ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 232 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 152 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Σωστό.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Λάθος.

ε. Λάθος (ισχύει και η ισότητα όταν $x=0$).

ΘΕΜΑ

Β1. Έστω $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$**,** τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\left|z-3i\right|^2-18=\left|z-3\right|^2 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z}+3i)-18=(z-3)(\overline{z}-3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}-3iz-3i\overline{z}+9-18=z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9 \Leftrightarrow 3i\left(z-\overline{z}\right)-18=-3\left(z+\overline{z}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6y=18=-6x \Leftrightarrow x-y-3=0$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία $x-y-3=0$.

Β2. Έστω $w=\kappa+\lambda i$ $(\kappa,\lambda\in\mathbb{R})$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\left|w-i\right|=\mathrm{Im}(z)+1 \Leftrightarrow \left|\kappa+\lambda i-i\right|=\lambda+1 \Leftrightarrow \left|\kappa+(\lambda-1)i\right|=\lambda+1 \Leftrightarrow \left|\kappa+(\lambda-1)i\right|^2=(\lambda+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2+(\lambda-1)^2=(\lambda+1)^2 \Leftrightarrow \kappa^2+\lambda^2-2\lambda+1=\lambda^2+2\lambda+1 \Leftrightarrow \kappa^2=4\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{4}\kappa^2$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή $y=\frac{1}{4}x^2$.

Β3. Έστω $M(x_o, y_0)$ τυχαίο σημείο της παραβολής. Άρα έχουμε $y_0=\frac{1}{4}x_0{}^2$. Οι αποστάσεις του σημείου Μ από την ευθεία (ε) $x-y-3=0$ είναι:

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|x_0-y_0-3|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|x_0-\frac{1}{4}x_0{}^2-3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|4x_0-x_0{}^2-12|}{4\sqrt{2}}=\frac{x_0{}^2-4x_0+12}{4\sqrt{2}}$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x_0)=x_0{}^2-4x_0+12, x_0\in\mathbb{R}$ αυτή είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) και έχουμε:

$$\begin{aligned}&f'(x_0)=2x_0-4\\&f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=2\\&f'(x_0)>0\Leftrightarrow x_0>2\\&f'(x_0)<0\Leftrightarrow x_0<2\end{aligned}$$

΄Αρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στο σημείο $x_0=2$, το $f(2)=4-8+12=8$.

Επομένως η ελάχιστη απόσταση $|z-w|$ είναι:

$$|z-w|_{\min}=\frac{8}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

<u>**Σημείωση:**</u> Μπορούμε να πάρουμε την προβολή ενός τυχαίου σημείου Ν της παραβολής (έστω Μ) και ένα τυχαίο σημείο Κ της ευθείας. Τότε θα έχουμε $(NK)\geq(NM)$ και:

$$(\mathrm{MN})=d(N,\varepsilon)=\frac{x_0{}^2-4x_0+12}{4\sqrt{2}}=\frac{x_0{}^2-4x_0+4+8}{4\sqrt{2}}=\frac{(x_0-2)^2+8}{4\sqrt{2}}\geq\frac{8}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}, x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}=2\left(\frac{x^4-1}{x^3}\right)=2\frac{(x^2+1)\cdot(x^2-1)}{x^3}, x>0$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}&f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\\&f'(x)>0\Leftrightarrow x>1\\&f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1\end{aligned}$$

Άρα:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ και
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$

Για το σύνολο τιμών της Α έχουμε $A = f\left([1,+\infty)\right) \cup f\left((0,\ 1]\right)$.

- $f\left([1,+\infty)\right) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right) = [2,+\infty)$, αφού η f είναι γνησίως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ και έχουμε:

$$f(1) = 2$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

Άρα $f\left([1,+\infty)\right) = [2,+\infty)$

$f\left((0,\ 1]\right) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [2,+\infty)$, αφού η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $A = [2,+\infty)$.

Γ2. Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g έχουμε:

- $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 2$
- $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 2$
- $x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 2$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 2$ και επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ3. Επειδή η συνάρτηση η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$ και γνησίως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ θα είναι και «1-1» στα διαστήματα αυτά. Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = f(1) \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x_1 = 1, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

<u>Σημείωση:</u> Οι άλλες ρίζες απορρίπτονται αφού δεν ανήκουν στο διάστημα $(0,+\infty)$

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\left(\xi, f(\xi)\right)$ είναι $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$.

Αφού αυτή διέρχεται από το σημείο $M\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$ θα είναι :

$$\frac{5}{2} - f(\xi) = f'(\xi)\left(0 - \xi\right) \Leftrightarrow \xi f(\xi) - f(\xi) + \frac{5}{2} = 0$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\Pi(x)=xf'(x)-f(x)+\frac{5}{2}, x\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ έχει μία ρίζα $\xi\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση $\Pi(x)$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$.

Έχουμε:

- Η $\Pi(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$(ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων).
- $\Pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{5}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\right)-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2-4}{\sqrt{2}}\right)=-1<0$
- $\Pi(1)=1\cdot f'(1)-f(1)+\frac{5}{2}=0-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}>0$

Άρα η $\Pi(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)=3x^4+4x^3+ax^2, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=12x^3+12x^2+2ax, x\in\mathbb{R}$. Επειδή η f έχει ακρότατο στο σημείο $x_0=1$ (εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$), σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι :

$$f'(1)=0\Leftrightarrow 12+12+2\alpha=0\Leftrightarrow 2\alpha=-24\Leftrightarrow \alpha=-12$$

Δ2. Για $\alpha=-12$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2, x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=12x^3+12x^2-24x, x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^3+12x^2-24x=0\Leftrightarrow 12x\left(x^2+x-2\right)=0\left(x_1=0, x_2=-2, x_3=1\right)$$

Το πρόσημο της παραγώγου της f φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

$-\infty$ -2 0 1 $+\infty$

x				
x	−	−	+	+
x^2+x-2	+	−	−	+
$f'(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Άρα η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,0]$ και $[1,+\infty)$.
- Έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο 0 ,το $f(0)=0$ και τοπικό ελάχιστο στα σημεία -2 και 1 τα $f(-2)=-32$ και $f(1)=-5$ αντίστοιχα.

Το σύνολο τιμών A της συνάρτησης f είναι:

$$A=f\left((-\infty,-2]\right)\cup f\left([-2,0]\right)\cup f\left([0,1]\right)\cup f\left([1,+\infty)\right)=[-32,+\infty)$$

Άρα $f(x)\geq -32$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει όταν $x=-2$). Επομένως $\beta\leq -32$.

Δ3. Η ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με:

$$\lambda=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{f(x)}{x^3+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+4x^3-12x^2}{x^4+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{x^4}=3$$

$$\beta=\lim_{x\to\infty}\left[g(x)-3x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x^3+1}-3x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+4x^3-12x^2-3x^4-3x}{x^3+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-12x^2-3x}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{x^3}=4$$

Επομένως η ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ είναι $y=3x+4$

Δ4. Έχουμε:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^\nu}\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4+4x^3-12x^2}{x^\nu}\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις (ν θετικός ακέραιος):

- Αν $\nu=4$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+4x^3-12x^2}{x^4}=3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$, επομένως $A=3\cdot 0=0$.
- Αν $\nu>4$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+4x^3-12x^2}{x^\nu}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4}{x^\nu}=0$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$, επομένως $A=0$
- Αν $\nu<4$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+4x^3-12x^2}{x^\nu}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4}{x^\nu}=3\lim\limits_{x\to\infty}x^{4-\nu}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$, οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)\cdot 0$.

Έχουμε:

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^{\nu}}\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4+4x^3-12x^2}{x^{\nu}}\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(3x^{4-\nu}+4x^{3-\nu}-12x^{2-\nu}\right)\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Θέτουμε:

$$\frac{1}{x} = u \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}\left(x>0, u>0\right)$$
$$x \to +\infty \Leftrightarrow u \to 0$$

Άρα έχουμε:

$$A = \lim_{u\to 0^+}\left(\left(\frac{3}{u^{4-\nu}}+\frac{4}{u^{3-\nu}}-\frac{12}{u^{2-\nu}}\right)\cdot \eta\mu u^2\right) = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{3\eta\mu u^2}{u^{4-\nu}}+\frac{4\eta\mu u^2}{u^{3-\nu}}-\frac{12\eta\mu u^2}{u^{2-\nu}}\right)$$

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

$$\nu = 1$$

$$\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{3\eta\mu u^2}{u^3}\right) = 3\lim_{u\to 0^+}\frac{2u\sigma\upsilon\nu u^2}{3u^2} = 2\lim_{u\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u^2}{u^2} = +\infty$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{4\eta\mu u^2}{u^2} = 4$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{12\eta\mu u^2}{u} = 12\lim_{u\to 0^+}\frac{2u\sigma\upsilon\nu u^2}{1} = 0$$

$$A = +\infty$$

$$\nu = 2$$

$$A = 3+0-0 = 3$$

$$\nu = 3$$

$$A = 0+0-0 = 0$$

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος