ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης (Προσανατολισμού)

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2013-2014

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης –Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συλλογή των θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων στη Β΄τάξη του Γενικού Λυκείου αποτελεί συνέχεια παρόμοιας προσπάθειας που έγινε κατά τα προηγούμενα δύο σχολικά έτη. Τα θέματα προέρχονται από Λύκεια του Νομού Δωδεκανήσου.Τα θέματα επιλέχθηκαν αφενός με βάση το τεχνικό κριτήριο της δυνατότητας επεξεργασίας και αφετέρου το κριτήριο της λιγότερης παρέμβασης. Όμως φέτος τα θέματα που παραθέτουμε έχουν υποστεί, στο μέτρο του δυνατού, αξιολόγηση ως προς:

Α. Το υφιστάμενο νομικό πλαίσιο επιλογής και διάρθρωσης των θεμάτων,

Β. Το περιεχόμενο τους καθώς και την επιστημονική τους ορθότητα ,

Γ. Την διαβαθμισμένη δυσκολία τους ,

Δ. Την αισθητική τους καθώς και την ηλεκτρονική τους σελιδοπόιηση,

Ε. Την φιλολογική τους επιμέλεια.

Έτσι , πολλά από τα θέματα που ακολουθούν, έχουν υποστεί κάποιας μορφής «παρέμβαση» , χωρίς ωστόσο να αλλοιωθεί ο χαρακτήρας και η δομή τους.

Παραδίδουμε λοιπόν στους αγαπητούς μαθητές μας και στους αξιόμαχους συναδέλφους μας μαθηματικούς, αλλά και σε όποιον ενδιαφέρεται για την μαθηματική εκπαίδευση, το υλικό που ακολουθεί και ελπίζουμε να τους βοηθήσει.

Μάρτιος 2015

Καραγιάννης Ιωάννης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Δωδεκανήσου

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$x^2 + y^2 = \rho^2$

(Μονάδες 10)

Β. Να διατυπώσετε τον ορισμό της παραβολής.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

β. Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

γ. Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από τη ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνετε

από τον τύπο:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

δ. Η εξίσωση $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = \rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο

$K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

ε. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες: $y = \frac{\beta}{a}x$ και $y = -\frac{\beta}{a}x$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(1 ,2) , Β(-2 , 5) , Γ(5 , 6).

Α. Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου είναι ορθή.

(Μονάδες 7)

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνετε ο κύκλος $C_1:\ x^2+y^2=25$

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(4,\ 3\right)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο.

(Μονάδες 4)

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) του παραπάνω κύκλου στο σημείο του $M\left(4,\ 3\right)$.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και του κύκλου $\left(x-10\right)^2+\left(y-5\right)^2=36$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση: $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$

Α. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών, των εστιών καθώς επίσης και τη εκκεντρότητα της έλλειψης.

(Μονάδες 10)

Β. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $\left(\eta\right): x-y+2=0$.

(Μονάδες 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\psi_2)$, τα οποία δεν είναι παράλληλα στον άξονα ψ΄ψ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

(Μονάδες 10)

Β. Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε, Ε΄ του επιπέδου και μεγάλο άξονα 2α. (Ισχύει 2α > (Ε΄Ε) και α > 0). Στη συνέχεια να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης όταν οι εστίες της Ε, Ε΄είναι σημεία του άξονα $x'x$, την εξίσωση όταν οι εστίες Ε, Ε΄είναι σημεία του άξονα ψ΄ψ και να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις παραμέτρους α, β και γ. Να σχεδιάσετε ένα σχετικό σχήμα .

(Μονάδες 7)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=1$

β. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε ισχύει πάντα $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

γ. Η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-\mathrm{B},\mathrm{A})$.

δ. Η απόσταση της εστίας Ε της παραβολής $x^2=2py$ από τη διευθετούσα της δ είναι ίση με $|p|$.

(Μονάδες 4x2=8)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία: Α(-2 , 4), Β(2 , -1) και Γ(-1 , 3) του καρτεσιανού επιπέδου.

Α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ και το $|\vec{\alpha}|$.

(Μονάδες 5)

Β. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$, το συντελεστή διεύθυνσής του $\lambda_{\vec{\beta}}$ και τη γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

Γ. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (-3,5)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

(Μονάδες 6)

Δ. Έστω Ε και Ε΄ σημεία του άξονα $x'x$ συμμετρικά ως προς το Ο(0,0) τέτοια ώστε: $(\mathrm{E'E}) = 2|\vec{\alpha}|$. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων Μ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση: $(\mathrm{ME}) + (\mathrm{ME'}) = -2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Δίνεται η εξίσωση C_1: $x^2 + \psi^2 - 2x - 3 = 0$ (1)

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

Β. Να βρείτε την εξίσωση παραβολής C_2, της οποίας η εστία Ε ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου και η παράμετρος p της παραβολής με την ακτίνα του κύκλου.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}(3, 2\sqrt{3})$ είναι σημείο της παραπάνω παραβολής.

(Μονάδες 3)

Δ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C_2 στο σημείο $\mathrm{A}(3, 2\sqrt{3})$ εφάπτεται και του κύκλου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$

Δίνεται η εξίσωση (ε_λ): $(\lambda+2)x - (2\lambda + 1)\psi + 3 = 0$ **,** $\lambda \in \mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(ε_λ)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Β. Για λ=1 να βρείτε την εξίσωση της ευθείας **(ε_1)**, το σημείο Α στο οποίο η ευθεία **(ε_1)** τέμνει τον άξονα $x'x$ και την απόσταση του σημείου Ο (0,0) από την (ε_1).

(Μονάδες 6)

Γ. Για λ = 0, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_0), το σημείο Β στο οποίο η ευθεία (ε_0)

τέμνει τον άξονα ψ΄ψ, το σημείο τομής Γ των ευθειών (ε_0) και (ε_1) και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

Δ. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $(\boldsymbol{\varepsilon_\lambda})$ διέρχονται από το σταθερό σημείο Γ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου από τα οποία δε διέρχεται καμιά ευθεία από αυτές που παριστάνει η εξίσωση $(\boldsymbol{\varepsilon_\lambda})$.

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να διατυπώσετε τον ορισμό της παραβολής.

(Μονάδες 7)

Β. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής και την εστία της αν έχει διευθετούσα δ: $x = -1$

(Μονάδες 6)

Γ. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε.

εξίσωση κωνικής	**γραφή της κωνικής στην κανονική της μορφή**	**χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)**
α. $4x^2 = 36 + 9y^2$		
β. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$		
γ. $9x^2 = 100 - 25y^2$		
δ. $y^2 - 12x = 0$		

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής:

$$Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0 \quad (1)$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία.

(Μονάδες 18)

Β. Δίνεται η εξίσωση $\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)x + \left(2\lambda^2 + 3\lambda + 3\right)y - 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 4)

Β2. Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 8)$ και $\Gamma(5,\ -6)$

Α. Να αποδείξετε ότι δεν είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

Β. Να βρείτε τα μέσα Μ και Ν των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα .

(Μονάδες 4)

Γ. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΜΝ.

(Μονάδες 4)

Δ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε που είναι παράλληλες στην ΜΝ και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση $d = 2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (y-2,\ x)$ και $\vec{\beta} = (y+2,\ x+2)$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_1 των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία είναι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

Β. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $A(0,\ 5)$

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1,λ_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$$

(Μονάδες 8)

Β. Να σχεδιάσετε τη παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$ με $p>0$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα την εστία (με τις συντεταγμένες της) και τη διευθετούσα (με την εξίσωσή της).

(Μονάδες 7)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $\beta^2x^2-a^2y^2=a^2\beta^2$ $(\alpha\cdot\beta\neq 0)$ παριστάνει υπερβολή.

β. Αν ε είναι η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τότε $\varepsilon>1$.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta}=(A,\ -B)$.

δ. Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2=\vec{a}^2\cdot\vec{\beta}^2$.

ε. Η εξίσωση $(x-x_o)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ παριστάνει πάντα κύκλο.

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2Ο

Δίνονται τα σημεία Α(5, 3) Β(-1, 8) Γ(4, 0)

Α. Να αποδείξετε ότι δεν είναι συνευθειακά .

(Μονάδες 10)

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ .

(Μονάδες 10)

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$

Αν $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **,** να υπολογίσετε:

Α. $|\vec{v}|$

(Μονάδες 8)

Β. $\vec{w} \cdot \vec{v}$

(Μονάδες 8)

Γ. $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{v})}$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Α. Να βρείτε η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων, μεγάλο άξονα πάνω στον άξονα των $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $A(3,\ 4)$ και $B(2,\ 6)$.

(Μονάδες 13)

Β. Αν η εξίσωση έλλειψης του ερωτήματος (Α) είναι $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{52} = 1$

Να βρείτε : i. Τον μεγάλο άξονα ii. Τον μικρό άξονα

iii. Τις εστίες iv. Την εκκεντρότητα

(Μονάδες 3x4=12)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Αν $\vec{a}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα, να αποδείξτε ότι:

$$\vec{a}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$$

, όπου λ_1 και λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα, εφόσον αυτά δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 10)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα τότε $\vec{a}\cdot\vec{\beta}=|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|$

β. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-B,\ A)$

γ. Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,\ y_o)$ και είναι παράλληλη στον $x'x$ έχει εξίσωση $y=y_o$.

δ. Η παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$

ε. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E'(-\gamma,\ 0)$ και $E(\gamma,\ 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $2\alpha>2\gamma$ είναι $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ με $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$

(Μονάδες 2x5=10)

Γ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σταθερά σημεία E' και E του επιπέδου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Για τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{a}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$

Έστω επίσης το διάνυσμα $\vec{v}=\vec{a}-2\vec{\beta}$.

Α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\cdot\vec{\beta}$

(Μονάδες 5)

Β. Να βρείτε το $|\vec{v}|$

(Μονάδες 7)

Γ. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\cdot\vec{v}$

(Μονάδες 6)

Δ. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{\beta}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι συντεταγμένες των κορυφών του Α(6, 1) και Γ(2, 3).

Αν το ύψος του ΑΔ έχει εξίσωση $x-2y-4=0$ και η διάμεσός του ΒΛ έχει εξίσωση $y=-x+6$, να βρείτε:

Α. Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

(Μονάδες 7)

Β. Την εξίσωση της πλευράς ΑΓ

(Μονάδες 7)

Γ. Τις συντεταγμένες της κορυφής Β

(Μονάδες 5)

Δ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΛ, όπου Λ το μέσο της ΑΓ

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda^2x-4\lambda y+\lambda^2=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$ του οποίου να προσδιορισετε το κέντρο και την ακτίνα του.

(Μονάδες 5)

Β. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή από την οποία εξαιρείται η κορυφή της.

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής του ερώτηματος (Β).

(Μονάδες 5)

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

(Μονάδες 7)

Β. Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

(Μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\ \vec{\beta})=0$

β. Αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta},\ \lambda\in R$

γ. Αν $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ ευθεία και σημείο $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$ εκτός αυτής τότε:

$$d(\mathrm{M}_0,\ \varepsilon)=\frac{|A\chi_0+B\psi_0+\Gamma|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

δ. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει πάντα κύκλο .

(Μονάδες 2x4=8)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,\ -4)$ και $\vec{\beta}=(-8,\ 5)$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\beta}_1$ και $\vec{\beta}_2$ από τις οποίες η $\vec{\beta}_1//\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το σημείο του επιπέδου $M\left(2t+1,\ 4t+3\right),\ t\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η ευθεία $\varepsilon: 2x-y+1=0$.

(Μονάδες 9)

Β. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $O(0,\ 0)$ από την ευθεία ε .

(Μονάδες 7)

Γ. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει από το $O(0,\ 0)$ την ελάχιστη δυνατή απόσταση.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων όταν διέρχεται από το Μ $(1, \sqrt{3})$

(Μονάδες 7)

Β. Αν $\text{P}(x_1, y_1)$ σημείο του κύκλου του προηγούμενου ερωτήματος , με $x_1 > 0$ και $y_1 > 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Ρ και τα σημεία Α και Β που αυτή τέμνει τους άξονες (συναρτήσει των x_1 και y_1)

(Μονάδες 6)

Γ. Να βρείτε το σημείο Ρ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη του κύκλου στο Ρ να τέμνει τους άξονες σε δύο σημεία Α και Β ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να έχει μήκος 4.

(Μονάδες 12)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,\ y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$

(Μονάδες 15)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{a}=(x,\ y)$ τότε $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

β. Αν $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,\ A)$.

δ. Η παραβολή με εστία $E\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x=-\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $x^2=2py$.

ε. Όταν η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τείνει στη μονάδα, τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ 1)$, $\Gamma(2,\ 4)$.

Α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 7)

Β. Να βρείτε σημείο Δ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρείτε το κέντρο Κ του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma(2,\ 3)$. Έστω ότι το ύψος και η διάμεσος που άγονται από την κορυφή Α έχουν εξισώσεις $3x+5y+6=0$ και $x-11y+2=0$ αντίστοιχα.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(-2,\ 0)$.

(Μονάδες 6)

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 6)

Γ. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Β είναι $(5,\ -2)$.

(Μονάδες 6)

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$(C_1): x^2+y^2-6x+2y+\lambda+1=0 \quad \text{και} \quad (C_2): x^2+y^2-4x+4y+4\lambda+2=0 \quad \text{με} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Α. Για ποιες τιμές του λ οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους;

(Μονάδες 6)

Β. Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες (συναρτήσει του λ) των παραπάνω κύκλων.

(Μονάδες 7)

Γ. Να αποδείξετε ότι για $\lambda=1$ οι εφαπτομένες τους σε ένα κοινό τους σημείο είναι κάθετες μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της κοινή τους χορδής.

(Μονάδες 12)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)\ \kappa\alpha\iota\ \vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1,\ \lambda_2$, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$$

(Μονάδες 10)

Β. Να διατυπώσετε τον ορισμό της παραβολής με εστία Ε και διευθετούσα την ευθεία (δ)

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

β. Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(\mathrm{B},-\mathrm{A})$ είναι παράλληλο στην ευθεία:

$$\varepsilon:\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0,\ \mathrm{A}\neq0\ \acute{\eta}\ \mathrm{B}\neq0$$

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται πάντα από τον τύπο:

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot\det\left(\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}\right)$$

δ. Σε κάθε έλλειψη με εστιακή απόσταση 2γ και μήκος μεγάλου άξονα 2α ισχύει ότι : $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$.

ε. Κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,\ y_o)$ έχει εξίσωση της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\ \kappa+1)$, $B(1,\ \kappa)$, $\Gamma(0,\ \kappa+2)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa=1$ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να ορίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

Β . Για $\kappa=1$, να υπολογίσετε:

α. το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ,

(Μονάδες 9)

β. την τιμή της παράστασης $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}})$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 :\ (\kappa+2)x-3y-24\kappa=0$ και $\varepsilon_2 : 4x-3y+2=0,\ \kappa\in\mathbb{R}$

Α. Να βρείτε το κ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 5)

Β. Για $\kappa=2$

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ, η οποία είναι κάθετη στην ε_2 στο σημείο της $A(1,\ 2)$ και το σημείο τομής της Β με την ε_1 .

(Μονάδες 10)

β. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$.

(Μονάδες 5)

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C ο οποίος εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ στα σημεία Β, Α .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η υπερβολή $C_1 : 16x^2-9y^2=144$ και η γραμμή $C_2 : x^2+y^2-6x-2y+9=0$

Α. Να βρείτε τις εστίες και οι ασύμπτωτες της υπερβολής C_1

(Μονάδες 6)

Β. Να αποδείξετε ότι η γραμμή C_2 είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

Γ. Να εξετάσετε τη σχετική θέση του κύκλου C_2 και της ασύμπτωτης της υπερβολής που σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

Δ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 7)