

ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2013-2014

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης –Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συλλογή των θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων στη Β΄τάξη του Γενικού Λυκείου αποτελεί συνέχεια παρόμοιας προσπάθειας που έγινε κατά τα προηγούμενα δύο σχολικά έτη. Τα θέματα προέρχονται από Λύκεια του Νομού Δωδεκανήσου. Τα θέματα επιλέχθηκαν αφενός με βάση το τεχνικό κριτήριο της δυνατότητας επεξεργασίας και αφετέρου το κριτήριο της λιγότερης παρέμβασης. Όμως φέτος τα θέματα που παραθέτουμε έχουν υποστεί, στο μέτρο του δυνατού, αξιολόγηση ως προς:

- A.** Το υφιστάμενο νομικό πλαίσιο επιλογής και διάρθρωσης των θεμάτων,
- B.** Το περιεχόμενο τους καθώς και την επιστημονική τους ορθότητα ,
- Γ.** Την διαβαθμισμένη δυσκολία τους ,
- Δ.** Την αισθητική τους καθώς και την ηλεκτρονική τους σελιδοποίηση,
- Ε.** Την φιλολογική τους επιμέλεια.

Έτσι , πολλά από τα θέματα που ακολουθούν, έχουν υποστεί κάποιας μορφής «παρέμβαση» , χωρίς ωστόσο να αλλοιωθεί ο χαρακτήρας και η δομή τους.

Παραδίδουμε λοιπόν στους αγαπητούς μαθητές μας και στους αξιόμαχους συναδέλφους μας μαθηματικούς, αλλά και σε όποιον ενδιαφέρεται για την μαθηματική εκπαίδευση, το υλικό που ακολουθεί και ελπίζουμε να τους βοηθήσει.

Μάρτιος 2015

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Δωδεκανήσου

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ναδειχθεί ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

(Μονάδες 9)

B. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της πρώτης στήλης του διπλανού πίνακα με τις λύσεις της που βρίσκονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα.

Στήλη 1 ^η ΕΞΙΣΩΣΗ	Στήλη 2 ^η ΛΥΣΕΙΣ
α) $\eta\mu x = \eta\mu\theta$	1) $x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$
β) $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$	2) $\begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + (\pi - \theta) \end{cases} k \in \mathbb{Z}$
γ) $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta$	3) $\begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

(Μονάδες 6)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

β. Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο π .

γ. Ένα πολώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 1$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:

$$\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν $\sin x = -\frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, τότε:

A. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

(Μονάδες 8)

B. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{10\sin x - 12\cos x}{5\eta\mu x} .$$

(Μονάδες 4)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση : $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\upsilon\omega)\eta^2 = \frac{2}{5}K - 2\eta\mu\eta^2\omega$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 6$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$

A. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και $P(3) = 12$, να αποδείξετε ότι $a = 0$ και $\beta = -7$.

(Μονάδες 10)

B. Αν $a = 0$ και $\beta = -7$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3x-5)$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα

$x'x$

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 12)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Έστω πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.

Πότε λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα του $P(x)$;

(Μονάδες 5)

Β. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυώνυμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $v = P(\rho)$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sin(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$ έχει μέγιστο ρ , ελάχιστο $-\rho$ και περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} .$$

β. Αν $\theta \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \theta, k \in \mathbb{Z}$.

γ. Αν $0 < a < 1$ τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

δ. Αν $0 < x < \pi$ τότε $\eta\mu x > 0$.

ε. Σε οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$ η αριθμητική τιμή $P(0)$ είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sin(ax)$ με $a > 0$ που έχει περίοδο $T = 4$

Α. Να βρεθεί ο αριθμός a καθώς και η ελάχιστη τιμή της $f(x)$

(Μονάδες 10)

Β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + kx + 2$ με $k \in \mathbb{R}$

A. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον -2 να βρεθεί ο k

(Μονάδες 6)

B. Αν $k = -1$

B1. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

B2. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\alpha} - 8$ διέρχεται από το σημείο

$M(-3, -4)$

A. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 9)

B. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x} + 5e^x + f\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ 1°

A. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \rho$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, δηλαδή είναι $v = P(\rho)$.

(Μονάδες 10)

B. Αν $a, \theta \in \mathbb{R}$ με $a > 0$, $\theta > 0$ και $a \neq 1$, να ορίσετε το $\log_a \theta$.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\ln e = 1$

β. Αν $\eta\mu x = \eta\mu\theta$ τότε $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta$, $k \in \mathbb{Z}$.

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$, έχει περίοδο $T = \pi$.

δ. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

ε. Η συνάρτηση, $f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \kappa x^2 + \lambda x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

A. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 2, να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και $\lambda = -3$.

(Μονάδες 13)

B. Αν $\kappa = 3$ και $\lambda = -3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η γωνία x , με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $15\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x - 12 = 0$.

A. Να αποδείξετε ότι $\sin x = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 7)

B. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\sin\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + \sin(17\pi + x)}{3\epsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + 4\sigma\varphi\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)}$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση: $4^x - 17 \cdot 2^x + 16 = 0$

(Μονάδες 8)

B. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(\frac{1-2^x}{2^x-16}\right)$.

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = -\ln 4$.

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $v = P(\rho)$

(Μονάδες 10)

B. Να συμπληρώσετε, τα κενά στις επόμενες ισότητες, ώστε να είναι αληθείς :

α. $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \dots$ $(a, \theta_1, \theta_2 > 0 \text{ και } a \neq 1)$

β. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \dots$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

γ. $\text{συν}x = \text{συν}\theta \Leftrightarrow x = \dots$

(Μονάδες 3x3=9)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $x^4 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β. Η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ είναι 3π .

γ. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$

(Μονάδες 3x2=6)

ΘΕΜΑ 2^ο

Να λύσετε τις εξισώσεις :

A. $\eta\mu x - 1 = 0$

(Μονάδες 12)

B. $\eta\mu x \cdot \text{συν}x - \eta\mu x + 1 = \text{συν}x$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - \beta x + 1$ όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

A. Να βρείτε τις τιμές των a, β , ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x + 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ να είναι ίσο με το 6

(Μονάδες 12)

B. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -2$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(x+1)$

A1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$

(Μονάδες 5)

A2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(x-6) + \log(x+1) = 3\log 2$$

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την ανίσωση :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$$

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

(Μονάδες 12)

B. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για $a > 0$, $a \neq 1$ και $\theta > 0$ ισχύει $a^{\log_a \theta} = \theta$

β. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

γ. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 2x4=8)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 + \beta x + 6$, όπου x πραγματικός αριθμός.

A. Αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = 3$ είναι ίση με 30 και το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι $a = -1$ και $\beta = -7$.

(Μονάδες 13)

B. Κατόπιν αφού αντικαταστήσετε τα a, β που βρήκατε στο ερώτημα (A), να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a + \ln(e^x - 2)$, όπου a πραγματικός αριθμός.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

(Μονάδες 8)

B. Να βρείτε το a ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(\ln 3, 1)$

(Μονάδες 9)

Γ. Για $a = -1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta) \cdot x^3 + (\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta) \cdot x + \eta\mu\theta$, όπου

$\theta \in [0, \pi]$

A. Αν το $P(x)$ έχει ρίζα το 1, να βρείτε το θ .

(Μονάδες 12)

B. Αν $\theta = \pi$, να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{1}{x-3} \geq P(x), \text{ για } x \neq 3$$

(Μονάδες 13)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

ΘΕΜΑ 1°

A. Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιοδήποτε $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$$

(Μονάδες 10)

B. Έστω x μία μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x ;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu(90^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

β. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο π

γ. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 1.

δ. Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει πάντα η ισοδυναμία $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

ε. Αν $\theta > 0$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$

(Μονάδες 2x5= 10)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - 5x - 3a$, το οποίο έχει ρίζα το -1 .

A. Να αποδείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 6)

B. Να λύσετε τη εξίσωση $P(x) = 0$

(Μονάδες 9)

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x+1} < 6$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η παράσταση:

$$a = 9\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + 3\sigma\varphi(-\omega) - \sigma\upsilon\nu(5\pi + \omega) \quad (1)$$

και η εξίσωση:

$$2\eta\mu^2 x = (a+1)\sigma\upsilon\nu x \quad (2)$$

A. Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

A1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\sigma\varphi\omega$

(Μονάδες 6)

A2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης a .

(Μονάδες 7)

B. Αν $a = -4$, να λύσετε την εξίσωση (2)

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$ και $g(x) = \log(9^x - 3^x)$

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + \ln x = 3 \ln 2$$

(Μονάδες 7)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$g(x) - g(1) < \log 2$$

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε τον ορισμό του λογαρίθμου του $\theta > 0$ ως προς βάση το a .

(Μονάδες 7)

B. Να αποδείξετε ότι :

Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\log_a(\theta_1 + \theta_2) = \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2$ ($0 < a \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$)

β. Ισχύει $(\log_a \theta)^k = k \cdot \log_a \theta$ ($0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$)

γ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι $v = P(\rho)$.

δ. Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π .

(Μονάδες $2 \times 4 = 8$)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + 2$

A. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 1$.

(Μονάδες 7).

B. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda + 2)y = 5 \end{cases}$$

A. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D , D_x , D_y

(Μονάδες 6)

B. Να λύσετε το σύστημα .

(Μονάδες 14)

Γ. Αν $A(x_0, y_0)$ η μοναδική λύση του προηγούμενου συστήματος, να αποδείξετε ότι το A βρίσκεται στην ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1)$ και $g(x) = \ln(e^x - 1)$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

B. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 3)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 2 + g(x)$.

(Μονάδες 7)

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \ln 2 + g(x)$

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Στον παρακάτω πίνακα η πρώτη γραμμή περιέχει κάποιες γνωστές συναρτήσεις και η δεύτερη γραμμή τις γραφικές τους παραστάσεις σχεδιασμένες με τη βοήθεια λογισμικού. Να αντιστοιχίσετε (στο τετράδιό σας) τις συναρτήσεις της 1^{ης} γραμμής με τις αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις από τη 2^η γραμμή.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	Α. $\eta\mu x$	Β. $\sigma\upsilon\nu x$	Γ. $\epsilon\varphi x$	Δ. e^x	Ε. e^{-x}
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	I. 	II. 	III. 	IV. 	V.

(Μονάδες 15)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων έχει πάντα μοναδική λύση.
- β. Η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι περιοδική συνάρτηση.
- γ. Οι λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\varphi x = a$, όπου $a \in R$, είναι $x = k\pi + a$, με $k \in Z$.
- δ. Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζεται κάθε διαιρέτης του σταθερού όρου του.
- ε. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής εκφράζεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται ότι $\eta\mu 51^\circ \cong \frac{7}{9}$. Με τη βοήθεια αυτού να βρείτε στο σύνολο των πραγματικών

αριθμών όλες τις λύσεις της εξίσωσης $9\eta\mu x = 7$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 19x + 30$.

A. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

(Μονάδες 5)

B. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -5 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 5)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

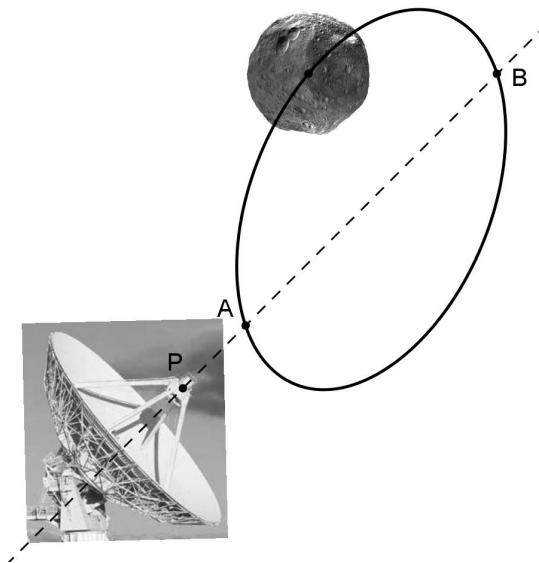
(Μονάδες 10)

Δ. Τι πρόσημο έχει το πολυώνυμο $P(x)$ στο διάστημα $(-5, 2)$;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4°

Η τροχιά ενός αστεροειδούς στο διάστημα (δείτε το επόμενο σχήμα) προσεγγίζεται από τη σχέση $2x^2 - xy + y^2 - 5x - 4y = -3$. Ένα ραδιοτηλεσκόπιο, αναζητώντας αστεροειδείς, εκπέμπει σήματα πάνω στην ευθεία $y = x + \lambda$, όπου λ είναι ένας πραγματικός αριθμός.



A. Αν η θέση του ραδιοτηλεσκοπίου είναι $P(-1, 0)$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

(Μονάδες 7)

B. Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις θέσεις (x, y) του αστεροειδούς στις οποίες θα γίνεται αντιληπτός από το ραδιοτηλεσκόπιο.

(Μονάδες 18)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $0 < a \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

(Μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν σ' ένα γραμμικό σύστημα η ορίζουσα του συστήματος D ισούται με μηδέν, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- β.** Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.
- γ.** Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο.
- δ.** Το πηλίκο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$.
- ε.** Αν $0 < a \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\log_a a^x = x$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{y+1}{4} + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y+5}{2} = 1 \end{cases}$$

A. Να φέρετε το παραπάνω σύστημα στη μορφή:

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \kappa x + \lambda y = \mu \end{cases}$$

(Μονάδες 13)

B. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

A. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = 2$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 7)

B. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\eta\mu^3 x - 5\eta\mu^2 x + \eta\mu x + 2 = 0$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

A. Να δείξετε ότι:

$$8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 3$$

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^{2\log_2 x} - 2 \cdot 3^{\log_2 x} - 8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 0$$

(Μονάδες 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

ΘΕΜΑ 1°

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- β.** Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , είναι άρτια, τότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
- γ.** Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε ισχύει $\log_a a = 1$.
- δ.** Η εξίσωση $\sin x = a$, με $a > 1$ έχει άπειρες λύσεις στο \mathbb{R} .
- ε.** Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$ και $a \neq 1$, έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
- (Μονάδες 2x5 = 10)**

B. Να αποδείξετε ότι αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, τότε το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \cdot \eta\mu(\beta x)$ με $a, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο το -4 και περίοδο $T = \pi$.

A. Να αποδείξετε ότι $a = 4$ και $\beta = 2$.

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) - 2\sqrt{3} = 0.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3°

Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + (\alpha + 1)x^3 + x^2 + (4\beta - 1)x + 6, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται επίσης ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$ είναι -4 :

A. Να υπολογίσετε τα a, β .

(Μονάδες 10)

B. Για $a = 1$ και $\beta = -3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)$ και $g(x) = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5$.

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g .

(Μονάδες 8)

B. Να λύσετε την εξίσωση $10^{f(x)} = g(x)$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(-1) - f(0) - \log|g(1)| - \log 13 = -3$.

(Μονάδες 7)