ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΠΑ.Λ.

ΣΤΑ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι»

ΠΕΜΤΗ, 21 ΜΑΪΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μίας συνεχούς συνάρτησης f **σ΄ένα διάστημα Δ** είναι:

α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

β) Τα εσωστερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

γ) Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμούς της).

Α2.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Λάθος.

ε. Σωστό.

Α3.

α) $\int_{a}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \ln\beta - \ln a$, $\beta > \alpha > 0$

β) $(c)' = 0$

γ) $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i}{\nu}$, όπου ν το μέγεθος του δείγματος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Χρόνος σε λεπτά	**Κέντρο κλάσης** κ_i	**Συχνότητα** ν_i	**Αθροιστική συχνότητα** N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
[5, 15)	**10**	**20**	**20**	**200**
[15, 25)	**20**	**14**	**34**	**280**
[25, 35)	**30**	**12**	**46**	**360**
[35, 45)	**40**	**4**	**50**	**160**
ΣΥΝΟΛΑ		**ν=50**		**1000**

Β2. Η μέση τιμή των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές να γράψουν το διαγώνισμα είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \kappa_i \nu_i}{\nu} = \frac{1000}{50} = 20 \text{ λεπτά.}$$

Β3. Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} \left(\kappa_i - \bar{x}\right)^2 \nu_i}{\nu} = \frac{(10-20)^2 \cdot 20 + (20-20)^2 \cdot 14 + (30-20)^2 \cdot 12 + (40-20)^2 \cdot 4}{50} =$$

$$= \frac{2000+1200+1600}{50} = \frac{4800}{50} = 96$$

και η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{96} \cong 10$ λεπτά.

Β4. Έχουμε:

$$C.V = \frac{s}{\bar{x}} \cong \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ ή ο } C.V\% \text{ είναι } 50\%$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{\lambda x - 2\lambda}, & \alpha\nu\ x > 2 \\ 4x + 4e^{x-2}, & \alpha\nu\ x \le 2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Γ1. Έχουμε:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(4x + 4e^{x-2}\right) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot e^0 = 8 + 4 = 12$$

Γ2. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{\lambda x - 2\lambda} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{\lambda(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x+4}{\lambda} = \frac{12}{\lambda}$$

Γ3. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 2$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 12 = \frac{12}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Γ4. Έχουμε:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(4x+4e^{x-2}\right)dx = \int_1^2 4xdx + \int_1^2 4e^{x-2}dx = \left[2x^2\right]_1^2 + \left[4e^{x-2}\right]_1^2 = 6 + 4\left(1-\frac{1}{e}\right) = 10 - \frac{4}{e}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15,\ 0 \le t < 10$ είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) στο διάστημα [0,10) με $B'(t) = -t^2 + 4t + 12,\ 0 \le t < 10$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου είναι $B'(t) = -t^2 + 4t + 12,\ 0 \le t < 10$.

Δ2. Ζητούμε το μέγιστο της συνάρτησης $B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15,\ 0 \le t < 10$.

Έχουμε:

$B'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t_1 = 6,\ t_2 = -2)$(η τιμή -2 απορρίπτεται αφού $t \ge 0$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

	0	6	10
$B(t)$		$+$	$-$
$B'(t)$		$\nearrow$	$\searrow$

Η συνάρτηση $B(t)$ έχει μέγιστο στο $t_1 = 6$.

Επομένως τη χρονική στιγμή $t_1 = 6$ έτη το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο.

Δ3. Στο διάστημα $[6,9]$ η συνάρτηση $B(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως για κάθε $t \in [6,9]$ έχουμε:

$$6 \le t \le 9 \Leftrightarrow B(6) \ge B(t) \ge B(9) \Leftrightarrow B(9) \le B(t) \le B(6)$$

Δ4. Η συνάρτηση $B'(t) = -t^2 + 4t + 12,\ 0 \le t < 10$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,10) (ως πολυωνυμική) με $B''(t) = -2t + 4,\ 0 \le t < 10$.

Έχουμε:

$$B''(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

- $B''(t) > 0 \Leftrightarrow -2t + 4 > 0 \Leftrightarrow t < 2$, επομένως η $B'(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$.
- $B''(t) < 0 \Leftrightarrow -2t + 4 < 0 \Leftrightarrow t > 2$, επομένως η $B'(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,10]$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής $B'(t)$ του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος όταν $t = 2$ έτη.

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμουλος Μαθηματικών