

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΑΥΤΟΔΙΟΡΘΩΣΗΣ**  
**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**2015**

**Μερικές χρήσιμες οδηγίες:**

1. Μετά την ολοκλήρωση της τρίωρης εξέτασης, σημειώστε τις βαθμολογικές μονάδες που λάβατε σύμφωνα με τις επόμενες υποδείξεις.
2. Επιμερίστε ισοδύναμα οποιοδήποτε βήμα έχετε κάνει για τη λύση του κάθε υποερωτήματος κάθε θέματος.
3. Είναι χρήσιμο, αφού δείτε την πλήρη λύση οποιουδήποτε υποερωτήματος που δεν το ολοκληρώσατε, να ξαναπροσπαθήσετε να γράψετε την ορθή λύση μόνοι σας.
4. Συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα, σύμφωνα με τις οδηγίες κατανομής μονάδων που βρίσκονται μέσα στις λύσεις:

| ΘΕΜΑ Α                           | ΘΕΜΑ Β          | ΘΕΜΑ Γ           | ΘΕΜΑ Δ           | Παρατηρήσεις                         |
|----------------------------------|-----------------|------------------|------------------|--------------------------------------|
| A1                               | B1.             | Γ1.              | Δ1.              |                                      |
| A2                               | B2.             | Γ2.<br>i)<br>ii) | Δ2.              |                                      |
| A3                               | B3.             | Γ3.<br>i)<br>ii) | Δ3.              |                                      |
| A4<br>α.<br>β.<br>γ.<br>δ.<br>ε. | B4              |                  | Δ4.<br>i)<br>ii) |                                      |
| ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ:                  | ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: | ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ:  | ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ:  | <b>ΓΕΝΙΚΟ<br/>ΣΥΝΟΛΟ<br/>ΜΟΝΑΔΩΝ</b> |

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 212 και ορισμός στη σελίδα 216 του σχολικού βιβλίου.  
**A2.** Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 149 του σχολικού βιβλίου.  
**A3.** Απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 334.

**A4.**

- α.** Λάθος.  
**β.** Σωστό.  
**γ.** Σωστό.  
**δ.** Λάθος ( ισχύει σε διάστημα  $\Delta$  και όχι απαραίτητα σε σύνολο  $A$  ).  
**ε.** Σωστό.

Comment [D1]: 2 MONAΔΕΣ  
 ΤΟ ΚΑΘΕ ΕΝΑ ΕΡΩΤΗΜΑ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - 2015i}{z + 2015i} \right| = 1 &\Leftrightarrow |z - 2015i| = |z + 2015i| \Leftrightarrow |z - 2015i|^2 = |z + 2015i|^2 \Leftrightarrow \\ (z - 2015i)(\bar{z} + 2015i) &= (z + 2015i)(\bar{z} - 2015i) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z\bar{z} + 2015zi - 2015\bar{z}i + 2015^2 &= z\bar{z} - 2015zi + 2015\bar{z}i + 2015^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2015zi - 2015\bar{z}i &= -2015zi + 2015\bar{z}i \Leftrightarrow 4030zi = 4030\bar{z}i \Leftrightarrow z = \bar{z} \end{aligned}$$

Επομένως  $z \in \mathbb{R}$ .

**B2.** Αρχικά θέτουμε (για ευκολία των πράξεων)  $k = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  και παρατηρούμε ότι:

$$|k| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow |k|^2 = 1 \Leftrightarrow k\bar{k} = 1 \Leftrightarrow \bar{k} = \frac{1}{k} \quad (I)$$

Ακόμα από τα δεδομένα έχουμε:

$$|w| = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow w\bar{w} = 1 \Leftrightarrow \bar{w} = \frac{1}{w} \quad (II)$$

Έτσι είναι: 
$$v = \frac{w - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w} = \frac{w - k}{1 + kw}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

Comment [D2]: 1 MONAΔΑ  
 ΤΟ ΚΑΘΕ ΒΗΜΑ

Comment [D3]: 2 MONAΔΕΣ

Comment [D4]: 1 MONAΔΑ

$$\bar{v} = \frac{\bar{w} - \bar{k}}{1 + \bar{k}\bar{w}} = \frac{\frac{1}{w} - \frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{w}} = \frac{\frac{k-w}{wk}}{\frac{kw+1}{kw}} = \frac{k-w}{kw+1} = -\frac{w-k}{1+kw} = -v$$

Επομένως  $v \in \mathbb{C}$ .

Comment [D5]: 5 ΜΟΝΑΔΕΣ

**B3.** Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο  $u$  είναι πραγματικός αριθμός<sup>1</sup> (αφού κάθε πραγματικός

Comment [D6]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

αριθμός  $z = x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τη σχέση (1)  $\left| \frac{x-2015i}{x+2015i} \right| = \left| \frac{\sqrt{x^2+2015^2}}{\sqrt{x^2+2015^2}} \right| = 1$ ). Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} u &= (a-ai)^{2024} = [a(1-i)]^{2024} = a^{2024} (1-i)^{2024} = a^{2024} [(1-i)^2]^{1012} = \\ &= a^{2024} (1-2i+i^2)^{1012} = a^{2024} (-2i)^{1012} = a^{2024} (-2)^{1012} i^{1012} = 2^{1012} a^{2024} i^{1012} = (2a^2)^{1012} \end{aligned}$$

, αφού  $i^{1012} = 1$

Comment [D7]: 1 ΜΟΝΑΔΑ  
ΣΕ ΚΑΘΕ ΒΗΜΑ

**B4.** Αφού  $z = x \in \mathbb{R}$  και  $v = yi$ ,  $y \in \mathbb{R}$  έχουμε  $z+v = x+yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) και άρα:

Comment [D8]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

$$z^2 + \frac{w^2}{2} = 9 \Leftrightarrow x^2 + \frac{(yi)^2}{2} = 9 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{2} = 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{18} = 1$$

Comment [D9]: 3 ΜΟΝΑΔΕΣ

ή  $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$  και άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z+v$  του

μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση  $z^2 + \frac{w^2}{2} = 9$  είναι υπερβολή με εστίες τις  $E(0,3)$  και  $E'(0,-3)$ .

Comment [D10]:  
2 ΜΟΝΑΔΕΣ

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η συνάρτηση  $f$  γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}, & \text{αν } x > 0 \text{ και } x \neq 1 \\ \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}, & \text{αν } x < 0 \text{ και } x \neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

<sup>1</sup> Μπορούμε, αφού βρούμε τον αριθμό  $u = (2a^2)^{1012} = x \in \mathbb{R}$ , να επαληθεύσουμε την σχέση (1):

$$\left| \frac{u-2015i}{u+2015i} \right| = \left| \frac{x-2015i}{x+2015i} \right| = \frac{\sqrt{x^2+2015^2}}{\sqrt{x^2+2015^2}} = 1$$

Για το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} = 0,$$

Comment [D11]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [e^{-x^2+1}(x-1)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x^2+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = e \cdot (-1) = -e$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)} = 0,$$

Comment [D12]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^-} [e^{-x^2+1}(x-1)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x^2+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = e \cdot (-1) = -e$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(-x)) = -\infty$

Επομένως είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  και άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

Comment [D13]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η

Comment [D14]: 0,5 ΜΟΝΑΔΑ

$f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ . Τέλος για να είναι η  $f$  συνεχής σε

Comment [D15]: 0,5 ΜΟΝΑΔΑ

στο  $\mathbb{R} - \{-1\}$  πρέπει να είναι συνεχής και στο  $x_1 = 1$ .

Έχουμε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L' Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x^2+1}(-2x^2+2x+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} [e^{-x^2+1}(-2x^2+2x+1)x] = 1$$

Comment [D16]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

Επομένως  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$ .

Comment [D17]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

## Γ2.

ι) Η συνάρτηση  $g(x) = f(x) \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ,  $x > 0$  γίνεται διαδοχικά:

Για  $x = 1$  έχουμε  $g(1) = f(1) \cdot \ln 1 = 0$

$$g(x) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} (\ln 1 - \ln x^2) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} (-2 \ln x) = -2e^{-x^2+1}(x-1)$$

Επομένως θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης  $g(x) = -2e^{-x^2+1}(x-1)$ ,  $x > 0$ .

Comment [D18]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, \infty)$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = -2[-2x(x-1)e^{-x^2+1} + e^{-x^2+1}] = -2e^{-x^2+1}(-2x^2 + 2x + 1), x > 0$$

Comment [D19]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Επειδή  $-2e^{-x^2+1} < 0$ , για  $x > 0$ , το πρόσημο της  $g'(x)$  εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου  $-2x^2 + 2x + 1$

Comment [D20]: 0,5 ΜΟΝΑΔΑ

Ο πίνακας προσήμου της  $g'(x)$  είναι ο επόμενος:

|         |   |                        |           |
|---------|---|------------------------|-----------|
|         | 0 | $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ | $+\infty$ |
| $x$     |   |                        |           |
| $g'(x)$ |   | -                      | +         |
| $g(x)$  |   | ↘                      | ↗         |

Comment [D21]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Επομένως η συνάρτηση  $g$  είναι:

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$  και

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$

Comment [D22]: 1,5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ii) Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της  $g'(x)$  του ερωτήματος (i) η συνάρτηση  $g$  έχει

ελάχιστο (ολικό) στο σημείο  $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ , το  $g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-\sqrt{3})$ .

Comment [D23]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Επομένως για κάθε  $x > 0$  έχουμε:

$$g(x) \geq g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow -2e^{-x^2+1}(x-1) \geq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-\sqrt{3}) \Leftrightarrow e^{-x^2+1}(x-1) \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

Comment [D24]: 2 ΜΟΝΑΔΕΣ

Άρα:

- Για  $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$  έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}$$

- Για  $x-1 < 0$  και  $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$  έχουμε:

Comment [D25]: 0,5 ΜΟΝΑΔΕΣ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΝΣΤΟΤΗΤΑ

$$e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}$$

**Γ3.**

i) Η  $g'(x)$  είναι παραγωγίσιμη για κάθε  $x > 0$  (ή αλλιώς η  $g(x)$  είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη για κάθε  $x > 0$ ) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x) = -4e^{-x^2+1}(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = -4e^{-x^2+1}(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = -4e^{-x^2+1}(x+1)(2x^2 - 4x + 1), x > 0$$

Επειδή  $-4e^{-x^2+1} < 0$  για  $x > 0$ , το πρόσημο της  $g''(x)$  εξαρτάται από το πρόσημο του

$$(x+1)(2x^2 - 4x + 1).$$

Ο πίνακας του προσήμου της  $g''(x)$  είναι ο επόμενος:

|   |                        |                        |          |
|---|------------------------|------------------------|----------|
| 0 | $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ | $\infty$ |
|---|------------------------|------------------------|----------|

|          |   |   |   |
|----------|---|---|---|
| $x$      |   |   |   |
| $g''(x)$ | - | + | - |
| $g(x)$   | ∩ | ∪ | ∩ |

Επομένως η συνάρτηση  $g$ :

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα  $\left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$

Είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα  $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα  $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

Τα σημεία καμπής της είναι το και το  $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, g\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$  ή το  $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}e^{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}\right)$

και το  $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, g\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$  ή το  $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}e^{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}\right)$

Comment [D26]:  
0,5 ΜΟΝΑΔΕΣ

Comment [D27]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D28]:  
0,5 ΜΟΝΑΔΕΣ

Comment [D29]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D30]:  
0,5 ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΟ ΚΑΘΕ Σ.Κ

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο σημείο

$A(2, g(2))$  είναι:

$$y - g(2) = g'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y + 2e^{-3} = 6e^{-3}(x - 2) \Leftrightarrow y = 6e^{-3}x - 14e^{-3}$$

Comment [D31]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Επειδή η  $g$  είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα  $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$  θα είναι:

Comment [D32]: 0,5 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$y \geq g(x) \Leftrightarrow 6e^{-3}x - 14e^{-3} \geq -2e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow -3e^{-3}x + 7e^{-3} \leq e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow e^{-4}(-3x+7) \leq e^{-x^2}(x-1)$$

Comment [D33]: 1,5 ΜΟΝΑΔΕΣ

, για κάθε  $x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ .

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $B(1, g(1))$  είναι:

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -2(x - 1)$$

Comment [D34]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Επειδή η  $g$  είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα  $(0, 1) \subset \left(0, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$  θα είναι:

Comment [D35]: 0,5 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$y \leq g(x) \Leftrightarrow -2(x-1) \leq -2e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow x-1 \geq e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow 1 \leq e^{-x^2+1} \Leftrightarrow e^{-x^2} \geq e^{-1}, \text{ για}$$

Comment [D36]: 1,5 ΜΟΝΑΔΕΣ

κάθε  $0 < x < 1$ , αφού  $x-1 < 0$ .

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$f(x) = -f(-x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Comment [D37]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Για την  $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1+\sigma\nu\nu t}{\sqrt{t^4-t^2+4}} dt$  θέτουμε  $t = -\omega$  και έχουμε:

Comment [D38]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

$$dt = -d\omega$$

$$t = -x \Leftrightarrow \omega = x$$

$$t = -2x \Leftrightarrow \omega = 2x$$

Comment [D39]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Επομένως για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f(-x) = -\int_x^{2x} \frac{1+\sigma\nu\nu(-\omega)}{\sqrt{(-\omega)^4 - (-\omega)^2 + 4}} d\omega = -\int_x^{2x} \frac{1+\sigma\nu\nu\omega}{\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 4}} d\omega = -f(x)$$

Comment [D40]: 0,5 ΜΟΝΑΔΕΣ

Δ2. Θέτοντας για ευκολία  $h(t) = \frac{1+\sigma\nu\nu t}{\sqrt{t^4-t^2+4}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = \int_x^{2x} h(t) dt = \int_x^0 h(t) dt + \int_0^{2x} h(t) dt = \int_0^{2x} h(t) dt - \int_0^x h(t) dt, x \in \mathbb{R}$$

Comment [D41]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Η συνάρτηση  $h(t) = \frac{1+\sigma\nu\nu t}{\sqrt{t^4-t^2+4}}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  (ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων στο

$\mathbb{R}$ ) και άρα οι συναρτήσεις  $\int_0^x h(t)dt$  και  $\int_0^{2x} h(t)dt$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  (ως σύνθεση παραγωγίσιμων). Επομένως η συνάρτηση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = h(2x) \cdot (2x)' - h(x) = 2h(2x) - h(x) = K(x), x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την  $K(x)$  στο διάστημα  $[0, 1]$  και έχουμε:

- Η  $K(x)$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ , ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο  $[0, 1]$
- $K(0) = 1 > 0$
- $K(1) = \frac{1+\sigma\nu\nu 2}{2} - \frac{1+\sigma\nu\nu 1}{2} = \frac{\sigma\nu\nu 2 - \sigma\nu\nu 1}{2} < 0$ , αφού  $2 > 1 \Leftrightarrow \sigma\nu\nu 2 < \sigma\nu\nu 1$ , διότι η συνάρτηση  $\sigma\nu\nu x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

Άρα  $K(0) \cdot K(1) < 0$  και επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $K(\xi) = 0$  ή  $f'(\xi) = 0$ .

**Δ3.** Από τη σχέση  $\int_0^x g(t)dt \leq e^{2015x} + x^5 - 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^x g(t)dt \leq e^{2015x} + x^5 - 1 \Leftrightarrow \int_0^x g(t)dt - e^{2015x} - x^5 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \leq 0 = \varphi(0)$$

,όπου  $\varphi(x) = \int_0^x g(t)dt - e^{2015x} - x^5 + 1, x \in \mathbb{R}$ .

Άρα ισχύει  $\varphi(x) \leq \varphi(0)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και επομένως η συνάρτηση  $\varphi(x)$  έχει μέγιστο στο σημείο  $x_0 = 0$ . Ακόμα η  $\varphi(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$ , αφού η  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  (δεδομένο) με:

$$\varphi'(x) = g(x) - 2015e^{2015x} - 5x^4, x \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα έχουμε:

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) - 2015e^0 = 0 \Leftrightarrow g(0) = 2015$$

Όμως είναι (βρέθηκε παραπάνω):

$$f'(x) = h(2x) \cdot (2x)' - h(x) = 2h(2x) - h(x) = K(x), x \in \mathbb{R}$$

Επομένως  $f'(0) = 2h(0) - h(0) = h(0) = \frac{1+\sigma\nu\nu 0}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$

Άρα:

$$g(0) = 2015 \Leftrightarrow g(0) = 1 + 2014 \Leftrightarrow g(0) = f'(0) + 2014$$

Comment [D42]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D43]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D44]:  
3 ΜΟΝΑΔΕΣ (ΓΙΑ ΚΑΘΕ  
ΒΗΜΑ)

Comment [D45]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D46]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D47]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D48]:  
0,5 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D49]:  
0,5 ΜΟΝΑΔΑ



**Δ4. i)** Εφαρμόζουμε το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση  $g$  στα διαστήματα  $[0, 1008]$  και  $[1008, 2016]$ . Έχουμε:

- Η  $g$  είναι συνεχής στα διαστήματα  $[0, 1008]$  και  $[1008, 2016]$  (δεδομένο).
- Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα  $[0, 1008]$  και  $[1008, 2016]$  (δεδομένο)

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi_1 \in (0, 1008)$  και ένα τουλάχιστον  $\xi_2 \in (1008, 2016)$  τέτοια, ώστε:

$$g'(\xi_1) = \frac{g(1008) - g(0)}{1008} = \frac{3023 - 2015}{1008} = 1 \text{ και}$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g(2016) - g(1008)}{1008} = \frac{4031 - 3023}{1008} = 1$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση  $g'$  στο διάστημα  $[\xi_1, \xi_2]$ . Έχουμε:

- Η  $g'$  είναι συνεχής στο  $[\xi_1, \xi_2]$ , ως παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .
- Η  $g'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\xi_1, \xi_2)$ , ως δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .
- $g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 2016)$  τέτοιο, ώστε  $g''(x_0) = 0$

**ii)** Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  και άρα έχουμε την απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$

οπότε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L'Hospital (η  $f(x)$  και  $x$  είναι παραγωγίσιμες), έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2h(2x) - h(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} [2h(2x) - h(x)] = 2h(0) - h(0) = h(0) = \frac{1 + \sin 0}{\sqrt{4}} = 1 \text{ (η)}$$

συνάρτηση  $h(x)$  είναι συνεχής  $\mathbb{R}$ , ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων, άρα συνεχής και στο 0)

Comment [D50]:  
2 ΜΟΝΑΔΕΣ ΓΙΑ ΚΑΘΕ  
ΣΩΣΤΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ  
Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΟΣ  
ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΣ

Comment [D51]: 1 ΜΟΝΑΔΑ

Comment [D52]:  
2 ΜΟΝΑΔΕΣ