ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ, 25 ΜΑΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 194 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 188 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 259 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε διαδοχικά:

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4)=4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-4z-4\overline{z}+16=4z\overline{z}-4z-4\overline{z}+4 \Leftrightarrow 3z\overline{z}=12 \Leftrightarrow z\overline{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Β2. α. Αφού οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν το ερώτημα Β1 θα είναι:

$$|z_1|=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}=2 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\frac{2}{z_1}$$

$$|z_2|=2 \Leftrightarrow z_2\overline{z_2}=2 \Leftrightarrow \overline{z_2}=\frac{2}{z_2}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\overline{w}=\frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\frac{2\frac{2}{z_1}}{\frac{2}{z_2}}=\frac{4z_2}{2z_1}+\frac{4z_1}{2z_1}=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=w$$

Άρα $\overline{w}=w$ και επομένως ο w είναι πραγματικός αριθμός.

β. Έχουμε διαδοχικά:

$$|w|=\left|\frac{2\left(z_1{}^2+z_2{}^2\right)}{z_1z_2}\right|=2\left|\frac{z_1{}^2+z_2{}^2}{z_1z_2}\right|=2\frac{\left|z_1{}^2+z_2{}^2\right|}{|z_1z_2|}=\frac{2}{4}\left|z_1{}^2+z_2{}^2\right|\leq\frac{1}{2}\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\leq\frac{1}{2}(4+4)=4$$

Επομένως:

$$|w|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq w\leq 4$$

Β3. Για τη σχέση των $z_1,\ z_2$ έχουμε:

$$w=-4\Leftrightarrow\frac{2\left(z_1{}^2+z_2{}^2\right)}{z_1z_2}=-4\Leftrightarrow\frac{z_1{}^2+z_2{}^2}{z_1z_2}=-2\Leftrightarrow z_1{}^2+z_2{}^2=-2z_1z_2\Leftrightarrow\left(z_1+z_2\right)^2=0\Leftrightarrow z_1+z_2=0\Leftrightarrow z_1=-z_2$$

Για το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$(\text{ΑΓ})=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1(1-2i)|=|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}$$
$$(\text{ΒΓ})=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|-z_1(1+2i)|=|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αφού (ΑΓ)=(ΒΓ).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{x^2+1}=-\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}},x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:
$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$
$$x>0\Leftrightarrow f'(x)<0$$
$$x<0\Leftrightarrow f'(x)>0$$

Ο πίνακας προσήμου της f' είναι:

$-\infty$		0	$+\infty$
x			
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Άρα η συνάρτηση f είναι:

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$

Έχει μέγιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=1$

Έχουμε επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$, άρα $f\big((-\infty,0]\big)=(0,1]$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$,άρα $f\big((0,\infty]\big)=(0,1]$ και επομένως το σύνολο τιμών της f

είναι το $(0,1]$.

Γ2. Έχουμε:

Για $x>0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<1$(αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x>0$)

Για $x<0 \Leftrightarrow f(x)<f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<1$(αφού η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x<0$)

Άρα

- $0<f(x)<1 \Leftrightarrow f(0)>f(f(x))>f(1) \Leftrightarrow 1>f(f(x))>\frac{\sqrt{2}}{2}$ (αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$)
- $f(x)<0 \Leftrightarrow f(f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(f(x)>1>\frac{\sqrt{2}}{2}$ (αφού η f είναι γνησίως άυξουσα στο $(-\infty,0)$)
- Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1>\frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\big(f(x)\big)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Γ3. Έχουμε:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

Αν θέσουμε $x+1=h$ έχουμε $x\to 0 \Leftrightarrow h\to 1$ και άρα :

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(h)-f(1)}{h-1}=f'(1)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Γ4. Η εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ [σημε'ιο επαφής] είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Επειδή πρέπει οι εφαπτομένες να διέρχονται από το σημείο (3,0) θα έχουμε:

$$0=f'(x_0)\big(3-x_0\big)+f(x_o)\Leftrightarrow f'(x_0)\big(x_0-3\big)=f(x_0)\ (1)$$

Ακόμα είναι $f'(x_0)=-\dfrac{x_0}{\left(x_0^{\ 2}+1\right)\sqrt{x_0^{\ 2}+1}}$ και η σχέση (1) γίνεται:

$$-\frac{x_0}{\left(x_0^{\ 2}+1\right)\sqrt{x_0^{\ 2}+1}}\big(x_0-3\big)=\frac{1}{\sqrt{x_0^{\ 2}+1}}\Leftrightarrow -x_0\big(x_0-3\big)=x_0^{\ 2}+1$$

$$\Leftrightarrow -x_0^{\ 2}+3x_0=x_0^{\ 2}+1\Leftrightarrow -2x_0^{\ 2}+3x_0-1=0\Leftrightarrow 2x_0^{\ 2}-3x_0+1=0\Leftrightarrow \left(x_0=1 \text{ ή } x_0=\frac{1}{2}\right)$$

Επομένως οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $K\big(1, f(1)\big)$ και $M\left(\dfrac{1}{2}, f(\dfrac{1}{2})\right)$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(3,0)$ είναι αντίστοιχα:

$$y-f(1)=f'(1)\big(x-1\big)\Leftrightarrow y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\big(x-1\big)\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ και}$$

$$y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{4\sqrt{5}}{25}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{4\sqrt{5}}{25}x+\frac{12\sqrt{5}}{25}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε:

$$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}\Leftrightarrow xf(x)=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow f(x)=\frac{1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu x}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}, x\neq 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0=0$. Επομένως έχουμε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0 \text{ και}$$

$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le x\eta\mu\frac{1}{x}\le|x|$, με $\lim_{x\to 0}(|x|)=\lim_{x\to 0}(-|x|)=0$ και από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

Άρα : $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0-0=0$

Δ2. Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)'-\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)'=\frac{x\eta\mu x-1+\sigma\upsilon\nu x}{x^2}-\left(\eta\mu\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{x\eta\mu x-1+\sigma\upsilon\nu x}{x^2}-\eta\mu\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x},\ x\neq 0$$

Δ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\infty}f(x)=-1$

Έχουμε:

$\left|\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\frac{1+|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|}\le\frac{1+1}{|x|}=\frac{2}{|x|}$, δηλαδή $-\frac{2}{|x|}\le\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\frac{2}{|x|}$ με

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{|x|}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{|x|}\right)=0$ και από το κριτήριο της παρεμβολης είναι $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1 \quad \left(\text{θέτοντας } \begin{array}{l} u=\frac{1}{x} \\ x\to+\infty\Leftrightarrow u\to 0 \end{array}\right)$$

Άρα $\lim_{x\to\infty}f(x)=0-1=-1$

Δ4. Αφού $\lim_{x\to\infty}f(x)=-1<0$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1>0$ «κοντά» $+\infty$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)<0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Bolzano στο διάστημα $\left[\frac{1}{\pi},x_1\right]$ και έχουμε:

- Η $f(x)$ συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi},x_1\right]$(ως συνεχής στο $\mathbb{R}$)

- $f(x_1) < 0$ και $f(\frac{1}{\pi}) = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}} - \frac{1}{\pi}\eta\mu\pi = \pi\left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}\right) > 0$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$.