 \ \kappa\alpha\iota\ x-1<0, \acute{\alpha}\rho\alpha \frac{\ln x}{x-1}>0\right)$]

Άρα το σημείο τομής της C_g με τον άξονα των $x'x$ είναι $A(1,0)$ και είναι μοναδικό.

Η εφαπτομένη της C_g στο $A(1,0)$ είναι:

$$y-0=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$$

Το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_g, την παραπάνω ευθεία και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$ είναι:

$E=\int_1^3|g(x)-(x-1)|dx=\int_1^3[(x-1)-g(x)]dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3-\int_1^3 g(x)dx=2-\int_1^3 g(x)dx$ (επειδή η συνάρτηση g είναι κοίλη στο $(1,3)$ θα έχουμε $g(x)\le x-1, x\in(1,3)$.

Για το ζητούμενο ισχύει ισοδύναμα:

$$E<2 \Leftrightarrow 2-\int_1^3 g(x)dx<2 \Leftrightarrow -\int_1^3 g(x)dx<0 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x)dx>0$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής διότι:

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,3\right]$ και άρα:

$1 \le x \le 3 \Leftrightarrow g(1) \le g(x) \le g(3) \Leftrightarrow 0 \le g(x), x \in \left[1,3\right]$(η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$)

Η g δεν είναι παντού μηδέν και είναι συνεχής στο διάστημα $[1,3]$,επομένως ισχύει $\int_1^3 g(x)dx > 0$, που ήταν το ζητούμενο (ισοδύναμα).

Δ4. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \ge \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \Leftrightarrow x\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \ge \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{x}}^{x} xf(t)dt - \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(x-t\right)f(t)dt \ge 0 \ (1)$$

Τώρα έχουμε:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln t}{t-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} > 0 \text{ για κάθε } t > 0 \text{ και :}$$

- $x = 1$ η σχέση (1) ισχύει ως ισότητα , αφού τότε $\int_1^1 \left(1-t\right)f(t)dt = 0$.
- Για $x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{x}$ είναι: $t \in \left[\frac{1}{x}, x\right] \Leftrightarrow t - x \le 0 \Leftrightarrow x - t \ge 0$ και άρα $\left(x-t\right) f(t) \ge 0$ και η συνάρτηση $M(t) = \left(x-t\right) f(t), t \in \left[\frac{1}{x}, x\right]$ είναι συνεχής και όχι παντού μηδέν

  Επομένως :

  $$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(x-t\right)f(t)dt > 0.$$

- Για $0 < x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > x$ είναι $t \in \left[x, \frac{1}{x}\right] \Leftrightarrow t - x \ge 0 \Leftrightarrow x - t \le 0$ και άρα $\left(x-t\right) f(t) \le 0$ και η συνάρτηση $M(t) = \left(x-t\right) f(t), t \in \left[\frac{1}{x}, x\right]$ είναι συνεχής και όχι παντού μηδέν.

  Επομένως:

  $$\int_{x}^{\frac{1}{x}} \left(x-t\right) f(t)dt < 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(x-t\right) f(t)dt > 0$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση είναι:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(x-t\right) f(t)dt \ge 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Β. Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών