ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2014-2015
ΤΑΞΗ: Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{ο}}$

Α.

α. Σωστό.

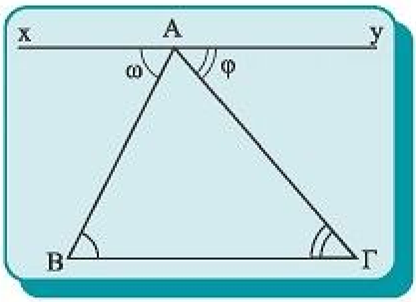
β. Σωστό.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Σωστό.

Β. Απόδειξη:

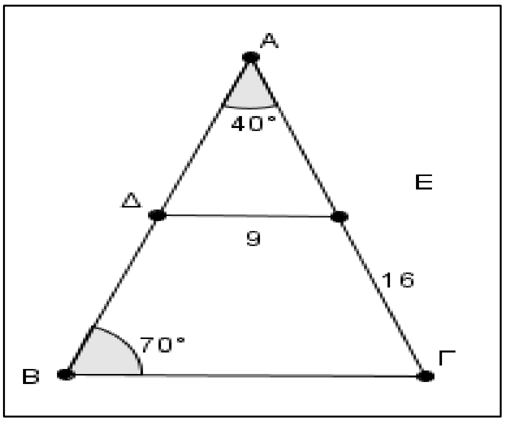


Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε ω = Β (1) και φ = Γ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αλλά: ω+Α+φ=2∟ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0$$

ΘΕΜΑ 2^o



Α. Η γωνία $\hat{\Gamma} = 180^0 - \left(70^0 + 40^0\right)$ ή $\hat{\Gamma} = 70^0$, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και άρα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις προσκείμενες γωνίες στη πλευρά ΑΒ ίσες, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

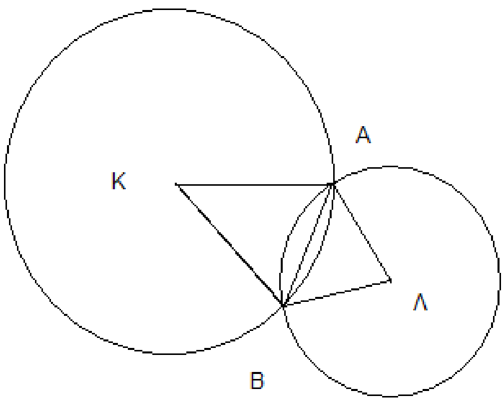
Β. Αφού η ΔΕ ενώνει τα μέσα Δ, Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα θα είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ ή $B\Gamma = 2\Delta E$, δηλαδή $B\Gamma = 18$.

Γ. Έχουμε:

$$A\Gamma = 2E\Gamma = 32$$
$$AB = A\Gamma = 32$$
$$B\Gamma = 18$$

Επομένως η περίμετρος Π του ΑΒΓ είναι $\Pi = AB + A\Gamma + B\Gamma = 32 + 32 + 18 = 82$

ΘΕΜΑ 3^o



Α. Τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΚΛ έχουν:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A\Lambda}=\mathrm{B\Lambda}\ (\text{ακτίνες ίδιου κύκλου}) \\ \mathrm{AK}=\mathrm{BK}\ (\text{ακτίνες ίδιου κύκλου}) \\ \mathrm{K\Lambda}=\mathrm{K\Lambda}\ (\text{κοινή πλευρά}) \end{array}\right\}$$

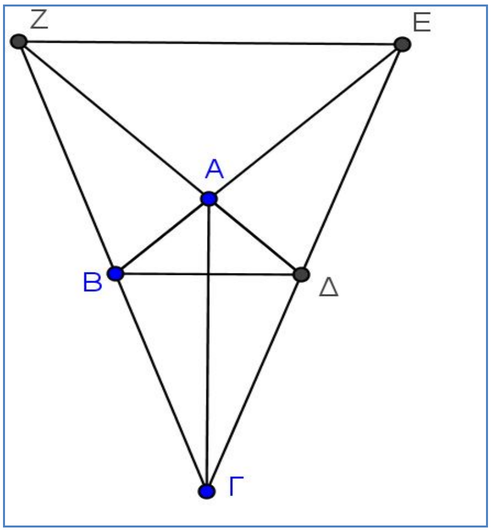
Επομένως τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΚΛ έχουν τρεις αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία (Π-Π-Π) και άρα είναι ίσα.

Β. Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές αφού ΑΚ=ΒΚ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Το τρίγωνο ΑΒΛ είναι ισοσκελές αφού ΒΛ=ΑΛ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Γ. Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΒ έχουν κοινή βάση την ΑΒ. Επειδή το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές η ΚΜ (όπου Μ το σημείο τομής των ΚΛ και ΑΒ) θα είναι διάμεσος και ύψος του τριγώνου. Ομοίως η ΛΜ, επειδή το τρίγωνο ΑΛΒ είναι ισοσκελές, θα είναι επίσης διάμεσος και ύψος. Επομένως η γωνία $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\Lambda = 90^0 + 90^0 = 180^0$ και άρα τα σημεία Κ, Μ, Λ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4ο



Α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{AB}=\mathrm{A\Delta}\ (\text{δεδομένο}) \\ \mathrm{B\Gamma}=\Delta\Gamma\ (\text{δεδομένο}) \\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}(\text{κοινή πλευρά}) \end{array}\right\}$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν τρεις αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μια (Π-Π-Π) και άρα είναι ίσα. Άρα $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta$ και άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$.

Β. Έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} \text{ (1) } (\textit{αφού } \mathrm{AB}\Delta \textit{ ισοσκελές τρίγωνο})$$
$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma \text{ (2) } (\textit{αφού } \mathrm{B}\Delta\Gamma \textit{ ισοσκελές τρίγωνο})$$

Ακόμα έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 180^0 - \left(\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma\right)$$
$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 180^0 - \left(\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} + \mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma\right)$$

Οι τελευταίες σχέσεις λόγω των σχέσεων (1) και (2) δίνουν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}$.

Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΕ έχουν:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{AB} = \mathrm{A}\Delta \\ \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta (\textit{ως κατακορυφήν γωνίες}) \\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} \end{array}\right\}$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΕ έχουν μία πλευρά ίση και τις δύο προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες, οπότε από το κριτήριο (Γ-Π-Γ) είναι ίσα. Άρα ΒΖ=ΔΕ.

Έτσι ΒΓ=ΓΔ και ΒΖ=ΔΕ και με πρόσθεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε ΓΖ=ΓΕ.

Γ. Το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές (ΒΓ=ΓΔ) και η ευθεία που ενώνει τα Γ και Α είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$ και επομένως η ΓΚ θα είναι και ύψος του τριγώνου ΒΓΔ (όπου Κ το σημείο τομής της ΓΑ με την ΒΔ).

Άρα $\Gamma\mathrm{A} \perp \mathrm{B}\Delta$ (Ι).

Με όμοιο τρόπο, το τρίγωνο ΖΓΕ είναι ισοσκελές (αφού αποδείξαμε ότι ΓΖ=ΓΕ) και η ευθεία που ενώνει τα Γ και Α είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$ και επομένως η ΓΛ θα είναι και ύψος του τριγώνου ΒΓΔ (όπου Λ το σημείο τομής της προέκτασης της ΓΑ με την ΖΕ).

Άρα $\Gamma\mathrm{A} \perp \mathrm{ZE}$ (ΙΙ)

Από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ) έχουμε ότι $\mathrm{B}\Delta // \mathrm{ZE}$.

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών