20 επαναληπτικά θέματα

για τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ λυκείου

(**τεύχος 3** – σχολικό έτος **2014-2015**)

Γράφουν οι μαθηματικοί:

Βέρρας Οδυσσέας

Καρύμπαλης Νώντας

Κοτσώνης Γιώργος

Κώνστας Χάρης

Λιτζερίνος Χρήστος

Μπούζας Δημήτρης

Οικονομοπούλου Βάσια

Παπαπαναγιώτου Κώστας

Πετρόπουλος Βασίλης

Σκίτσας Νώντας

ελεύθερη διάθεση για εκπαιδευτικούς σκοπούς από:

Μαθηματικά για το τελευταίο θρανίο!

maths4people.blogspot.gr

Θέμα 1ο

Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής και γνησίως μονότονη για την οποία ισχύει ότι:

$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-\beta}{x-\alpha} = \lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{f(x)-\alpha}{x-\beta} = 2015$, με $\alpha,\ \beta\in R$ και $0<\alpha<\beta$.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$

Β. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε: $\dfrac{f(x_o)-\beta}{x_o-\beta}=\dfrac{f(x_o)-\alpha}{x_o-\alpha}$

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,4\alpha)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi)=\dfrac{f(2\alpha)+f(3\alpha)}{2}$

Ε. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(4x)}{f(x)}$

Θέμα 2ο

Έστω οι δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,\ g$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[1,\alpha]$, με $\alpha\in R$, για τις οποίες ισχύει ότι $f'(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(1)=g(1)=1$ και $f(x)+g(x)=\int_1^{\alpha} f(t)g(t)dt$, για κάθε $x\in[1,\alpha]$.

Α. Να δείξετε ότι $g(x)=2-f(x)$, για κάθε $x\in[1,\alpha]$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει $x_o\in(1,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)g(x_o)=\dfrac{2}{\alpha-1}$.

ii. Η εξίσωση $\left[2f(x)-2\right]^2=\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[1,\alpha)$.

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)-g'(x)=\dfrac{f(x)-g(x)}{\alpha-x}$ έχει λύση στο $(1,\alpha)$.

Δ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f''(x)=g''(x)$, για κάθε $x\in[1,\alpha]$, να βρείτε τους τύπους των $f,\ g$.

Θέμα 3ο

Έστω συνάρτηση f, με $D_f = (0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad f\left(f(x)\right) = x \cdot f(x), \text{ για κάθε } x > 0$$

Α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = \frac{f(x)}{x}$

Β. Να βρείτε το $f(1)$

Γ. Να αποδείξετε ότι αν η $f \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o τότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_o \in (0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα τότε:

i. να βρεθεί το πρόσημο της f

ii. να βρεθεί το $f'(1)$

iii. να δείξετε ότι και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

Ε. Έστω μιγαδικός z που ικανοποιεί τη σχέση $|z-4-3i| = 1$ **(1)**.

i. να δείξετε ότι $6 \leq z+\bar{z} \leq 10$

ii. να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών που ικανοποιούν την **(1)** και για τους οποίους ισχύει ότι: $8f(z+\bar{z}) \geq f(8)(z+\bar{z})$.

Θέμα 4ο

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R για την οποία ισχύει : $f(x)-2x=\int_0^{2x} f\left(\frac{2x-t}{2}\right)dt$ για κάθε $x\in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{2x}-1$, $x\in R$.

Β. Έστω συνάρτηση g συνεχής στο R για την οποία ισχύει: $\int_0^1 x\cdot g(x+t)\,dt\le f(x)$, για κάθε $x\in R$.

- **i.** Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 g(t)\,dt=2$.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{\xi} g(t)\,dt=1$
- **iii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x g(t)\,dt=1-x\cdot g(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

Γ. Δίνεται η ευθεία (ε): $y+x-2=0$.

- **i.** Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία ε σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $\alpha\in(0,1)$.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ευθεία (ε) και τον $y'y$ είναι $\frac{-e^{2\alpha}-\alpha^2+6\alpha+1}{2}$ τ. μονάδες.

Θέμα 5ο

Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in R$.

Α. Αν $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_6^4 \left[f\left(\frac{x}{2}\right) - 2x \right] dx$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Β. Αν $\int_1^3 f(x)\,dx = 10$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 5$

Γ. Αν επιπλέον, ισχύει ότι $\int_0^\pi \left(\left[f(x) + f''(x) \right] \eta\mu x \right) dx = f(\pi) - 1$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Δ. Έστω η ευθεία $(\varepsilon):\ y = x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία (ε) σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_3 \in (0,3)$.

ii. Θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$ στο διάστημα $[0,3]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in [0,3]$ τέτοιο ώστε: $g(\xi) = \frac{3 - x_1 - x_2}{2}$

Θέμα 6°

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, με $x>0$.

Α. Να βρεθεί το σύνολο τιμών και το πρόσημο της g.

Β. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f, ορισμένη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει

$x^2 f^2(x)+x^3 f(x) f'(x)=\ln x$, για κάθε $x>0$. Επιπλέον δίνεται ότι $f(e)=\dfrac{1}{e}$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

i. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $x^e=e^x$

iii. Να βρεθεί το σημείο της C_f στο οποίο, κατά τη χρονική στιγμή t_o, ο ρυθμός μεταβολής της τετμηνένης $x'(t_o)$ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y'(t_o)$, με $x'(t_o)\cdot y'(t_o)\neq 0$.

Γ. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln\left[\dfrac{(x+1)^x}{x^{(x+1)}}\right]}{x(x+1)}\right)$

Δ. Έστω συνάρτηση $K(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

i. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[K(x+1)-K(x)\right]$

ii. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,dt$ είναι σταθερή.

iii. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της K, τον άξονα $x'x$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=e$.

Θέμα 7ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f , με $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει :

$$x^2-\ln x\le x\cdot f(x)\le x^2+\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

Β. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

Γ. Έστω μιγαδικός z ώστε: $2z\bar{z}^3+5z^3\bar{z}+7=0$. Να δείξετε ότι:

- **i.** $z\bar{z}^3=z^3\bar{z}=-1$
- **ii.** $z\in R$ ή $z\in I$
- **iii.** $|z|=1$
- **iv.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|(3i-4)x^2-x^2z\right|-x\,f(x)}{\eta\mu x+x}=+\infty$

Δ. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in[1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\frac{2}{x_o}$.

Θέμα 8ο

Έστω η συνάρτηση f, με $D_f = f(D_f) = [1,4]$, δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,4]$. Έστω, επίσης, η συνάρτηση g με $g(x) = \ln x + 4x - 1$.

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Β. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) + 4x^2 \geq 4(x+2)^2$

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [1,4]$ ώστε: $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{f(\xi)}{\xi}}\right) = \xi - f(\xi)$.

Δ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1) = 4f(4)$

- **i.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (1,4)$, τέτοιο ώστε: $f'(x_o) = -f(4)$.
- **ii.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (1,4)$ ώστε: $\rho f(\rho)\left[f(\rho) + \rho f'(\rho)\right] = 0$.
- **iii.** Να βρείτε τα $f(1)$ και $f(4)$.
- **iv.** Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,4)$ τέτοια ώστε: $f'(x_1) + 2f'(x_2) = -3$.

Θέμα 9ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:

$f(x) + 2f(1-x) + 3f(x-1) = 12x$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in [-1,1]$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = 0$.

Β. Να δείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = 1$

Δ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $\left[e^{f(\xi)} + 2f(\xi)\right] f'(\xi) = e \cdot f'(\xi)$

Θέμα 10ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύει:

$$\int_1^x \left[f(t)(t-\ln t)\right]dt=\frac{x^2-1}{2}$$ (**1**), για κάθε $x>0$.

Δίνεται, επίσης, η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

i. Να δείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & , x>0\\ 0 & , x=0\end{cases}$

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης:

$$e^{\frac{x}{x-\ln x}+1}=e^{\frac{e}{e-1}}$$

iii. Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx<(x_2-x_1)\cdot F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$, για κάθε x_1, x_2 με $e<x_1<x_2$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $\int_e^{x^2+e} f(t)\,dt-x^2<\int_e^{2e} f(t)\,dt-e$.

v. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)\int_0^{\xi} f(t)\,dt=f(\xi)\cdot(1-f(\xi)).$$

Θέμα 11ο

Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύουν:

- (**1**): $(x-1)^{2015} \int_{10}^{|z|} f(t)\, dt \le \int_{|z|+1}^{x+|z|} |z| \cdot f(t-|z|)\, dt - x + 1$, για κάθε $x \in R$ και με $z \in C$.
- (**2**): $2f(x) \ge 1 + f(2)$, για κάθε $x \in R$.
- (**3**): Η γραφική παράσταση της f, C_f, τέμνει την ευθεία $y=1$ στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$.

i. Να αποδείξετε ότι: $|z| = 1$.

ii. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^{2015} \in I$.

iii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = |z^2 + z - 2|$.

iv. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f' δέχεται τουλάχιστον μία εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ με τετμημένη $\xi \in (1,2)$.

Θέμα 12^{o}

Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη και κυρτή στο R.

Δίνονται επίσης οι συναρτήσεις f, h με πεδίο ορισμού το R για τις οποίες ισχύει:

- $f(x) = g(x) + 2e^{x-1} - \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{3}$
- $h(x) = 2e^{x-1} - x^2 - 2$

A. Να δείξετε ότι:

i. η h είναι γνησίως αύξουσα.

ii. το πεδίο ορισμού της $K(x) = \int_{h'(x)}^{\int_1^x h(t)dt + x} e^{\frac{1}{t+1}} dt$ είναι το R.

B. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - \sqrt{x^2+3}}{x-1} = -\frac{1}{2}$

i. Να βρείτε τα $g(1)$ και $g'(1)$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

iii. Να δείξετε ότι $f(2) + f(0) > 4$ και ότι $f(x+2) - f(x) > -2$ για κάθε $x > 1$.

Θέμα 13ο

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $|z-1|^2+|z+1|^2=4$ **(1)**.

Α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Β. Έστω ο μιγαδικός $u=\frac{1-2z}{z-2}$, όπου z μιγαδικός που ικανοποιεί την **(1)**.

i. Να δείξετε ότι οι εικόνες του u κινούνται στο μοναδιαίο κύκλο.

ii. Αν $z=x+yi$ να δείξετε ότι $|z-u|=2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}$, με $-1\le x\le 1$.

iii. Να βρείτε τους z_o, u_o για τους οποίους το μέτρο $|z-u|$ γίνεται μέγιστο.

Γ. Για το μιγαδικό z που ικανοποιεί την **(1)** να δείξετε ότι:

i. $\bar{z}=\frac{1}{z}$

ii. $|z^2+z+3|=|3z^2+z+1|$

Δ. Έστω ο μιγαδικός $w=z+\frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός που ικανοποιεί την **(1)**.

i. Να δείξετε ότι καθώς η εικόνα του z κινείται στο μοναδιαίο κύκλο, η εικόνα του w κινείται σε έλλειψη.

ii. Να αποδείξετε ότι αν $w\in R$ τότε και $z\in R$.

iii. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z και w, καθώς κινούνται στον κύκλο και στην έλλειψη αντίστοιχα, βρίσκονται σε σταθερή απόσταση.

Θέμα 14ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση g, με $D_g = R$, για την οποία ισχύει ότι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in R$.

Δίνεται, επίσης, η συνάρτηση f με $f(x) = \int_1^{x+3} \left(\int_2^{u+\alpha} g(t)\, dt \right) du$, με $x \in R$ και $\alpha \in R$.

Α. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq \int_1^3 \left(\int_2^{u+\alpha} g(t)\, dt \right) du$ να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α.

Β. Για $\alpha = -1$, να δειχθεί ότι:

i. η f είναι κυρτή

ii. η f έχει ακριβώς δύο ρίζες

iii. $\int_2^{x+3} g(t)dt > \int_{x+3}^{x+4} \left(\int_2^{u-1} g(t)dt \right) du$

Γ. Έστω η συνάρτηση $h(x) = x(4-x)g(x)$. Αν E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, του $x'x$, του $y'y$ και της κατακόρυφης ευθείας $x = -2$ και E_2 το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_h, του $x'x$ και των κατακόρυφων ευθειών $x = 0$ και $x = 2$, να δειχθεί ότι $2E_1 = E_2$.

Θέμα 15ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 4x + 1$

Α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα.

Γ. Να δείξετε ότι $f^{-1}\left(e^x + x^2 - x\right) \geq 0$, για κάθε $x \in R$

Δ. Έστω οι μιγαδικοί $z \in C$ για τους οποίους ισχύει $|z-5|^3 \leq \int_1^7 \left[f^{-1}(x) - \frac{1}{12} \right] dx - 2|z-5|$ **(1)**.

i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^7 f^{-1}(x)dx$

ii. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z ανήκουν σε κυκλικό δίσκο.

iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z οι οποίοι, εκτός από τη σχέση **(1)**, ικανοποιούν και τη σχέση $f^{-1}\left(\left| \frac{2z-i}{2z+i} \right| \right) = 0$.

Θέμα 16ο

Έστω f συνεχής συνάρτηση με $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει η σχέση $f(x)=e-\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt,$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Α.

i. Να δείξετε ότι η $g(x)=e^{-\frac{1}{x}}f(x)$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Β. Να δείξετε ότι $\sqrt{e}<\int_1^2 f(x)dx<e$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\int_1^2 f(t)dt=e^{\frac{1}{\xi}}$.

Δ. Έστω, επίσης, συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι: $g(1)=0$, $g'(1)=e$ και

$$g'(x)=g(x)+\int_0^x \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+t^2}dt,$$ για κάθε $x>0$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $g(x)=e^x\ln x$

ii. η εξίσωση $g^2(x)=g'(x)\int_x^e g(t)dt$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.

Θέμα 17^{ο}

Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f'' γνησίως φθίνουσα στο R.

Επιπλέον ισχύει ότι:

- $f(2-x)+f(2+x)=2f(2)$, για κάθε $x\in[-2,2]$
- $f(0)=f(4)$ και $f'(2)=-f'(4)=1$

Α.

i. Να βρεθεί η κυρτότητα της f.

ii. Να δειχθεί ότι: $f(x)>-x+f(0)$, για κάθε $x\in(0,1]$

και $f(x)>x-2+f(2)$, για κάθε $x\in[1,2)$

Β. Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει ακριβώς μία θέση τοπικού ελαχίστου και ακριβώς μία θέση τοπικού μεγίστου.

Γ. Έστω το χωρίο Ω που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ευθείας (ε): $y=f(2)$. Να δειχθεί ότι:

i. $\mathrm{E}(\Omega)=2\int_0^2\left(f(2)-f(x)\right)dx$

ii. $\mathrm{E}(\Omega)<2$

Θέμα 18ο

Έστω $z_1,\ z_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+\alpha z+1=0$ με $\alpha\in(-2,2)$ και $w\in C$ με $w\neq -2i$.

Ισχύει ότι $z_1(w+2i)^{2015}+z_2(\overline{w}-2i)^{2014}=0$.

Α. Αν $\kappa=z_1(w+2i)+z_2(\overline{w}-2i)$ τότε να δείξετε ότι $\kappa\in R$.

Β. Να υπολογίσετε την παράσταση $\mathrm{A}=|z_1|(w+2i)^{2014}+|z_2|(iw-2)^{2014}$

Γ. Να δείξετε ότι $|w+2i|=1$ και $w+2i=\dfrac{1}{\overline{w}-2i}$

Δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών: $\overline{w}+1-3i$ και $i\overline{w}+1821$

Ε. Αν $u=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$, να δείξετε ότι $u=\alpha^2-2$.

ΣΤ. Αν $v=z_1^{\,2}(wi-2)^{4029}$, να δείξετε ότι:

- **i.** $v=-i$
- **ii.** $|w+uv|\leq 1+\alpha^2$

Θέμα 19ο

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $|z-i|=|\mathrm{Im}(z)+1|$ **(1)**.

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης C που είναι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $\mathrm{N}(z)$.

Β. Έστω επίσης μιγαδικός w για τον οποίο ισχύει $|w^2-2iw-1|+|w^2+2iw-1|=2|w^2+1|$ **(2)**.

- **i.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας μιγαδικός που ικανοποιεί τις σχέσεις **(1)** και **(2)**.

Γ. Να αποδειχθεί ότι από το σημείο $\mathrm{M}(\alpha,-1)$, με $\alpha\in R$, άγονται πάντα δύο εφαπτομένες προς τη C, κάθετες μεταξύ τους.

Δ. Έστω ότι τα σημεία επαφής, των εφαπτόμενων ευθειών $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ με την C, είναι τα $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη C χωρίζει το τρίγωνο ABM σε λόγο εμβαδού 2 προς 1.

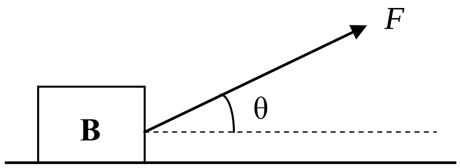
Ε. Να βρεθεί το α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABM να γίνεται ελάχιστο.

Θέμα 20ο

Σώμα βάρους Β μετακινείται σε οριζόντιο επίπεδο με τη βοήθεια ενός τεντωμένου σχοινιού που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο.

Μια μεταβαλλόμενη δύναμη F που ασκείται στο σώμα μέσω του σχοινιού έχει μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$F(\theta)=\dfrac{\mu\cdot \mathrm{B}}{\sigma\upsilon\nu\theta+\mu\cdot\eta\mu\theta}$, όπου $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$



και μ μια θετική σταθερά ανεξάρτητη από τη γωνία θ.

Α. Να αποδείξετε ότι η δύναμη F γίνεται ελάχιστη όταν η γωνία θ αποκτά τιμή ώστε να ισχύει $\varepsilon\varphi\theta=\mu$.

Β. Έστω ότι η γωνία θ τη χρονική στιγμή t_o αυξάνει με ρυθμό $0,2\ rad/\sec$ και η σταθερά μ την ίδια χρονική στιγμή αυξάνει με ρυθμό $0,4\ /\sec$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η γωνία θ, τη χρονική στιγμή t_o, ώστε να ελαχιστοποιείται η δύναμη F.

Γ. Έστω ότι για την προηγούμενη συνάρτηση $F(\theta)$ ισχύει ότι $\mu=\sqrt{3}$.

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta)d\theta > \pi\cdot \mathrm{B}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$