ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Μαΐου και Ιουνίου που έχουν δοθεί από 2000 έως 2014

ΟΡΙΣΜΟΙ

(το πλήθος των * στο κάθε θέμα δηλώνει πόσες φορές έχει δοθεί το αντίστοιχο θέμα)

* Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

* Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

** Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

* Έστω μια συνάρτηση f και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o;

*** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

* Πότε μια συνάρτηση f: $A \to IR$ λέγεται “1-1”;

** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

* Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

* Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

* Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

* Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού(Θ.Μ.Τ.)

** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

* Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

* Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

* Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

* Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

* Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

** Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

***Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

** Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

* Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- f(α) ≠ f(β)

δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in$ (α, β) τέτοιος, ώστε $f(x_0)$ = **η** .

****Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

** Έστω η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 , +∞) και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

* Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, x∈ IR* είναι παραγωγίσιμη στο IR* και ισχύει:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

***Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- f΄(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

***Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

* Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f΄(x)>0 στο (α, x_0) και f΄(x)<0 στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

* Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η f΄(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

***Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι: όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c, $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες στο Δ και κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x)+c, $c\in\mathbb{R}$

*** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]**.** Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ =G (β) – G(α).