

**ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2013-2014**

*Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης – Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συλλογή των θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων στη Α΄τάξη του Γενικού Λυκείου αποτελεί συνέχεια παρόμοιας προσπάθειας που έγινε κατά τα προηγούμενα δύο σχολικά έτη. Τα θέματα προέρχονται από Λύκεια του Νομού Δωδεκανήσου. Τα θέματα επιλέχθηκαν αφενός με βάση το τεχνικό κριτήριο της δυνατότητας επεξεργασίας και αφετέρου το κριτήριο της λιγότερης παρέμβασης. Όμως φέτος τα θέματα που παραθέτουμε έχουν υποστεί, στο μέτρο του δυνατού, αξιολόγηση ως προς:

- A.** Το υφιστάμενο νομικό πλαίσιο επιλογής και διάρθρωσης των θεμάτων,
- B.** Το περιεχόμενο τους καθώς και την επιστημονική τους ορθότητα ,
- Γ.** Την διαβαθμισμένη δυσκολία τους ,
- Δ.** Την αισθητική τους καθώς και την ηλεκτρονική τους σελιδοποίηση,
- Ε.** Την φιλολογική τους επιμέλεια.

Έτσι , πολλά από τα θέματα που ακολουθούν, έχουν υποστεί κάποιας μορφής «παρέμβαση» , χωρίς ωστόσο να αλλοιωθεί ο χαρακτήρας και η δομή τους.

Παραδίδουμε λοιπόν στους αγαπητούς μαθητές μας και στους αξιόμαχους συναδέλφους μας μαθηματικούς, αλλά και σε όποιον ενδιαφέρεται για την μαθηματική εκπαίδευση, το υλικό που ακολουθεί και ελπίζουμε να τους βοηθήσει.

Μάρτιος 2015

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Δωδεκανήσου

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Κάθε τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες είναι παραλληλόγραμμο.
- β.** Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι πάντοτε ίσα.
- γ.** Δύο χορδές κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- δ.** Η απόσταση του βαρύκεντρου ενός τριγώνου από κάθε κορυφή του ισούται με το  $\frac{1}{3}$  του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.
- ε.** Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο.

**(Μονάδες 2x5= 10)**

- B.** Να αποδείξετε ότι:

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

**(Μονάδες 15).**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $AN = ΚΓ$ .

- A.** Να αποδείξετε ότι:

**i.** τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα

**(Μονάδες 8)**

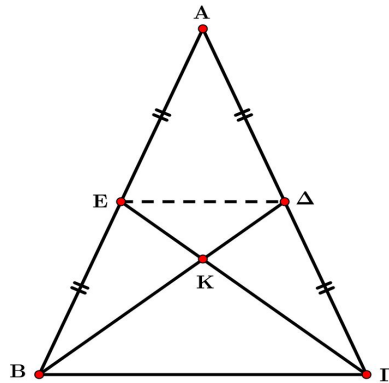
**ii.** το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο.

**(Μονάδες 8)**

- B.** Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΝΔ και ΔΚ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο.

**(Μονάδες 9)**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**



Στο παραπάνω σχήμα στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), φέρνουμε τις διαμέσους  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που τέμνονται στο σημείο  $K$ . Να αποδείξετε ότι:

**A.**  $B\Delta = \Gamma E$

(Μονάδες 10)

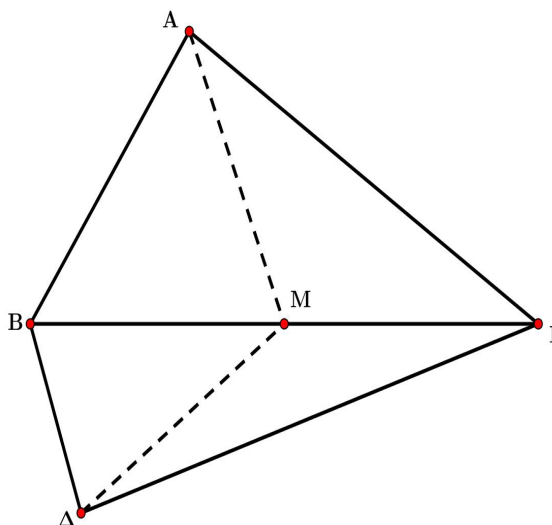
**B.** Το τρίγωνο  $E\kappa\Delta$  είναι ισοσκελές

(Μονάδες 10)

**Γ.**  $B\Gamma = 2\Delta E$

(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**



Στο παραπάνω σχήμα δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΑΒΓ$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $ΔΒΓ$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ )

(όπου  $A$  και  $\Delta$  εκατέρωθεν της  $BΓ$ ) και το μέσο  $M$  της  $BΓ$ . Να αποδείξετε ότι:

**A.** Το τρίγωνο  $ΑΜΔ$  είναι ισοσκελές.

**(Μονάδες 9)**

**B.**  $\widehat{ΑΜΔ} = 2\widehat{ΑΓΔ}$

**(Μονάδες 9)**

**Γ.**  $\widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΓΑΔ}$

**(Μονάδες 7)**

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α. Τραπεζίο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντί του πλευρές παράλληλες.
  - β. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
  - γ. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας.
  - δ. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.
  - ε. Αν δυο τρίγωνα έχουν ίσες τις γωνίες τους μια προς μια είναι ίσα

(Μονάδες 5x2=10)

- B. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές.

(Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ 2

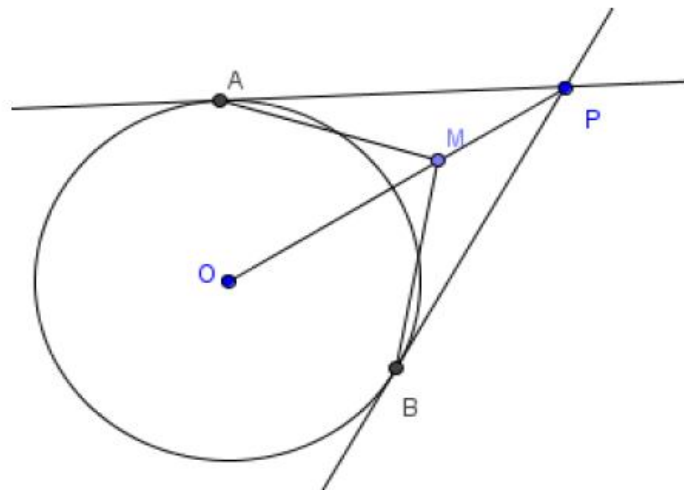
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες  $\widehat{MAO}$  και  $\widehat{MBO}$  είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB < AG$ ), το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε, Ζ, και Η των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**A.**  $DE = \frac{AB}{2}$ .

**(Μονάδες 8)**

**B.**  $ZH = \frac{AB}{2}$ .

**(Μονάδες 8)**

**Γ.** το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**(Μονάδες 9)**

### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

**Π1:** Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

**Π2:** Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> :

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Δύο τρίγωνα ABΓ και Α΄Β΄Γ΄ δεν είναι απαραίτητα ίσα όταν  $\alpha=\alpha'$  ,  $\beta=\beta'$  και  $\overline{\Gamma\Gamma'} = \overline{\Gamma\Gamma'}$  .
- β.** Δύο χορδές δύο ίσων κύκλων είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- γ.** Αν ένας ρόμβος έχει ίσες διαγωνίους τότε είναι τετράγωνο.
- δ.** Η διάμεσος τραπέζιου είναι ίση με την ημιδιαφορά των βάσεων.
- ε.** Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου.

**(Μονάδες 5x2=10)**

**B.** Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

**(Μονάδες 15)**

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με AB//ΓΔ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία  $\hat{\Gamma} = 110^\circ$  και η γωνία  $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\Lambda\hat{\Delta}B$  .

**(Μονάδες 25)**

#### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ΑΔ το ύψος του. Αν Ε, Η, Ζ τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τότε να δείξετε ότι :

**A.** ΕΖ// ΒΓ

**(Μονάδες 8)**

**B.**  $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$

**(Μονάδες 8)**

**Γ.** το ΕΖΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**(Μονάδες 9)**



**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  και ΑΓ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές ΑΔ=ΒΓ .

Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

**Α.** Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες .

**(Μονάδες 6)**

**Β.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

**(Μονάδες 6)**

**Γ.** Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

**(Μονάδες 7)**

**Δ.** Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .

**(Μονάδες 6)**

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

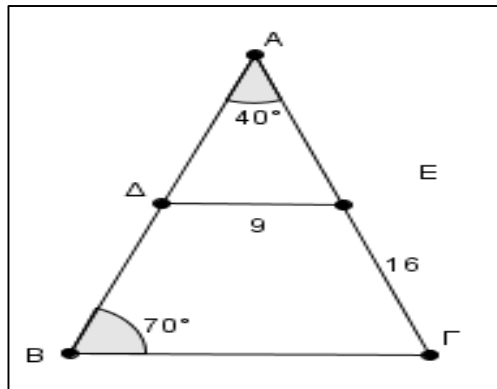
- α.** Δύο παραπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα  $180^\circ$ .
- β.** Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- γ.** Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία γωνία ορθή.
- δ.** Οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών και μίας τέμνουσας είναι παραπληρωματικές.
- ε.** Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

(Μονάδες  $5 \times 2 = 10$ )

**B.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$

(Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>



Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=40^\circ$  και  $\hat{B}=70^\circ$ , όπως στο παραπάνω σχήμα. Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$

είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  με  $\Delta E=9$  και  $E\Gamma=16$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

**(Μονάδες 8)**

**B.** Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma=18$ .

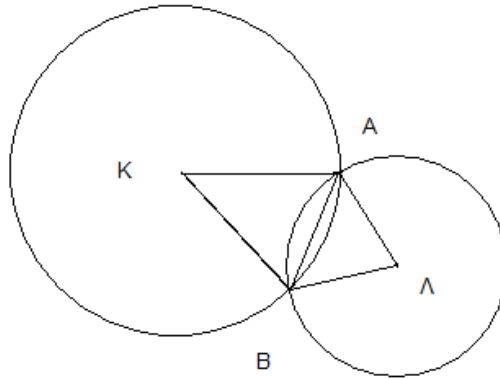
**(Μονάδες 8)**

**Γ.** Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**(Μονάδες 9)**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Στο επόμενο σχήμα οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $B$ .



**A.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AK\Lambda$  και  $K\Lambda B$  είναι ίσα.

**(Μονάδες 10)**

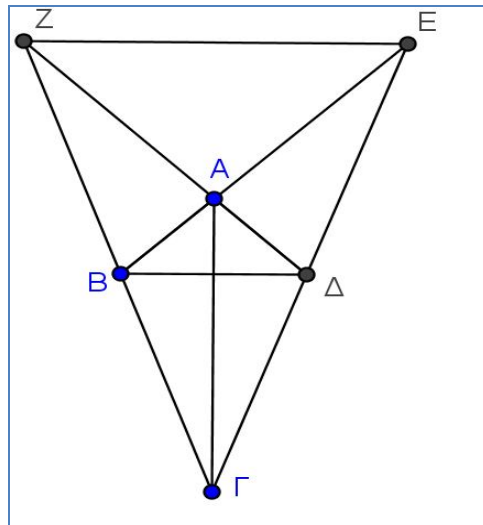
**B.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AKB$  και  $\Lambda B$  είναι ισοσκελή.

**(Μονάδες 10)**

**Γ.** Αν  $M$  είναι το μέσο της χορδής  $AB$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $K$ ,  $\Lambda$  και  $M$  είναι συνευθειακά.

**(Μονάδες 5)**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**



Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = A\Delta$  και  $\Gamma B = \Gamma\Delta$ , όπως στο παραπάνω σχήμα. Αν  $E$  το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $BA$  και  $\Gamma\Delta$  και  $Z$  το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $\Delta A$  και  $\Gamma B$  να αποδείξετε ότι:

**A.** Η  $\Gamma A$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 7)

**B.**  $\Gamma Z = \Gamma E$

(Μονάδες 9)

**Γ.**  $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

**β.** Οι κύκλοι  $(K, \rho)$  και  $(L, R)$  βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν  $\delta > R + \rho$ , όπου  $\delta$  η διάκεντρός τους.

**γ.** Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με την υποτείνουσα.

**δ.** Οι διαγώνιοι του παραλληλόγραμμου είναι ίσοι.

**ε.** Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημίάθροισμά τους.

**(Μονάδες 5x2= 10)**

**B.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές.

**(Μονάδες 15)**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Έστω  $A\chi$  η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας  $\widehat{A_{εξ}} = 120^\circ$ . Από την κορυφή  $B$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην  $A\chi$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο.

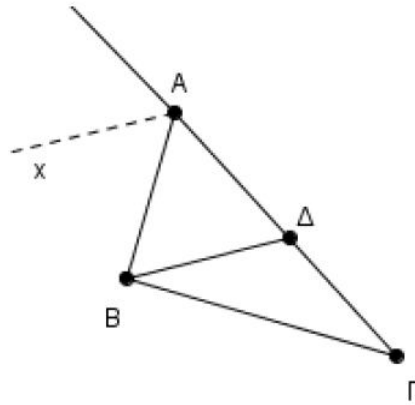
(Μονάδες 10)

ii.  $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$

(Μονάδες 5)

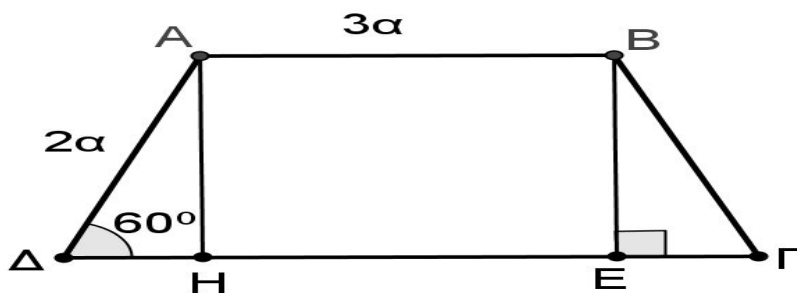
**β)** Αν η γωνία  $\widehat{B\Delta A}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 10)



### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) με ΑΒ<ΔΓ και τα ύψη του ΑΗ, ΒΕ, όπως στο επόμενο σχήμα.



Αν η γωνία  $\hat{\Delta} = 60^{\circ}$ ,  $ΑΔ = 2\alpha$  και  $ΑΒ = 3\alpha$ , τότε:

**A.** Να αποδείξετε ότι  $ΔΗ = ΓΕ = \alpha$ .

(Μονάδες 8)

**B.** Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπέζιου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 9)

**Γ.** Να υπολογίσετε την διάμεσο του τραπέζιου ΚΖ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του  $AM$  και σε τυχαίο σημείο  $K$  αυτής φέρουμε κάθετη στην  $AM$  η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Αν  $H$  είναι το μέσο του  $\Delta E$  να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{B} = \hat{B}\hat{A}M$ . (Μονάδες 8)

β)  $A\hat{\Delta}H = \hat{\Delta}\hat{A}H$ . (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία  $AH$  τέμνει κάθετα τη  $B\Gamma$ . (Μονάδες 8)

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
- β. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι πάντα ίσες.
- γ. Η διάμεσος του τραπέζιου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων.
- δ. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- ε. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες είναι ίσα.

(Μονάδες  $5 \times 2 = 10$ )

**B.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι δύο ορθές.

(Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ 2

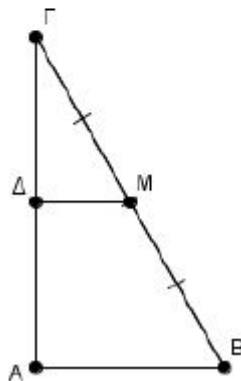
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με γωνία  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην  $AB$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε

I. τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 7)

II. τις γωνίες του τριγώνου  $AM\Gamma$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $M\Delta$  είναι μεσοκάθετος του  $A\Gamma$ . (Μονάδες 9)





### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία  $\hat{A}$  ίση με  $120^\circ$  και σημείο Ε μέσο του ΑΒ και ΔΕ διχοτόμος της γωνίας Δ.

Να δείξετε ότι :

Α. Η γωνία  $\hat{D}$  είναι ίση με  $60^\circ$

(Μονάδες 6)

Β. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 6)

Γ.  $\Delta\Gamma=2\Delta\Delta$

(Μονάδες 6)

Δ. Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΕΚ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ να δείξετε ότι

$$\frac{\Delta\text{E}}{\text{E}\text{K}} = 2$$

(Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΜ το ύψος του στην πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα ΜΝ=ΑΜ . Στην προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα ΓΔ =ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ ρόμβος.

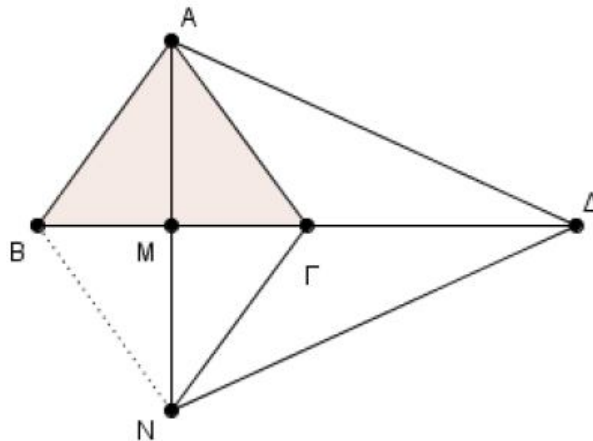
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ.

(Μονάδες 9)



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Κάθε διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και ύψος.

(Μονάδες 2)

**β.** Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

(Μονάδες 2)

**γ.** Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

(Μονάδες 2)

**δ.** Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

(Μονάδες 2)

**ε.** Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της.

(Μονάδες 2)

**B.** Να αποδείξετε ότι:

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

(Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε την παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ .

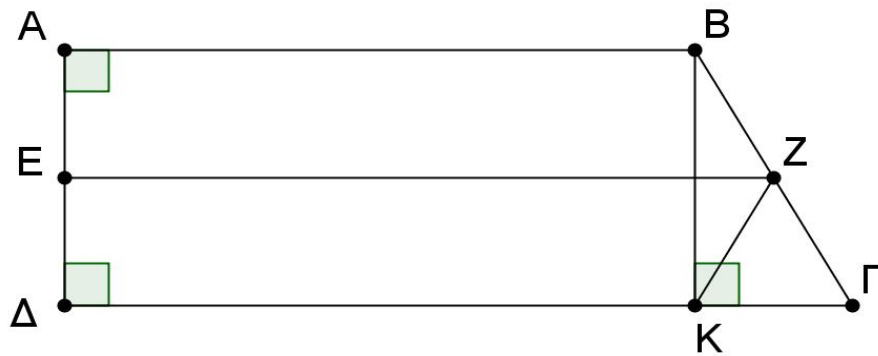
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\Delta E$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία  $\hat{B}$  είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $E\hat{\Delta}\Gamma$ .

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**



Δίνεται το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = 120^\circ$ .

Αν  $AB = 2B\Gamma$ , το  $BK$  είναι το ύψος του τραπέζιου και  $EZ$  είναι η διάμεσος του τραπέζιου τότε:

**A.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KZ\Gamma$  είναι ισόπλευρο.

**(Μονάδες 9)**

**B.** Να αποδείξετε ότι  $\Delta\Gamma = \frac{5}{2}B\Gamma$ .

**(Μονάδες 8)**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι  $EZ = \frac{9}{4}B\Gamma$ .

**(Μονάδες 8)**

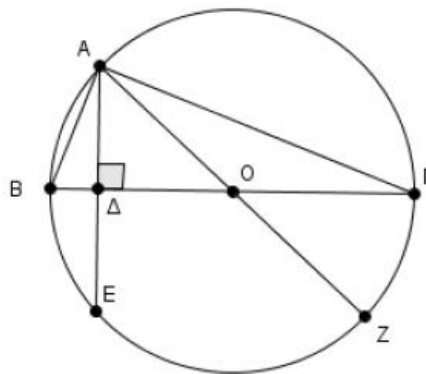
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος  $(O,R)$  με διάμετρο  $BΓ$ . Θεωρούμε σημείο  $A$  του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο  $ABΓ$ . Η προέκταση της  $AO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $Z$ . Φέρουμε το ύψος του  $AΔ$ , η προέκτασή του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i.  $ZΓ=AB=BE$  (Μονάδες 8)
- ii. Το τετράπλευρο  $BEZΓ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

β) Αν  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπέζιου  $BEZΓ$  είναι ίση με  $5R$ , όπου  $R$  η ακτίνα του κύκλου. (Μονάδες 10)



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

**β.** Η κοινή χορδή δύο τυχαίων τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου των δύο κύκλων.

**γ.** Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

**δ.** Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

**ε.** Κάθε τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

**(Μονάδες 2x5= 10)**

**B.** Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες μεταξύ τους.

**(Μονάδες 15)**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Εστω  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε, η διχοτόμος  $\Delta E$  της γωνίας  $A\hat{\Delta}B$  να είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**(Μονάδες 10)**

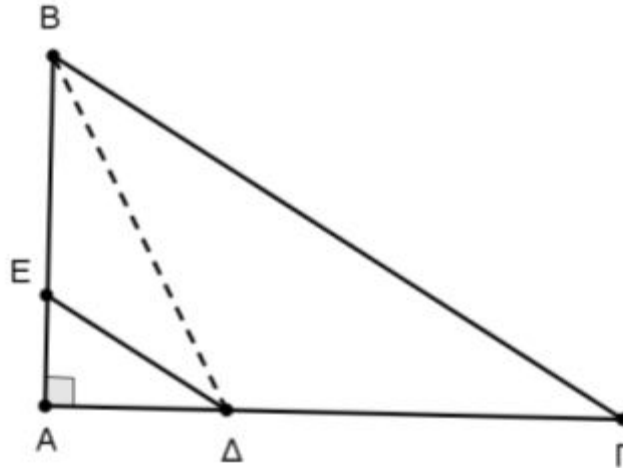
**β)** Αν  $A\hat{\Delta}B = 60^\circ$ ,

**I.** να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\Gamma}$ .

**(Μονάδες 8)**

**II.** Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 2AB$

**(Μονάδες 7)**



### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με υποτείνουσα  $B\Gamma$ . Φέρνουμε τη διάμεσο  $AM$ , το ύψος  $AK$  και τη διχοτόμο  $A\Delta$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**(Μονάδες 8)**

**B.** Να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $MA\Gamma$  και  $KAB$  είναι ίσες.

**(Μονάδες 8)**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι η  $A\Delta$  διχοτομεί τη γωνία  $MAK$ .

**(Μονάδες 9)**

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Delta A$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $\Delta A$  (προς την πλευρά του  $A$ ) κατά τμήμα  $AN = \frac{\Delta A}{2}$ . Φέρνουμε τα τμήματα  $\Gamma M$  και  $BN$  και θεωρούμε τα μέσα τους  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τετράπλευρο  $MNB\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

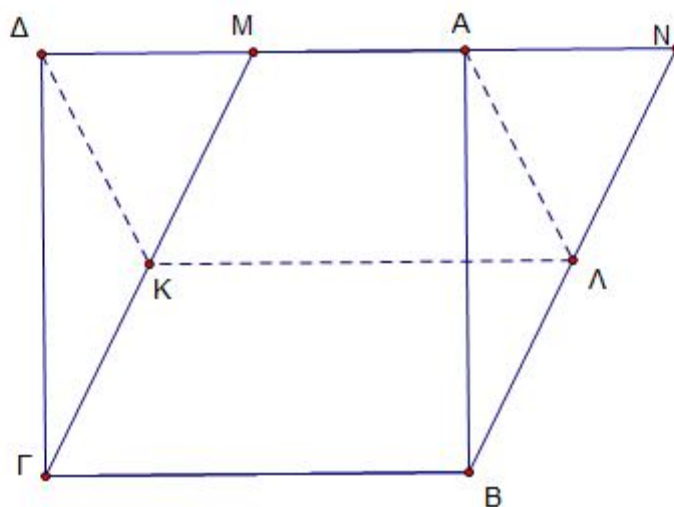
**(Μονάδες 8)**

**β)** Το τετράπλευρο  $A\Delta K\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο.

**(Μονάδες 9)**

**γ)** Το τετράπλευρο  $AMK\Lambda$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**(Μονάδες 8)**



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα.

**β.** Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

**γ.** Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

**δ.** Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες παραπληρωματικές.

**ε.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^{\circ}$ , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

**(Μονάδες 5x2=10)**

**B.** Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

**(Μονάδες 15)**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  παράλληλη στη  $B\Gamma$  (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AM$  με το σημείο  $\Gamma$ ).

Να αποδείξετε ότι:

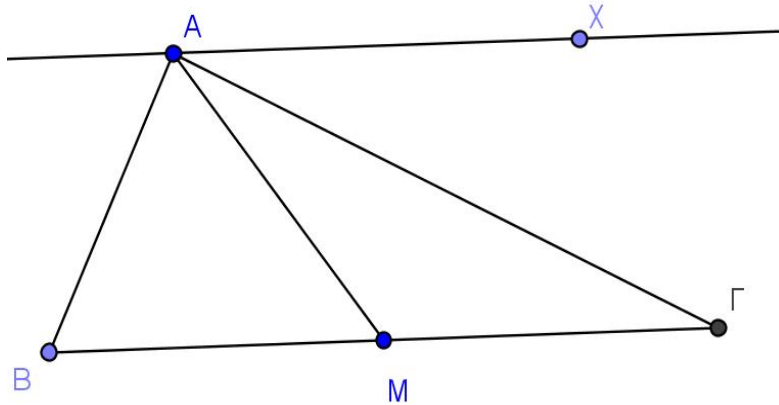
**α)**  $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$

**(Μονάδες 12)**

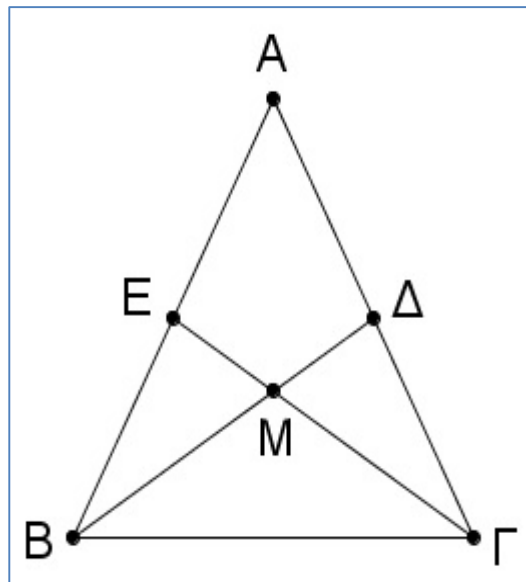
**β)** η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{M}Ax$ .

**(Μονάδες 13)**





**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), όπως στο παραπάνω σχήμα, και οι διάμεσοι  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$ , που τέμνονται στο σημείο  $M$ . Να αποδείξετε ότι:

**A.** Τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\epsilon \Gamma$  είναι ίσα.

**(Μονάδες 9)**

**B.** Οι γωνίες  $\hat{B}\epsilon \Gamma$  και  $\hat{B}\Delta \Gamma$  είναι ίσες.

**(Μονάδες 7)**

**Γ.** Τα τρίγωνα  $MEB$  και  $M\Delta \Gamma$  είναι ίσα.

**(Μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Delta\Gamma$ ) με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και  $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ .

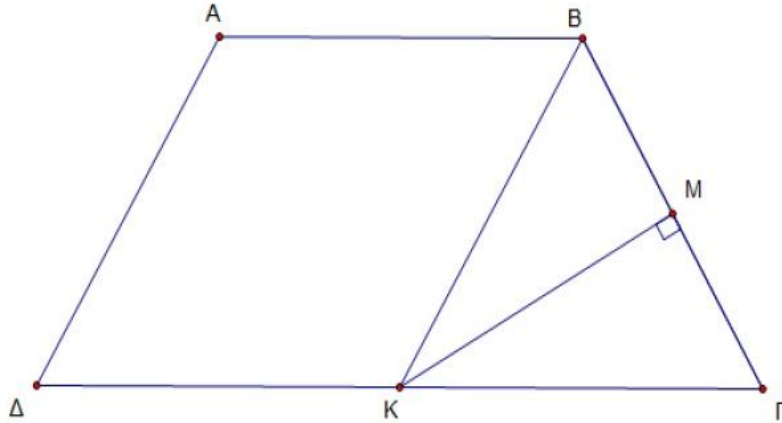
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{B}$ , η οποία τέμνει το  $\Delta\Gamma$  στο  $K$  και η κάθετη από το  $K$  προς το  $B\Gamma$  το τέμνει στο  $M$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο  $ABK\Delta$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ . (Μονάδες 7)



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

### ΘΕΜΑ 1ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου περνά από τις κορυφές του.
- β. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή
- γ. Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των φορέων των υψών του.
- δ. Σε ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι είναι πάντα ίσες.
- ε. Οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

(Μονάδες  $2 \times 5 = 10$ )

B. Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας του  $\hat{\Gamma}$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

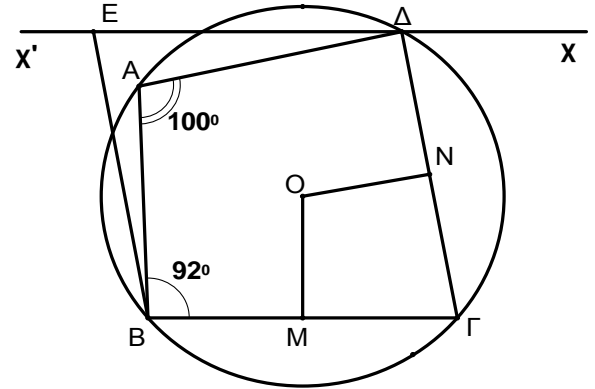
- α) Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)
- β) Η ευθεία  $\Gamma\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AE$ . (Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, \rho)$  και  $OM, ON$  τα αποστήματα των χορδών  $B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, έτσι ώστε  $OM = ON$ .

Δίνεται επίσης ότι  $\widehat{A} = 100^\circ$  και  $\widehat{AB\Gamma} = 92^\circ$ .

Μια ευθεία  $x'x$  διέρχεται από το  $\Delta$  έτσι ώστε  $\widehat{\Gamma\Delta x} = 80^\circ$  και φέρνουμε  $BE \parallel \Gamma\Delta$ .



**A.** Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{\Gamma}$ ,  $\widehat{\Gamma\Delta\Lambda}$ .

**(Μονάδες 8)**

**B.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma B\Delta$  είναι ισοσκελές.

**(Μονάδες 8)**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $B\Gamma\Delta E$  είναι ρόμβος.

**(Μονάδες 9)**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  ονομάζουμε  $O$  το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο  $E$  του τμήματος  $OD$ . Φέρνουμε την κάθετη από το  $B$  στην  $AE$ , που τέμνει το τμήμα  $AO$  στο  $Z$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες  $\omega$  και  $\phi$  του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

**(Μονάδες 6)**

β)  $BZ = AE$  και  $\Gamma Z = BE$

**(Μονάδες 12)**

γ) Το τμήμα  $EZ$  είναι κάθετο στο  $AB$ .

**(Μονάδες 7)**

