ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ.

(ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ, 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση και $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ ένα σημείο της C_f. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A;

Μονάδες 5

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ΄ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

Α3. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f σ΄ ένα διάστημα $[a,\ \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a,\ \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 7

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων Ο.

Μονάδες 2

β) Κάθε στοιχείο z του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z=a+\beta i$, όπου $a,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

γ) Η εικόνα $f\left(\Delta\right)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

δ) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A, τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο A.

Μονάδες 2

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx=\int_a^\gamma f(x)dx-\int_\beta^\gamma f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z,\ w,\ v$ με $z\neq -2015i$, $|w|=1$ και $w\neq -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ για τους οποίους ισχύει:

$$\left|\frac{z-2015i}{z+2015i}\right|=1 \quad (1) \qquad v=\frac{w-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w} \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

Β1. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5

Β2. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών v στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών.

Μονάδες 8

Β3. Ο μιγαδικός αριθμός $u=(a-ai)^{2024}$, με $a\in\mathbb{R}$, ικανοποιεί τη σχέση (1).

Μονάδες 6

Να βρείτε:

Β4. Την καμπύλη στην οποία ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z+v$ στο μιγαδικό επιπέδο, όπου οι μιγαδικοί αριθμοί z, v των ερωτημάτων (Β1) και (Β2) αντίστοιχα, ικανοποιούν τη σχέση $z^2+\frac{v^2}{2}=9$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, \text{ αν } x\neq 0,\ x\neq 1 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq -1\\ \kappa,\ \alpha\nu\ x=1\\ 0, \text{ αν } x=0\end{cases} \qquad g(x)=f(x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x>0$$

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Μονάδες 6

Γ2. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1}\leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}, \text{ αν } x>1$$

και

$$e^{-x^2+1}\geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}, \text{ αν } 0<x<1$$

Μονάδες 4

Γ3. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $(0,\ +\infty)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A(2,\ g(2))$ και $B(1,\ g(1))$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}\left(7-3x\right)\leq e^{-x^2}\left(x-1\right),\text{ για κάθε } x\in\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2}\geq e^{-1},\text{ για κάθε } x\in\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\int_x^{2x}\frac{1+\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{t^4-t^2+4}}dt,\ x\in\mathbb{R}$ και η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$\int_0^x g\left(t\right)dt\leq e^{2015x}+x^5-1 \quad (1),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή .

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi\right)=0$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$g(0)=f'(0)+2014$$

Μονάδες 4

Δ4. i) Αν για τη συνάρτηση g ισχύουν επιπλέον:

$$g\left(1008\right)=3023 \text{ και } g\left(2016\right)=4031$$

και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0,\ 2016\right)$ τέτοιο, ώστε $g''\left(x_0\right)=0$

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Μονάδες 3

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο**.**

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.

5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

7. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών