

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2014-2015

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

α. Σωστό.

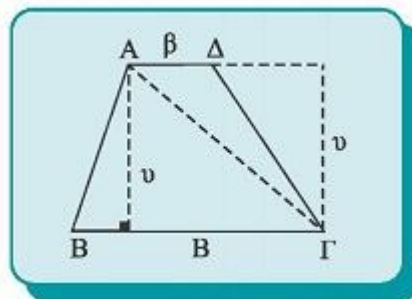
β. Λάθος (πρέπει R να είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου).

γ. Σωστό.

δ. Λάθος (το σωστό είναι $\omega_v = \frac{360}{v}$).

ε. Σωστό.

B. Απόδειξη:



Θεωρούμε τραπέζιο ABΓΔ ($BΓ // AΔ$) (σχ.10), με βάσεις $BΓ = B$, $AΔ = β$ και ύψος v .
Φέρουμε τη διαγώνιο AΓ. Τότε έχουμε

$$E = (ABΓΔ) = (ABΓ) + (AΓΔ) \quad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ABΓ και AΓΔ έχουν το ίδιο ύψος v και βάσεις B , $β$ αντίστοιχα και επομένως:

$$(ABΓ) = 12 B \cdot v \text{ και } (AΓΔ) = 12 β \cdot v \quad (2),$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $E = \frac{B+\beta}{2} \cdot \nu$, δηλαδή το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Έχουμε:

$$\alpha^2 = 64$$

$$\beta^2 = 112$$

$$\gamma^2 = 16$$

Είναι $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$ και άρα $\hat{B} > 90^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο ABΓ με μήκη πλευρών $\alpha = 8$, $\beta = 4\sqrt{7}$ και $\gamma = 4$ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία \hat{B} .

B. Από το Νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ για τη γωνία \hat{B} έχουμε διαδοχικά:

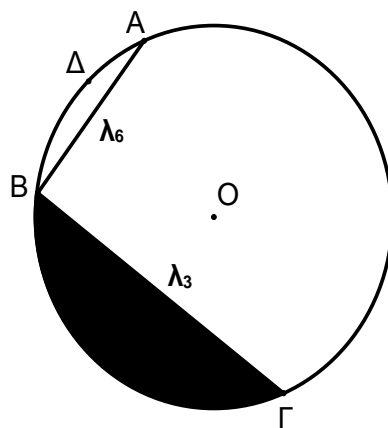
$$\begin{aligned} \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos \hat{B} \Leftrightarrow \cos \hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \hat{B} &= \frac{64 + 16 - 112}{2 \cdot 8 \cdot 4} \Leftrightarrow \cos \hat{B} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επομένως $\hat{B} = 120^\circ$.

Γ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα της οξείας γωνίας για την $\hat{A} < 90^\circ$ (αφού το τρίγωνο ABΓ έχει μόνο μία αμβλεία γωνία τη \hat{B}):

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Lambda\Delta \Leftrightarrow \Lambda\Delta = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta} \Leftrightarrow \Lambda\Delta = \frac{112 + 16 - 64}{8\sqrt{7}} \Leftrightarrow \Lambda\Delta = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

ΘΕΜΑ 3^ο



A. Έχουμε $E = 4\pi = \pi R^2 \Leftrightarrow R = 2$.

Β. Είναι $\widehat{AB} = 60^\circ$ (αφού η αντίστοιχη χορδή AB είναι πλευρά κανονικού εξάγωνα).

Επίσης $\widehat{B\Gamma} = 120^\circ$ (αφού η αντίστοιχη χορδή AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου).

Άρα:

$$\widehat{A\Gamma} = 360^\circ - (\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma}) \Leftrightarrow \widehat{A\Gamma} = 360^\circ - 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\Gamma} = 180^\circ$$

Επομένως $\widehat{A\Gamma} = 180^\circ$, οπότε η χορδή AΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

Γ. α. Το μήκος l του τόξου \widehat{ADB} είναι: $l = l_{AB} + l_{B\Gamma}$ (1).

$$\text{Η γωνία } \widehat{AOB} = 60^\circ \text{ και άρα έχουμε: } l_{AB} = \frac{\pi R \cdot 60}{180} = \frac{\pi R}{3} \quad (2)$$

$$\text{Η γωνία } \widehat{BO\Gamma} = 120^\circ \text{ και άρα έχουμε: } l_{B\Gamma} = \frac{\pi R \cdot 120}{180} = \frac{2\pi R}{3} \quad (3)$$

Η σχέση (1) από τις σχέσεις (2) και (3) γίνεται:

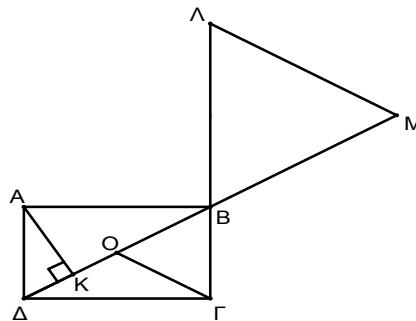
$$l = l_{AB} + l_{B\Gamma} = \frac{\pi R \cdot 60}{180} + \frac{\pi R \cdot 120}{180} = \frac{\pi R}{3} + \frac{2\pi R}{3} = \pi R = 2\pi$$

β. Το εμβαδόν ε του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\widehat{BO\Gamma}) - (BO\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot \lambda_3 \cdot a_3 = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \\ &= \frac{4\pi}{6} - \frac{4\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

, όπου $B\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}$ η βάση και $a_3 = \frac{R}{2} = v$ το ύψος, αντίστοιχα, του τριγώνου BOΓ.

ΘΕΜΑ 4^ο



Α. Έχουμε:

$$(AB\Gamma\Delta) = 48 \Leftrightarrow AB \cdot \Delta\Delta = 48 \Leftrightarrow 8 \cdot \Delta\Delta = 48 \Leftrightarrow \Delta\Delta = 6$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΔ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\Delta B^2 = A\Delta^2 + AB^2 \Leftrightarrow \Delta B^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow \Delta B^2 = 100 \Leftrightarrow \Delta B = 10$$

Β. Από γνωστό θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ ισχύει:

$$AB^2 = \Delta B \cdot BK \Leftrightarrow 64 = 10 \cdot BK \Leftrightarrow BK = \frac{32}{5}$$

Γ. Τα τρίγωνα $BO\Gamma$ και $B\Lambda M$ έχουν $\hat{O}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Lambda}\hat{B}\hat{M}$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις ίσες γωνίες, δηλαδή:

$$\frac{(BO\Gamma)}{(B\Lambda M)} = \frac{BO \cdot B\Gamma}{BM \cdot B\Lambda} \Leftrightarrow \frac{(BO\Gamma)}{(B\Lambda M)} = \frac{\frac{\Delta B}{2} \cdot B\Gamma}{\Delta B \cdot 2B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{(BO\Gamma)}{(B\Lambda M)} = \frac{1}{4}$$

Δ. Θα υπολογίσουμε πρώτα το εμβαδόν του $BO\Gamma$. Έχουμε:

$$(BO\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot \nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta B}{2} \cdot \nu = \frac{\Delta B \cdot \nu}{4} \quad (1)$$

Όμως $\nu = AK$ (2). Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε:

$$AK^2 = \Delta K \cdot KB = \frac{18}{5} \cdot \frac{32}{5} \Leftrightarrow AK^2 = \frac{576}{25} \Leftrightarrow AK = \frac{24}{5} \quad (3)$$

, αφού $\Delta K = \Delta B - KB = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$.

Άρα η σχέση (1) λόγω των σχέσεων (2) και (3) γίνεται:

$$(BO\Gamma) = \frac{\Delta B \cdot \nu}{4} \Leftrightarrow (BO\Gamma) = \frac{10 \cdot \frac{24}{5}}{4} \Leftrightarrow (BO\Gamma) = 12 \text{ τ.μ}$$

Όμως, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (Γ), είναι $\frac{(BO\Gamma)}{(B\Lambda M)} = \frac{1}{4}$ και άρα έχουμε:

$$\frac{(BO\Gamma)}{(B\Lambda M)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (B\Lambda M) = 4(BO\Gamma) \Leftrightarrow (B\Lambda M) = 48 \text{ τ.μ}$$

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος