ΘΕΜΑ Γ
(ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2015

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x), x>0$$

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

ΛΥΣΗ (ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ)

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Γ3.

Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[2x,4x]\subset[0,+\infty)$, $x>0$ θα έχουμε , σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ.Ο.Λ.:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt = f(\xi)\left(4x-2x\right) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt = 2xf(\xi) < 2xf\left(4x\right),$$

Αφού $2x<\xi<4x \Leftrightarrow f(2x)<f(\xi)<f(4x)$ [αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2x,4x]\subset[0,+\infty)$]

Γ4. Η συνάρτηση g είναι συνεχής για $x>0$ (ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής και στο $x_0=0$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(4x)-2f(2x)}{1} = 4f(0)-2f(0)=2f(0)=2=g(0)$

αφού $(f(0)=1)$.

Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$g'(x)=\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}=\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-2xf(\xi)}{x^2}>$$

$$>\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-2xf(4x)}{x^2}=\frac{2xf(4x)-2xf(2x)}{x^2}=\frac{2\left[f(4x)-f(2x)\right]}{x}>0$$

διότι $\begin{array}{l} x>0 \\ 4x>2x \Rightarrow f(4x)>f(2x) \Rightarrow f(2x)-f(2x)>0 \end{array}$

[αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2x,4x]\subset[0,+\infty)$]