

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια: Καραγιάννης Β. Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Θέματα εξετάσεων Α΄ Λυκείου

Άλγεβρα.....4

Γεωμετρία.....39

Θέματα εξετάσεων Β΄ Λυκείου

Άλγεβρα.....68

Γεωμετρία.....90

Μαθηματικά Προσανατολισμού.....113

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συλλογή των θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων του Γενικού Λυκείου αποτελεί συνέχεια παρόμοιας προσπάθειας που έγινε κατά τα προηγούμενα δύο σχολικά έτη. Τα θέματα προέρχονται από Λύκεια του Νομού Δωδεκανήσου στα οποία διατηρείται πλήρης ανωνυμία. Τα θέματα επιλέχθηκαν αφενός με βάση το τεχνικό κριτήριο της δυνατότητας επεξεργασίας και αφετέρου το κριτήριο της λιγότερης παρέμβασης. Όμως φέτος τα θέματα που παραθέτουμε έχουν υποστεί, στο μέτρο του δυνατού, αξιολόγηση ως προς:

- A.** Το υφιστάμενο νομικό πλαίσιο επιλογής και διάρθρωσης των θεμάτων,
- B.** Το περιεχόμενο τους καθώς και την επιστημονική τους ορθότητα ,
- Γ.** Την διαβαθμισμένη δυσκολία τους ,
- Δ.** Την αισθητική τους καθώς και την ηλεκτρονική τους σελιδοποίηση,
- Ε.** Την φιλολογική τους επιμέλεια.

Έτσι , πολλά από τα θέματα που ακολουθούν, έχουν υποστεί κάποιας μορφής «παρέμβαση» , χωρίς ωστόσο να αλλοιωθεί ο χαρακτήρας και η δομή τους.

Παραδίδουμε λοιπόν στους αγαπητούς μαθητές μας και στους αξιόμαχους συναδέλφους μας μαθηματικούς, αλλά και σε όποιον ενδιαφέρεται για την μαθηματική εκπαίδευση, το υλικό που ακολουθεί και ελπίζουμε να τους βοηθήσει.

Μάρτιος 2015

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Δωδεκανήσου

ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

β. Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ και n φυσικός με $n \geq 2$ ισχύει $\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$.

γ. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

δ. Για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) + P(A') = 2014$.

ε. Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου α_n με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από το τύπο $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$.

(Μονάδες 2x5=10)

B. Δίνεται ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 .

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα των ριζών $x_1 + x_2$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

B. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε μια αριθμητική πρόοδο a_n , ισχύει: $a_1 = 5$ και $a_4 = 14$.

A. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι 3.

(Μονάδες 8)

B. Να βρείτε τον 10° όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 7)

Γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της προόδου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \quad , \quad \lambda \in (0,4) .$$

A. Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

B. Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0,4)$.

(Μονάδες 7)

Γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\gamma > 0$, τότε $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

β. Αν $\theta > 0$ τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$.

γ. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $|a|^2 = a^2$.

δ. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και $\beta \neq 0$ ισχύει: $\left| \frac{a}{\beta} \right| \leq \frac{|a|}{|\beta|}$.

(Μονάδες 2x4=8)

ε. Να αντιστοιχίσετε κάθε γραμμή της στήλης A με την αντίστοιχη της στήλης B, ώστε να προκύπτουν αληθείς σχέσεις ή προτάσεις.

στήλη A	Στήλη β
1. $ax > -\beta \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{a}$	α. $a = 0$
2. $ax > -\beta \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{a}$	β. $a > 0$
3. Αν $\beta > 0$ η ανίσωση $ax > -\beta$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$	γ. $a < 0$
	δ. $a \neq 0$

(Μονάδες 2)

B. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και β ισχύει ότι:

$$|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση: $\frac{x^2 - 2x}{x + 2} = \frac{16x}{x^2 - 4}$, $x \in \mathbb{R}$

A. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ορίζεται η εξίσωση.

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(15 - 5x)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 9}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

B. Να απλοποιήσετε τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ και $B = \sqrt{x^2}$.

A. Να λύσετε την ανίσωση $A > 1$.

(Μονάδες 5)

B. Να λύσετε την εξίσωση $B = -8$.

(Μονάδες 5)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = 1$.

(Μονάδες 5)

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $A = x$.

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

β. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

γ. Το άθροισμα των δύο ριζών x_1, x_2 εξισώσεων δευτέρου βαθμού δίνεται από την σχέση

$$S = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

δ. Το άθροισμα των πρώτων n -όρων αριθμητικής προόδου (a_n) με διαφορά ω είναι :

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} + na_1$$

ε. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $y' y$.

(Μονάδες 5x2=10)

B. Αν $A \subseteq B$, όπου A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α , β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

A. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$

(Μονάδες 12)

B. $(\alpha + \frac{4}{\alpha}) \cdot (\beta + \frac{4}{\beta}) \geq 16$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$, με $\lambda \neq 0$

A. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

B. Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών συναρτήση του λ .

(Μονάδες 6)

Γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

Γ1. Να λύσετε την ανίσωση $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) \geq 0$

(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = -4$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

B. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

Γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

Γ1. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

(Μονάδες 4)

Γ2. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$$

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $a^0=1$ για κάθε $a \neq 0$.

β. Ισχύει $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$.

γ. Ισχύει $|a| < 0$ για κάθε a πραγματικό αριθμό.

δ. Ισχύει $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ όπου a, b μη αρνητικοί αριθμοί.

ε. Αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ να γίνει η σωστή αντιστοίχιση

Τιμή Διακρίνουσας	Πλήθος Λύσεων Εξίσωσης
1. $\Delta > 0$	A. Μία διπλή λύση
2. $\Delta = 0$	B. Καμία λύση
3. $\Delta < 0$	Γ. Δύο άνισες λύσεις

(Μονάδες 5x2=10)

B. Εστω Ω ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν τα A και B είναι δύο ενδεχόμενα του Ω , να αποδείξετε ότι: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $|x|=9$ β. $|x+4|=7$ γ. $|x-13|=-1$

(Μονάδες 15)

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 8x + 2 = 0$ τότε χωρίς να βρεθούν οι ρίζες αυτές να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α. $x_1 + x_2$

β. $x_1 \cdot x_2$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 3, 7, 11,.....

A. Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου

(Μονάδες 8)

B. Να βρείτε τον εικοστό τέταρτο όρο a_{24} της αριθμητικής προόδου

(Μονάδες 8)

Γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων τριάντα όρων της αριθμητικής προόδου

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$

A. Να υπολογιστούν οι τιμές της συνάρτησης $f(-1), f(0), f(2)$

(Μονάδες 9)

B. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq 0$

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ με $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι πάντα θετικό, όταν η διακρίνουσα του Δ , είναι μικρότερη του μηδενός.

β. Ισχύει ότι $|x| \geq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$, όπου θ θετικός αριθμός.

γ. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση $ax + b = 0$ έχει ακριβώς μια λύση.

δ. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, b, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει $b^2 = a \cdot \gamma$.

ε. Για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A) + P(A') = 2014.$$

(Μονάδες 5x2=10)

B. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|a + b| \leq |a| + |b|$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda$

A. Αν η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα να βρείτε το λ .

(Μονάδες 12)

B. Για $\lambda=0$ να βρείτε την μικρότερη ακέραια λύση της ανίσωσης $d(x, \lambda - 4) < 2$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y = ax + b$

A. Να βρείτε τα a και b , ώστε η ευθεία να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\omega} = 45^\circ$ και να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 1)$.

(Μονάδες 14)

B. Για $\alpha = 1$ να βρείτε τα $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε) να είναι παράλληλη στην ευθεία με

$$\text{εξίσωση } y = \left| \frac{\mu}{\mu+1} \right| x - 2$$

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 6$, $x \in \mathbb{R}$

A. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

(Μονάδες 6)

B. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

Γ. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = -6$ και κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

Δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

(Μονάδες 6).

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $|2011x - 2012| = -2013$ είναι αδύνατη.

β. Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $|a|^2 > a^2$

γ. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και n θετικός ακέραιος, ισχύει ότι $\sqrt[n]{\alpha + \beta} = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta}$

δ. $\frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

ε. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$

(Μονάδες 2x5=10)

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της δίνεται από τον τύπο:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 3 = 0$. Αν έχει ρίζα τον αριθμό 1, να δείξετε ότι $\lambda = 2$

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση που προκύπτει για $\lambda = 2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 12 < 7x$.

(Μονάδες 15)

B. Αν ο x είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (A) , να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση:

$$|x-3|-|x-4|-2|x|$$

(Μονάδες10)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να λυθεί η εξίσωση $x^5 - 81x = 0$.

(Μονάδες 10)

B. Αν a η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (A) να δείξετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a-1}} = \sqrt{a} .$$

(Μονάδες 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ ισχύει: $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

β. Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε το μήκος (AB) είναι: $(AB) = d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

γ. Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) έχει δύο ρίζες και ισχύουν: $S < 0$ και $P > 0$, τότε οι ρίζες είναι θετικές

δ. Για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) + P(A') = 1$.

ε. Να αντιστοιχίσετε τις πιθανότητες της στήλης A με τους κατάλληλους τύπους της στήλης B, ώστε να προκύπτουν αληθείς ισότητες.

Στήλη A	Στήλη B
1. $P(A \cup B)$	α) $1 - P(A)$
2. $P(A - B)$	β) $P(A) - P(A \cap B)$
3. $P(A')$	γ) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
	δ) $P(A) - P(B)$

(Μονάδες 2x5=10)

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει ακριβώς μία λύση, την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι ανισώσεις $|2x+1| \geq 5$ (1) και $x^2 + x - 12 < 0$ (2)

A. Να λύσετε την ανίσωση (1)

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την ανίσωση (2)

(Μονάδες 10)

Γ. Κατόπιν να βρείτε τις κοινές λύσεις των (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή συνόλων.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 + \mu - x^2}$ με $\mu \geq 0$.

A. Να βρείτε την τιμή του μ , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$

(Μονάδες 5)

B. Για $\mu=0$:

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

(Μονάδες 7)

B2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $B(0, f(0))$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$

(Μονάδες 8)

B3. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{f^2(x)} + \frac{2}{x+2} = 1$, αν $-2 < x < 2$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ η οποία έχει δυο άνισες πραγματικές λύσεις.

A. Να αποδείξετε ότι $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$

(Μονάδες 8)

B. Για $\lambda = -4$

B1. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0$

(Μονάδες 6)

B2. Αν x_1 η θετική ρίζα και x_2 η αρνητική ρίζα της, τότε

i. Να λυθεί η ανίσωση $|x + 2013| \leq -x_2$

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{x_1 \sqrt{x_1}} = \sqrt{2}$

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει ότι $(-a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$

γ. Αν $\alpha < 2$, τότε $\alpha - 2 > 0$.

δ. Τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\}$ και $B = \{-2, 2\}$ είναι ίσα.

ε. Οι ευθείες $y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + 2$ και $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - 1$ είναι παράλληλες

(Μονάδες 2x5=10)

B. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(Μονάδες 9)

B. Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρεθεί ο αριθμός x , ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3⁰

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{\sqrt[3]{2^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}}$ και $B = \frac{8^7 \cdot 27^{11}}{6^{20} \cdot 9^6}$

A. Να αποδείξετε ότι $A = 2$ και $B = 6$.

(Μονάδες 8)

B. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = \frac{1}{A - \sqrt{A}} + \frac{1}{A + \sqrt{A}}$

(Μονάδες 6)

Γ. Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

(Μονάδες 2)

Δ. Αν $2 \leq x \leq 4$ και $1 \leq y \leq 2$ α βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $K = Ax - By$.

(Μονάδες 4)

E. Αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}{x - 2}$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τη μορφή

διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4⁰

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

(Μονάδες 10)

Γ. Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $|2x + 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

β. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες αν $\Delta < 0$, όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

γ. Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό του ίδιου πάντοτε μη μηδενικού αριθμού.

δ. Αν $A(a, \beta)$ σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, τότε το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $B(-a, -\beta)$

ε. Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε ισχύει:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

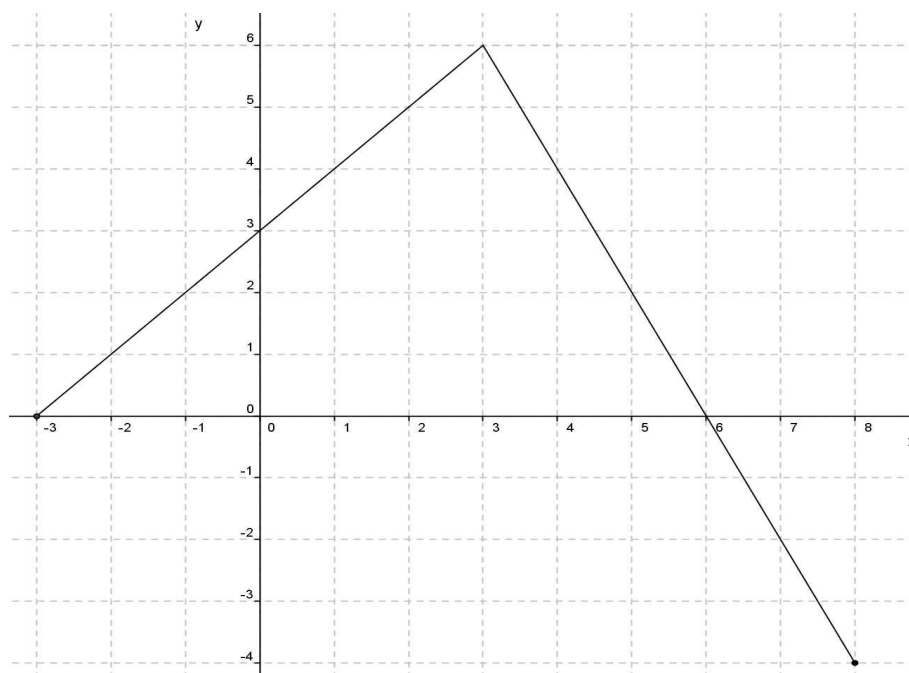
(Μονάδες 2x5=10)

B. Να αποδείξετε ότι για δύο οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ισότητα:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

A. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

B. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	4

(Μονάδες 6)

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

Δ. Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνεται $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,15$. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

A. $P(A \cup B)$

(Μονάδες 6)

B. $P(A')$

(Μονάδες 6)

Γ. $P(A - B)$

(Μονάδες 6)

Δ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα A και B .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

A. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0, 10)$$

(Μονάδες 9)

B. Να αποδείξετε ότι:

$$E(x) \leq \frac{25}{2} \text{ για κάθε } x \in (0, 10)$$

(Μονάδες 8)

Γ. Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι

παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $a \neq 0$, τότε:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

β. Ισχύει $|-a| = |a|$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

γ. Δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω , αν είναι ξένα μεταξύ τους τότε είναι αντίθετα.

δ. Για κάθε ενδεχόμενο A, ενός δειγματικού χώρου Ω , ισχύει $P(A) > 1$.

ε. Αν $a \geq 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\nu\mu]{a}$

(Μονάδες 2x5=10)

B. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι :

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$

(Μονάδες 9)

B. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

B. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της (1), να βρείτε τον αριθμό λ , ώστε:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

(Μονάδες 9)

Γ. Για $\lambda = 3$ να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $2x_1, 2x_2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$a_3 = 4, a_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

A. Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και το λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

B. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{a_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με

λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (a_n)

(Μονάδες 9)

Γ. Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων αντίστοιχα, να

αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 11

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει ότι: $a^κ \cdot a^λ = a^{κ+λ}$

β. Ισχύει: $(a + β)^2 = a^2 - 2αβ + β^2$

γ. Ισχύει: $\sqrt{α^2} = |α|$

δ. Ισχύει ότι: $(a^κ)^λ = a^{κ+λ}$

ε. Αν σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + γ = 0$, $a \neq 0$ η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 10)

B. Θεωρούμε την εξίσωση: $ax^2 + bx + γ = 0$ ($a \neq 0$) και τη διακρίνουσά της $\Delta = b^2 - 4αγ$.

Να αποδείξετε ότι αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

A. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 10)

B. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να λυθεί η ανίσωση:

$$2(3x-4) - 2(x-3) < 6$$

(Μονάδες 10)

B. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{x-5}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{5}{6}$$

(Μονάδες 10)

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση: $h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$

A. Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

B. Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο: $h(t) = 5[1,21 - (t-1)^2]$

(Μονάδες 5)

Δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,65 m

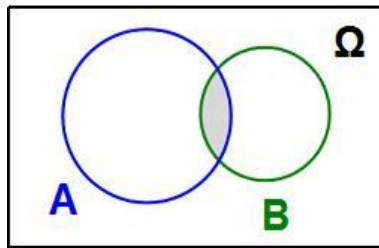
(Μονάδες 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 12

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν παριστάνει το σύνολο $A \cap B$.

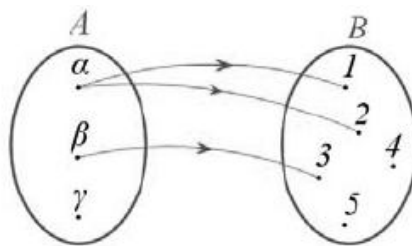


β. Μπορούμε πάντα να διαιρούμε κατά μέλη δύο ανισότητες της ίδιας φοράς και προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

γ. Ισχύει $|a|^2 = a^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό a .

δ. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = a \cdot \gamma$.

ε. Το βελοδιάγραμμα που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα παριστάνει συνάρτηση.



(Μονάδες 2x5=10)

B. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $P(A)$, $P(B)$ οι αντίστοιχες πιθανότητες. Να αποδείξετε ότι αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύουν:

$$a_1 = 2 \text{ και } a_{25} = a_{12} + 39$$

A. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

B. Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε ένα λύκειο οι αίθουσες χαρακτηρίζονται πρώτα με ένα από τα γράμματα A , B και Γ (ανάλογα με την τάξη που φοιτά στη συγκεκριμένη αίθουσα) και κατόπιν με τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4 (ανάλογα με το τμήμα της τάξης που φοιτά στη συγκεκριμένη αίθουσα).

Στο συγκεκριμένο σχολείο δεν υπάρχουν τα τμήματα $B4$ και $\Gamma4$, διότι οι τάξεις B και Γ Λυκείου αποτελούνται από τρία τμήματα η κάθε μία.

Θεωρούμε ως πείραμα τύχης την επιλογή μίας αίθουσας του σχολείου για να διενεργηθεί σε αυτήν η εξέταση του μαθήματος της Άλγεβρας A Λυκείου.

A. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

(Μονάδες 10)

B. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

B1. A : Η εξέταση να γίνει σε αίθουσα της A τάξης.

B2. B : Η εξέταση να γίνει σε αίθουσα με περιττό (μονό) αριθμό.

(Μονάδες 8)

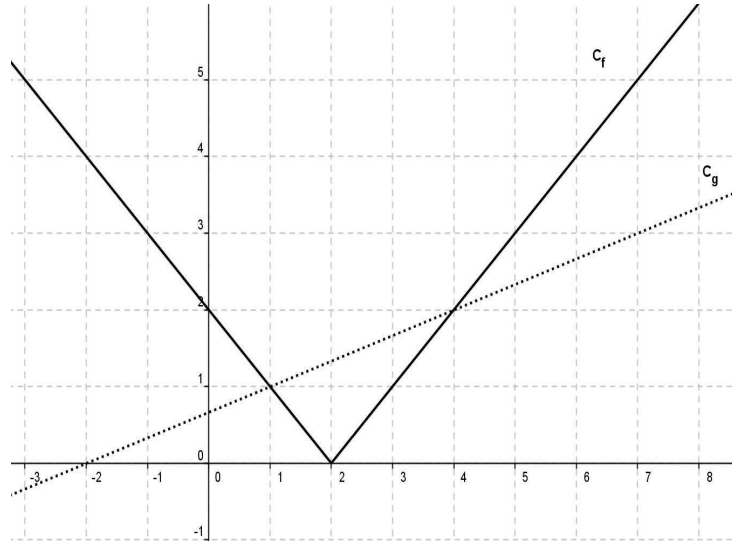
Γ. Να περιγράψετε με λόγια το ενδεχόμενο $A \cup B$ και να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησής του.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και

g αντίστοιχα, με $f(x) = |x-2|$ και $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$



A. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g

(Μονάδες 6)

B. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

Γ. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

(Μονάδες 6)

Δ. Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)}$

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 13

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο n -στός όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_n) με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι $a_n = a_1 + (n-1)\omega$

β. Αν $a \geq 0$, τότε $(\sqrt[n]{a})^n = -a$.

γ. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$.

δ. Το κενό σύνολο \emptyset που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

ε. Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών

$$x_1, x_2 \text{ της εξίσωσης } ax^2 + bx + \gamma = 0, \quad a \neq 0, \text{ τότε } S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

(Μονάδες 2x5= 10)

B. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε την ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \text{ και } -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

A. $\alpha - 2\beta$

(Μονάδες 12)

B. $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x + 3$, $x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τα $f(0)$, $f(2)$.

(Μονάδες 8)

B. Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = 8$

(Μονάδες 8)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + f(x) + 3 < 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34\text{cm}$ και διαγώνιο $\delta = 13\text{cm}$

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\text{cm}^2$

(Μονάδες 5)

ii. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

iii. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

B. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40cm^2 και διαγώνιο 8cm

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 14

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει $P(A') = 1 + P(A)$.

β. Αν $a \geq 0$, η \sqrt{a} παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = a$.

γ. Η ανίσωση $ax^2 + bx + c < 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) με $a > 0$ και διακρίνουσα $\Delta < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, b, c είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόδου, αν και μόνο αν ισχύει $b^2 = ac$

ε. Ως συντελεστή διεύθυνσης ή ως κλίση μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 2x5=10)

B. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει ότι: $a_1 = 19$ και $a_{10} - a_6 = 24$

A. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της πρόδου είναι $\omega = 6$

(Μονάδες 9)

B. Να βρείτε τον a_{20}

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της πρόδου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε

$$[2P(A)-1]^2 + [3P(B)-1]^2 = 0 \text{ και } P(A \cup B) = \frac{3}{4} \text{ τότε:}$$

A. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$.

(Μονάδες 9)

B. Να βρείτε την $P(A \cap B)$

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο το B.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

A. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$$

(Μονάδες 9)

ii. Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$$

(Μονάδες 9)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 15

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν ο β είναι ο αριθμητικός μέσος των α, γ τότε ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

β. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

γ. Το συμμετρικό ενός σημείου $M(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $M'(-\alpha, \beta)$.

δ. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$ και $\Delta < 0$, είναι ομόσημο του α για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ με $\alpha_1 \neq \alpha_2$ είναι πάντα παράλληλες.

(Μονάδες 2x5 = 10)

B. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, B = (\sqrt[3]{3})^6, \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$$

A. Να δείξετε ότι $A + B + \Gamma = 23$

(Μονάδες 13)

B. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$

(Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

ΘΕΜΑ 3^ο

Για τα ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω είναι γνωστό ότι:

$$P(A) = 0,65, P(B) = 0,4 \text{ και } P(B - A) = 0,25$$

Να υπολογίσετε:

A. Την $P(A \cap B)$.

(Μονάδες 7)

B. Την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B .

(Μονάδες 9)

Γ. Την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα A, B .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

A. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 8)

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

Γ. Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

Δ. Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

(Μονάδες 6)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Κάθε τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες είναι παραλληλόγραμμο.
- β.** Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι πάντοτε ίσα.
- γ.** Δύο χορδές κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- δ.** Η απόσταση του βαρύκεντρου ενός τριγώνου από κάθε κορυφή του ισούται με το $\frac{1}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.
- ε.** Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 2x5= 10)

- B.** Να αποδείξετε ότι:

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 15).

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ .

- A.** Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα

(Μονάδες 8)

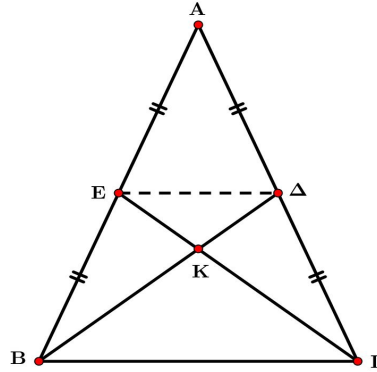
ii. το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

- B.** Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΝΔ και ΔΚ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^ο



Στο παραπάνω σχήμα στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$), φέρνουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και GE που τέμνονται στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:

A. $B\Delta = GE$

(Μονάδες 10)

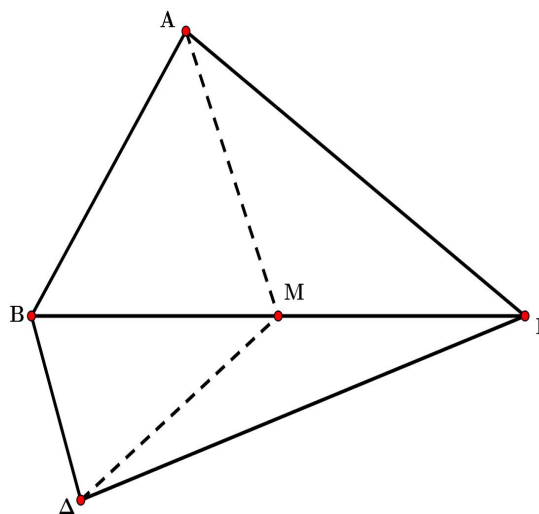
B. Το τρίγωνο $E\Delta K$ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 10)

Γ. $B\Gamma = 2\Delta E$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο



Στο παραπάνω σχήμα δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\triangle B\Gamma\Delta$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$)

(όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

A. Το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

B. $\widehat{AM\Delta} = 2\widehat{A\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 9)

Γ. $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}$

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1°

- A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α. Τραπεζίο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντί του πλευρές παράλληλες.
 - β. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
 - γ. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας.
 - δ. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.
 - ε. Αν δυο τρίγωνα έχουν ίσες τις γωνίες τους μια προς μια είναι ίσα

(Μονάδες $5 \times 2 = 10$)

- B. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

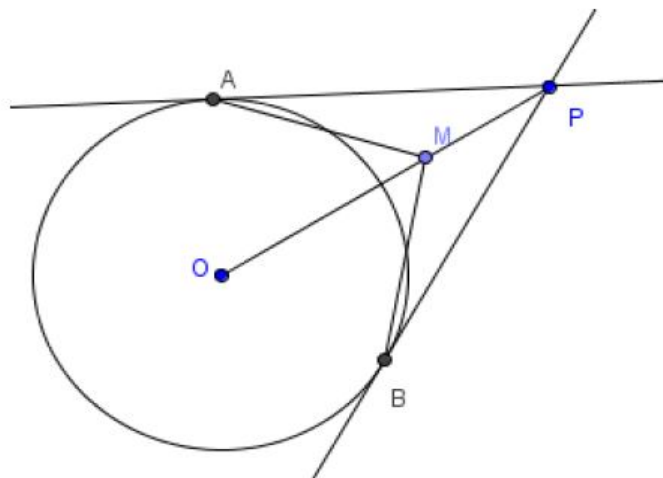
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες \widehat{MAO} και \widehat{MBO} είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E , Z , και H των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

A. $\Delta E = \frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 8)

B. $ZH = \frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 8)

Γ. το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις $P1$ και $P2$:

P1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

P2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις $P1$ και $P2$ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ 1^ο :

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ δεν είναι απαραίτητα ίσα όταν $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ και $\bar{\Gamma}=\bar{\Gamma}'$.

β. Δύο χορδές δύο ίσων κύκλων είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

γ. Αν ένας ρόμβος έχει ίσες διαγωνίους τότε είναι τετράγωνο.

δ. Η διάμεσος τραπέζιου είναι ίση με την ημιδιαφορά των βάσεων.

ε. Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 5x2=10)

B. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$.

Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ το ύψος του. Αν E, H, Z τα μέσα των $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα τότε να δείξετε ότι :

A. $EZ // BΓ$

(Μονάδες 8)

B. $\Delta Z = \frac{AΓ}{2}$

(Μονάδες 8)

Γ. το $EZHΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και $AΓ$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές $AΔ=BΓ$.

Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $ΔΓ$ και $BΓ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

A. Οι χορδές AB και $ΔΓ$ είναι παράλληλες .

(Μονάδες 6)

B. Το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)

Γ. Η $BΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου.

(Μονάδες 7)

Δ. Το τετράπλευρο $ΟΛΓΚ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .

(Μονάδες 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Δύο παραπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 180° .

β. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

γ. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία γωνία ορθή.

δ. Οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών και μίας τέμνουσας είναι παραπληρωματικές.

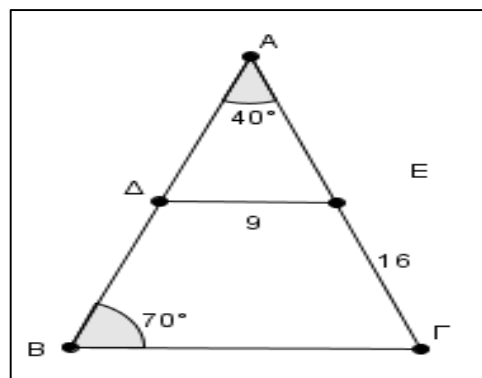
ε. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

(Μονάδες $5 \times 2 = 10$)

B. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο



Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=40^\circ$ και $\hat{B}=70^\circ$, όπως στο παραπάνω σχήμα. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ με $\Delta E=9$ και $E\Gamma=16$.

A. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 8)

B. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma=18$.

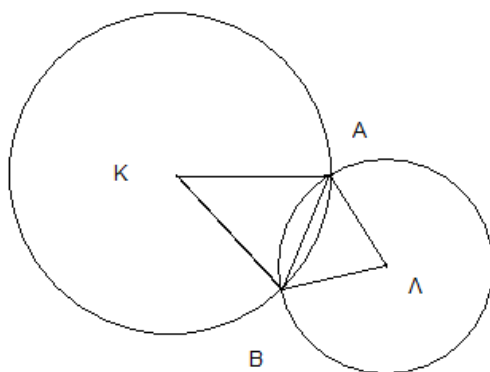
(Μονάδες 8)

Γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο επόμενο σχήμα οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία K και Λ τέμνονται στα σημεία A και B .



A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Lambda$ και $K\Lambda B$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

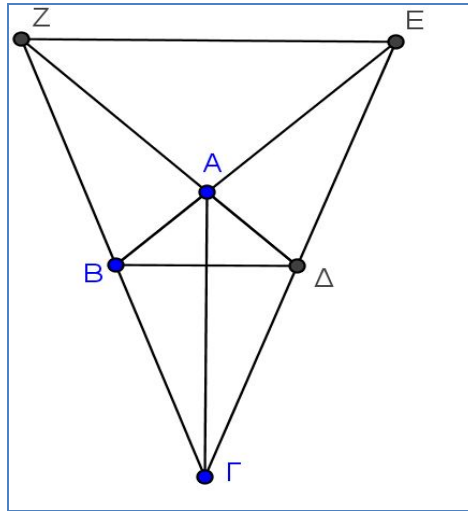
B. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda B$ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 10)

Γ. Αν M είναι το μέσο της χορδής AB , να αποδείξετε ότι τα σημεία K , Λ και M είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο



Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$, όπως στο παραπάνω σχήμα. Αν E το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

A. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 7)

B. $\Gamma Z = \Gamma E$

(Μονάδες 9)

Γ. $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

β. Οι κύκλοι (K, ρ) και (Λ, R) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$, όπου δ η διάκεντρός τους.

γ. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με την υποτεινούσα.

δ. Οι διαγώνιοι του παραλληλόγραμμου είναι ίσοι.

ε. Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημίθροισμά τους.

(Μονάδες 5x2= 10)

B. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Θέματα προαγωγικών εξετάσεων Γενικών Λυκείων

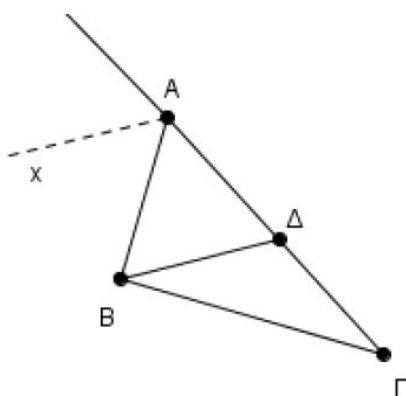
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\widehat{A_{εξ}} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

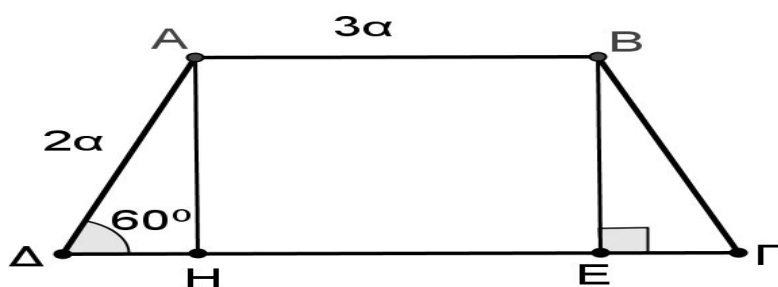
ii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$ (Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $\widehat{B\Delta A}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $AB < \Delta\Gamma$ και τα ύψη του AH , BE , όπως στο επόμενο σχήμα.



Αν η γωνία $\widehat{\Delta} = 60^\circ$, $A\Delta = 2\alpha$ και $AB = 3\alpha$, τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Gamma E = \alpha$.

(Μονάδες 8)

Β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 9)

Γ. Να υπολογίσετε την διάμεσο του τραπεζίου ΚΖ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{BAM}$. (Μονάδες 8)

β) $\hat{ADH} = \hat{AHD}$. (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ. (Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
- β. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι πάντα ίσες.
- γ. Η διάμεσος του τραπέζιου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων.
- δ. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- ε. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες είναι ίσα.

(Μονάδες $5 \times 2 = 10$)

B. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι δύο ορθές.

(Μονάδες 15)

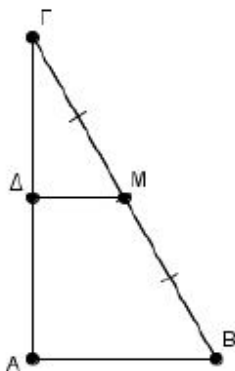
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει την πλευρά AG στο Δ .

α) Να υπολογίσετε

- I. τις γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)
- II. τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AG . (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με γωνία \hat{A} ίση με 120° και σημείο E μέσο του AB και ΔE διχοτόμος της γωνίας Δ .

Να δείξετε ότι :

A. Η γωνία $\hat{\Delta}$ είναι ίση με 60°

(Μονάδες 6)

B. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 6)

Γ. $\Delta\Gamma = 2A\Delta$

(Μονάδες 6)

Δ. Αν το ευθύγραμμο τμήμα $E\kappa$ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα $\Delta\Gamma$ να δείξετε ότι

$$\frac{\Delta E}{E\kappa} = 2$$

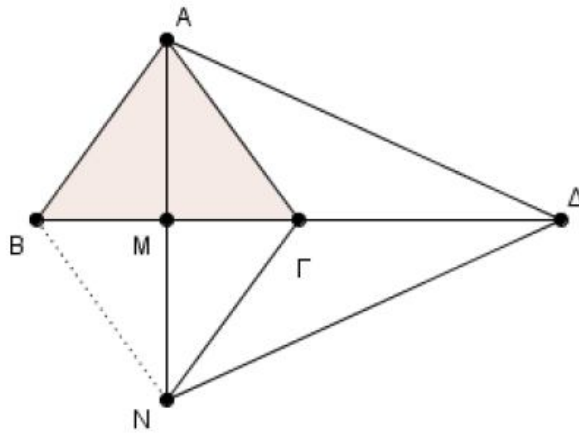
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN=AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta =B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Delta N$. (Μονάδες 9)



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Κάθε διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και ύψος.

(Μονάδες 2)

β. Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

(Μονάδες 2)

γ. Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

(Μονάδες 2)

δ. Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

(Μονάδες 2)

ε. Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της.

(Μονάδες 2)

B. Να αποδείξετε ότι:

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

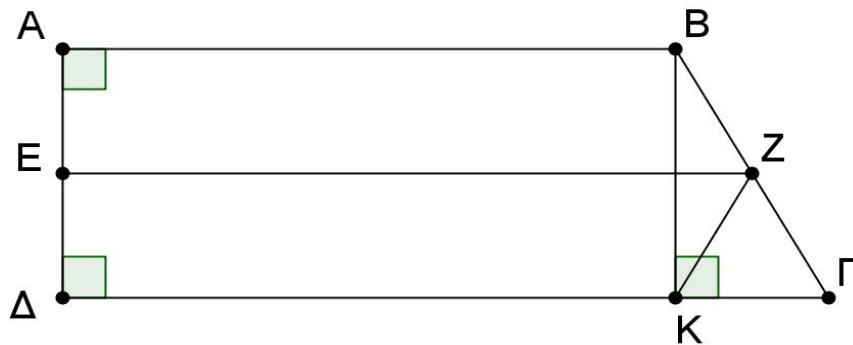
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία \hat{B} είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο



Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 120^\circ$.

Αν $AB = 2B\Gamma$, το BK είναι το ύψος του τραπέζιου και EZ είναι η διάμεσος του τραπέζιου τότε:

A. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KZ\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)

B. Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = \frac{5}{2}B\Gamma$.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι $EZ = \frac{9}{4}BG$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο $BΓ$. Θεωρούμε σημείο A του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο $ABΓ$. Η προέκταση της AO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Z . Φέρουμε το ύψος του $ABΔ$, η προέκτασή του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο E .

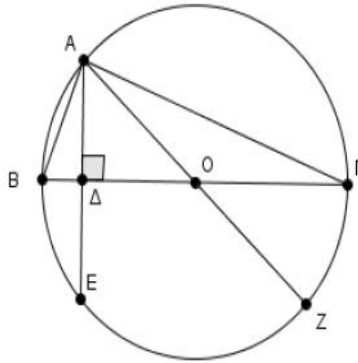
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ZΓ=AB=BE$ (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο $BEZΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραpezίου $BEZΓ$ είναι ίση

με $5R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου. (Μονάδες 10)



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

β. Η κοινή χορδή δύο τυχαίων τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου των δύο κύκλων.

γ. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

δ. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

ε. Κάθε τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες $2 \times 5 = 10$)

B. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες μεταξύ τους.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Εστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔE της γωνίας $\hat{A}\hat{B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

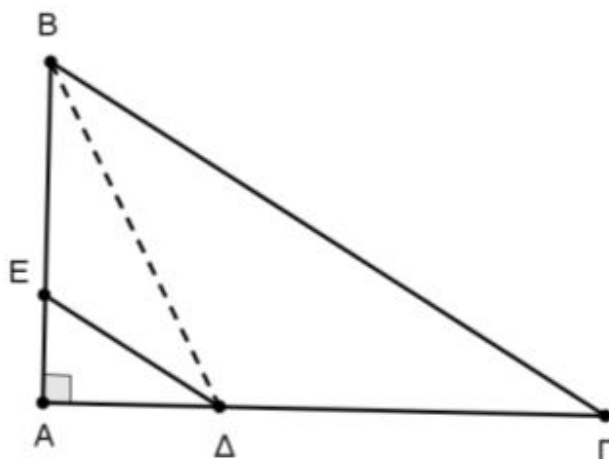
β) Αν $\hat{A}\hat{B} = 60^\circ$,

I. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

II. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$. Φέρνουμε τη διάμεσο AM , το ύψος AK και τη διχοτόμο $A\Delta$.

A. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

B. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες MAG και KAB είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ διχοτομεί τη γωνία MAK .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{\Delta A}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

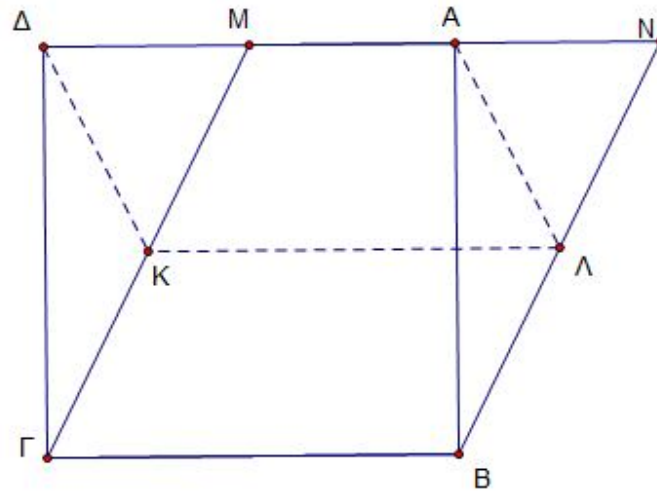
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα.
- β.** Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.
- γ.** Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- δ.** Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες παραπληρωματικές.
- ε.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^0 , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

(Μονάδες 5x2=10)

B. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ).

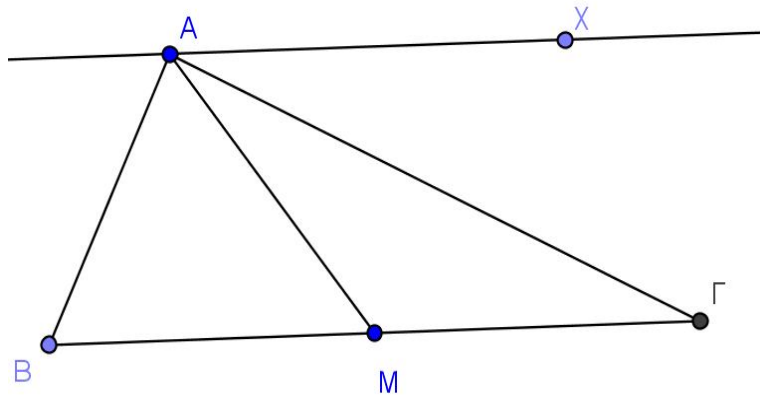
Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$

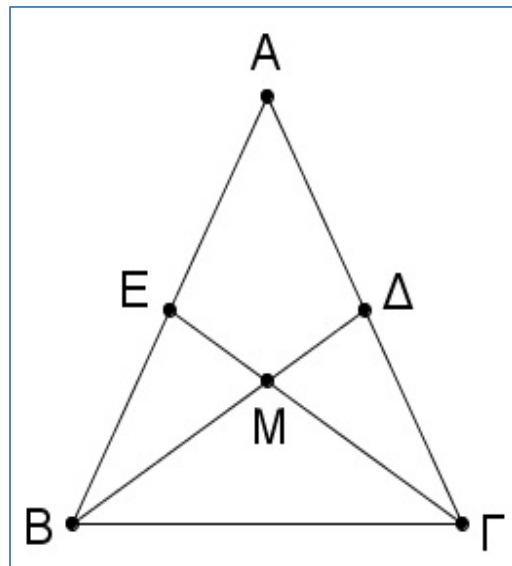
(Μονάδες 12)

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}x$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 3^ο



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), όπως στο παραπάνω σχήμα, και οι διάμεσοι $B\Delta$, ΓE , που τέμνονται στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι:

A. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon \Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

B. Οι γωνίες $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 7)

Γ. Τα τρίγωνα MEB και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

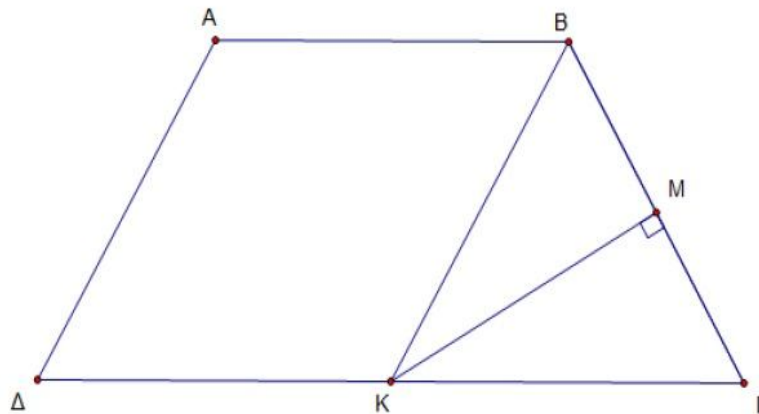
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας \hat{B} , η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$. (Μονάδες 7)



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου περνά από τις κορυφές του.
- β. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή
- γ. Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των φορέων των υψών του.
- δ. Σε ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι είναι πάντα ίσες.
- ε. Οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

(Μονάδες $2 \times 5 = 10$)

B. Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

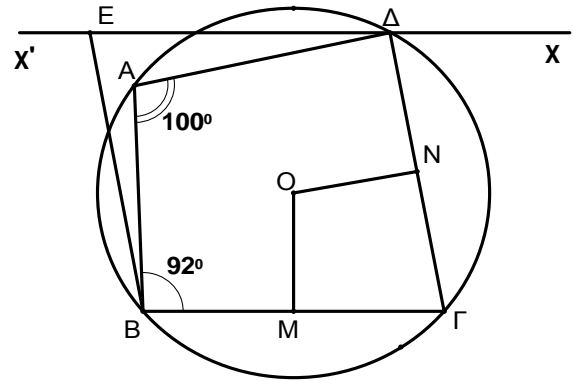
- α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
- β) Η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) και OM, ON τα αποστήματα των χορδών $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $OM = ON$.

Δίνεται επίσης ότι $\widehat{A} = 100^\circ$ και $\widehat{AB\Gamma} = 92^\circ$.

Μια ευθεία $x'x$ διέρχεται από το Δ έτσι ώστε $\widehat{\Gamma\Delta x} = 80^\circ$ και φέρνουμε $BE \parallel \Gamma\Delta$.



A. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta\Lambda}$.

(Μονάδες 8)

B. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος $O\Delta$. Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και ϕ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

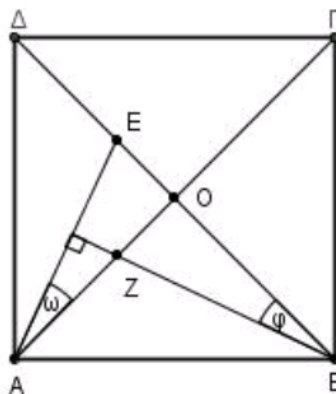
(Μονάδες 6)

β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$

(Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .

(Μονάδες 7)



ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ναδειχθεί ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

(Μονάδες 9)

B. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της πρώτης στήλης του διπλανού πίνακα με τις λύσεις της που βρίσκονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα.

Στήλη 1 ^η ΕΞΙΣΩΣΗ	Στήλη 2 ^η ΛΥΣΕΙΣ
α) ημx=ημθ	1) $x = 2κπ + θ, κ \in \mathbb{Z}$
β) συνx=συνθ	2) $\begin{cases} x = 2κπ + θ \\ x = 2κπ + (π - θ) \end{cases} κ \in \mathbb{Z}$
γ) εφx=εφθ	3) $\begin{cases} x = 2κπ + θ \\ x = 2κπ - θ \end{cases} κ \in \mathbb{Z}$

(Μονάδες 6)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

β. Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο π .

γ. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 1$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν $\sin x = -\frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, τότε:

A. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

(Μονάδες 8)

B. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{10\sin x - 12\epsilon\phi x}{5\eta\mu x}.$$

(Μονάδες 4)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \frac{2}{5}K - 2\eta\mu^2\omega$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 6$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$

A. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και $P(3) = 12$, να αποδείξετε ότι $a = 0$ και $\beta = -7$.

(Μονάδες 10)

B. Αν $a = 0$ και $\beta = -7$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3x - 5)$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 12)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.

Πότε λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα του $P(x)$;

(Μονάδες 5)

B. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυώνυμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $v = P(\rho)$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$ έχει μέγιστο ρ , ελάχιστο $-\rho$ και περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} .$$

β. Αν $\theta \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \theta, k \in \mathbb{Z}$.

γ. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

δ. Αν $0 < x < \pi$ τότε $\eta\mu x > 0$.

ε. Σε οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$ η αριθμητική τιμή $P(0)$ είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(\alpha\pi x)$ με $\alpha > 0$ που έχει περίοδο $T = 4$

A. Να βρεθεί ο αριθμός α καθώς και η ελάχιστη τιμή της $f(x)$

(Μονάδες 10)

B. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + kx + 2$ με $k \in \mathbb{R}$

A. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον -2 να βρεθεί ο k

(Μονάδες 6)

B. Αν $k = -1$

B1. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

B2. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\alpha} - 8$ διέρχεται από το σημείο

$M(-3, -4)$

A. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 9)

B. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x} + 5e^x + f\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \rho$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, δηλαδή είναι $v = P(\rho)$.

(Μονάδες 10)

B. Αν $a, \theta \in \mathbb{R}$ με $a > 0, \theta > 0$ και $a \neq 1$, να ορίσετε το $\log_a \theta$.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\ln e = 1$

β. Αν $\eta \mu x = \eta \mu \theta$ τότε $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta$, $k \in \mathbb{Z}$.

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma \nu \nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$, έχει περίοδο $T = \pi$.

δ. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

ε. Η συνάρτηση, $f(x) = \frac{1}{2} \eta \mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \kappa x^2 + \lambda x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

A. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 2, να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και $\lambda = -3$.

(Μονάδες 13)

B. Αν $\kappa = 3$ και $\lambda = -3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η γωνία x , με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $15\sigma \nu \nu^2 x - 4\sigma \nu x - 12 = 0$.

A. Να αποδείξετε ότι $\sin x = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 7)

B. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\sin\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + \sin(17\pi + x)}{3\varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + 4\sigma\varphi\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)}$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση: $4^x - 17 \cdot 2^x + 16 = 0$

(Μονάδες 8)

B. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(\frac{1-2^x}{2^x-16}\right)$.

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = -\ln 4$.

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $v = P(\rho)$

(Μονάδες 10)

B. Να συμπληρώσετε, τα κενά στις επόμενες ισότητες, ώστε να είναι αληθείς :

α. $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \dots$ ($a, \theta_1, \theta_2 > 0$ και $a \neq 1$)

β. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \dots$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)

γ. $\sin x = \sin \theta \Leftrightarrow x = \dots$

(Μονάδες 3x3=9)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $x^4 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β. Η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ είναι 3π .

γ. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$

(Μονάδες 3x2=6)

ΘΕΜΑ 2^ο

Να λύσετε τις εξισώσεις :

A. $\eta\mu x - 1 = 0$

(Μονάδες 12)

B. $\eta\mu x \cdot \sin x - \eta\mu x + 1 = \sin x$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - \beta x + 1$ όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

A. Να βρείτε τις τιμές των a, β , ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x+1$ και το

υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ να είναι ίσο με το 6

(Μονάδες 12)

B. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -2$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(x+1)$

A1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$

(Μονάδες 5)

A2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(x-6) + \log(x+1) = 3\log 2$$

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την ανίσωση :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$$

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

(Μονάδες 12)

B. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για $a > 0$, $a \neq 1$ και $\theta > 0$ ισχύει $a^{\log_a \theta} = \theta$

β. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

γ. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 2x4=8)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 + \beta x + 6$, όπου x πραγματικός αριθμός.

A. Αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = 3$ είναι ίση με 30 και το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι $a = -1$ και $\beta = -7$.

(Μονάδες 13)

B. Κατόπιν αφού αντικαταστήσετε τα a, β που βρήκατε στο ερώτημα (A), να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a + \ln(e^x - 2)$, όπου a πραγματικός αριθμός.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

(Μονάδες 8)

B. Να βρείτε το a ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(\ln 3, 1)$

(Μονάδες 9)

Γ. Για $a = -1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta) \cdot x^3 + (\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta) \cdot x + \eta\mu\theta$, όπου

$\theta \in [0, \pi]$

A. Αν το $P(x)$ έχει ρίζα το 1, να βρείτε το θ .

(Μονάδες 12)

B. Αν $\theta = \pi$, να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{1}{x-3} \geq P(x), \text{ για } x \neq 3$$

(Μονάδες 13)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιοδήποτε $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$$

(Μονάδες 10)

B. Έστω x μία μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x ;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu(90^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

β. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο π

γ. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 1.

δ. Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει πάντα η ισοδυναμία $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

ε. Αν $\theta > 0$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$

(Μονάδες 2x5= 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - 5x - 3a$, το οποίο έχει ρίζα το -1 .

A. Να αποδείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 6)

B. Να λύσετε τη εξίσωση $P(x) = 0$

(Μονάδες 9)

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x+1} < 6$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η παράσταση:

$$a = 9\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + 3\sigma\varphi(-\omega) - \sigma\upsilon\nu(5\pi + \omega) \quad (1)$$

και η εξίσωση:

$$2\eta\mu^2 x = (a+1)\sigma\upsilon\nu x \quad (2)$$

A. Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

A1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\sigma\varphi\omega$

(Μονάδες 6)

A2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης a .

(Μονάδες 7)

B. Αν $a = -4$, να λύσετε την εξίσωση (2)

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$ και $g(x) = \log(9^x - 3^x)$

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + \ln x = 3 \ln 2$$

(Μονάδες 7)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$g(x) - g(1) < \log 2$$

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε τον ορισμό του λογαρίθμου του $\theta > 0$ ως προς βάση το α .

(Μονάδες 7)

B. Να αποδείξετε ότι :

Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\log_a(\theta_1 + \theta_2) = \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2$ ($0 < a \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$)

β. Ισχύει $(\log_a \theta)^k = k \cdot \log_a \theta$ ($0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$)

γ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι $\nu = P(\rho)$.

δ. Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π .

(Μονάδες 2x4= 8)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + 2$

A. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 1$.

(Μονάδες 7)

B. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda + 2)y = 5 \end{cases}$$

A. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D , D_x , D_y

(Μονάδες 6)

B. Να λύσετε το σύστημα .

(Μονάδες 14)

Γ. Αν $A(x_0, y_0)$ η μοναδική λύση του προηγούμενου συστήματος, να αποδείξετε ότι το A βρίσκεται στην ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1)$ και $g(x) = \ln(e^x - 1)$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

B. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 3)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 2 + g(x)$.

(Μονάδες 7)

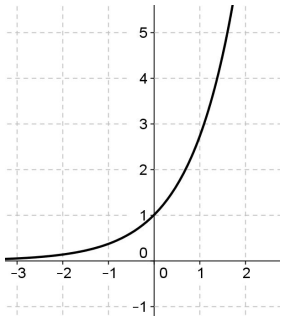
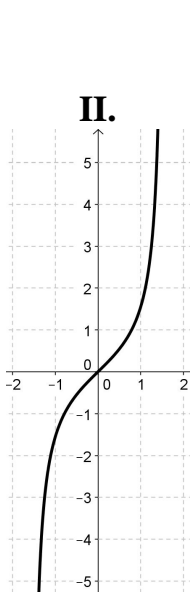
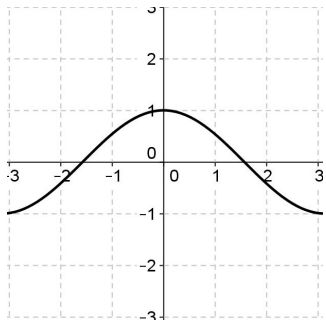
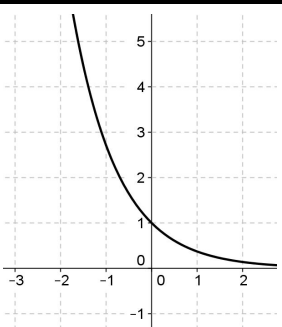
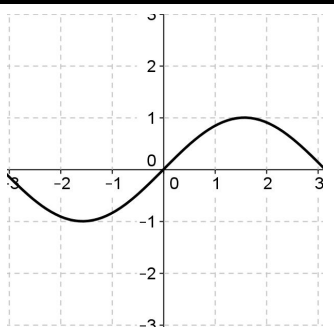
Δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \ln 2 + g(x)$

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Στον παρακάτω πίνακα η πρώτη γραμμή περιέχει κάποιες γνωστές συναρτήσεις και η δεύτερη γραμμή τις γραφικές τους παραστάσεις σχεδιασμένες με τη βοήθεια λογισμικού. Να αντιστοιχίσετε (στο τετράδιό σας) τις συναρτήσεις της 1^{ης} γραμμής με τις αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις από τη 2^η γραμμή.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	Α. $\eta\mu x$	Β. $\sigma\upsilon\nu x$	Γ. $\epsilon\phi x$	Δ. e^x	Ε. e^{-x}
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	I. 	II. 	III. 		
	IV. 			V. 	

(Μονάδες 15)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων έχει πάντα μοναδική λύση.
- β. Η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι περιοδική συνάρτηση.
- γ. Οι λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\phi x = \alpha$, όπου $\alpha \in R$, είναι $x = \kappa\pi + \alpha$, με $\kappa \in Z$.
- δ. Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζεται κάθε διαιρέτης του σταθερού όρου του.

ε. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής εκφράζεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ότι $\eta\mu 51^\circ \cong \frac{7}{9}$. Με τη βοήθεια αυτού να βρείτε στο σύνολο των πραγματικών

αριθμών όλες τις λύσεις της εξίσωσης $9\eta\mu x = 7$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 19x + 30$.

A. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

(Μονάδες 5)

B. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -5 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 5)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

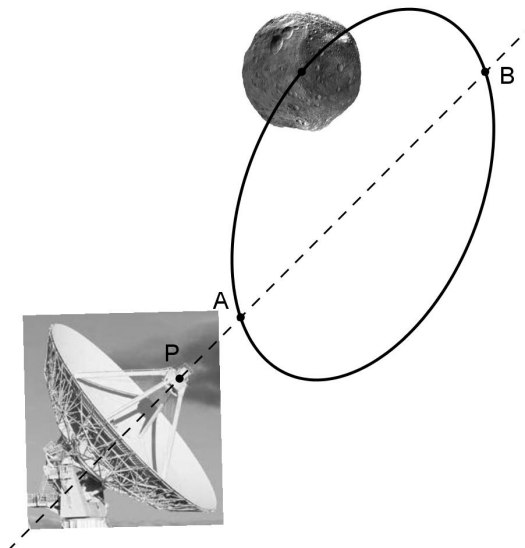
(Μονάδες 10)

Δ. Τι πρόσημο έχει το πολυώνυμο $P(x)$ στο διάστημα $(-5, 2)$;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Η τροχιά ενός αστεροειδούς στο διάστημα (δείτε το επόμενο σχήμα) προσεγγίζεται από τη σχέση $2x^2 - xy + y^2 - 5x - 4y = -3$. Ένα ραδιοτηλεσκόπιο, αναζητώντας αστεροειδείς, εκπέμπει σήματα πάνω στην ευθεία $y = x + \lambda$, όπου λ είναι ένας πραγματικός αριθμός.



- A.** Αν η θέση του ραδιοτηλεσκοπίου είναι $P(-1, 0)$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.
(Μονάδες 7)
- B.** Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις θέσεις (x, y) του αστεροειδούς στις οποίες θα γίνεται αντιληπτός από το ραδιοτηλεσκόπιο.
(Μονάδες 18)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $0 < a \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

(Μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Αν σ' ένα γραμμικό σύστημα η ορίζουσα του συστήματος D ισούται με μηδέν, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- β. Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.
- γ. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο.
- δ. Το πηλίκο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$.
- ε. Αν $0 < a \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\log_a a^x = x$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{y+1}{4} + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y+5}{2} = 1 \end{cases}$$

A. Να φέρετε το παραπάνω σύστημα στη μορφή:

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \kappa x + \lambda y = \mu \end{cases}$$

(Μονάδες 13)

B. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

A. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = 2$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 7)

B. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 9)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\eta\mu^3 x - 5\eta\mu^2 x + \eta\mu x + 2 = 0$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

A. Να δείξετε ότι:

$$8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 3$$

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^{2\log_2 x} - 2 \cdot 3^{\log_2 x} - 8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 0$$

(Μονάδες 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

β. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , είναι άρτια, τότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.

γ. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε ισχύει $\log_a a = 1$.

δ. Η εξίσωση $\sin x = a$, με $a > 1$ έχει άπειρες λύσεις στο \mathbb{R} .

ε. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$ και $a \neq 1$, έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 2x5 = 10)

B. Να αποδείξετε ότι αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, τότε το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \cdot \eta\mu(\beta x)$ με $a, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο το -4 και περίοδο $T = \pi$.

A. Να αποδείξετε ότι $a = 4$ και $\beta = 2$.

(Μονάδες 10)

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) - 2\sqrt{3} = 0.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + (\alpha + 1)x^3 + x^2 + (4\beta - 1)x + 6, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται επίσης ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$ είναι -4 :

A. Να υπολογίσετε τα α, β .

(Μονάδες 10)

B. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)$ και $g(x) = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5$.

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g .

(Μονάδες 8)

B. Να λύσετε την εξίσωση $10^{f(x)} = g(x)$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(-1) - f(0) - \log|g(1)| - \log 13 = -3$.

(Μονάδες 7)

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτεινούςας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτεινούσα. Δηλαδή να αποδείξετε ότι:

$$AB^2 = BG \cdot BD \text{ ή } AG^2 = BG \cdot GD.$$

(Μονάδες 10)

B. Στην στήλη A βρίσκονται οι πλευρές ενός τριγώνου και στην στήλη B αναγράφεται το είδος του τριγώνου. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης A με ένα μόνο στοιχείο της στήλης B, ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
A. $\alpha = 6, \beta = 3, \gamma = 4$	1. Οξυγώνιο
B. $\alpha = 6, \beta = 8, \gamma = 12$	2. Αμβλυγώνιο
Γ. $\alpha = 5, \beta = 12, \gamma = 13$	3. Ορθογώνιο
Δ. $\alpha = 4, \beta = 5, \gamma = 6$	
Ε. $\alpha = 4, \beta = 5, \gamma = 7$	

(Μονάδες 9)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία είναι παραπληρωματικές.
- β.** Ο τύπος $4 \cdot a_n^2 = 4 \cdot R^2 - \lambda_n^2$ συνδέει την πλευρά λ_n , το απόστημα a_n και την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου κανονικού n – γώνου.
- γ.** Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις γωνίες ίσες είναι κανονικό.

(Μονάδες 2x3= 6)

ΘΕΜΑ 2^ο

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με την γωνία A ορθή. Αν $AG = 20$ και $B\Gamma = 25$, να υπολογίσετε:

A. Το ευθύγραμμο τμήμα AB

(Μονάδες 8)

B. Τα ευθύγραμμα τμήματα $\Delta\Gamma$ και ΔB

(Μονάδες 10)

Γ. Το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 15$, $\beta = 14$ και $\gamma = 13$. Να βρείτε :

A. Το μήκος της διαμέσου μ_α .

(Μονάδες 15)

B. Την προβολή της διαμέσου μ_α στην πλευρά $B\Gamma$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι $\gamma = 4$, $\beta = 6$ και η γωνία $\hat{A} = 30^\circ$. Να υπολογίσετε:

A. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 8)

B. Το ύψος u_β του τριγώνου.

(Μονάδες 7)

Γ. Την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ρ

(Μονάδες 5)

Δ. Την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου R .

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $A\Delta$ το ύψος προς την υποτείνουσα $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι: $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)

B. Να διατυπώσετε τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μ_α είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά a ενός τριγώνου $\Delta AB\Gamma$, τότε ισχύει:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}.$$

β) Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τη σχέση: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta\gamma \sigma\upsilon\nu\Lambda$.

γ) Το μήκος του ημικυκλίου ακτίνας R είναι $\frac{\pi R}{2}$.

δ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

ε) Σε κάθε κανονικό πολύγωνο ισχύει $\hat{\phi}_\nu + \hat{\omega}_\nu = 180^\circ$.

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ με πλευρές $a = 14$, $\beta = 10$, $\gamma = 6$.

A. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 7)

B. Να υπολογίσετε τη διάμεσο μ_a του τριγώνου.

(Μονάδες 6)

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς β πάνω στην πλευρά γ .

(Μονάδες 6)

Δ. Να υπολογίσετε τη γωνία \hat{A} .

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας $R = 2$, και δύο διαδοχικές χορδές του AB και $B\Gamma$ τέτοιες ώστε $AB = 2$ και $B\Gamma = 2\sqrt{2}$.

A. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου \widehat{AB} .

(Μονάδες 8)

B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $(O\widehat{B\Gamma})$ του κυκλικού τομέα με κέντρο O και το αντίστοιχο τόξο

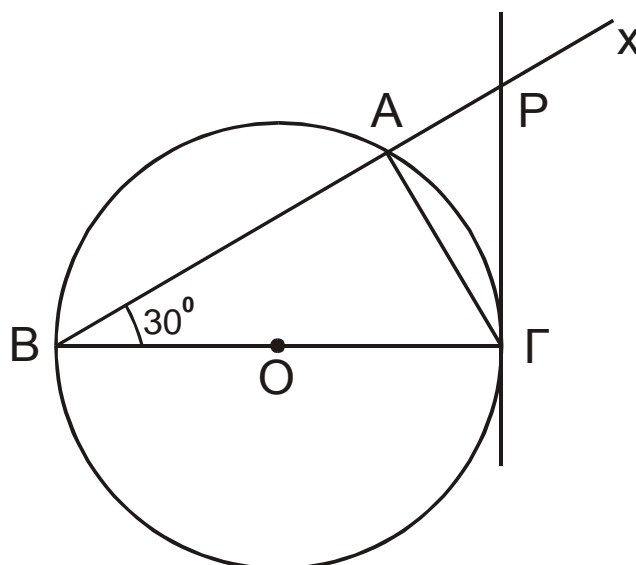
(Μονάδες 8)

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $(OAB\Gamma)$ του τετραπλεύρου $OAB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου $B\Gamma$ και ημιευθεία Bx τέτοια, ώστε η γωνία $\hat{\Gamma Bx}$ να είναι 30° . Έστω ότι η Bx τέμνει τον κύκλο στο σημείο A . Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ , η οποία τέμνει τη Bx στο σημείο P . (Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



A. Να αποδείξετε ότι: $ΑΓ = R$.

(Μονάδες 8)

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(PBΓ)}{(PAΓ)} = 4$.

(Μονάδες 8)

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $ΡΓ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

(Μονάδες 9)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι κάθε τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R έχει πλευρά

$$\lambda_4 = R\sqrt{2} \text{ και απόστημα } a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

(Μονάδες 10)

B. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να διατυπώσετε το 1^ο θεώρημα διαμέσων για τη διάμεσο μ_β , να σχεδιάσετε το σχετικό σχήμα και να γραψετε τον σχετικό τύπο.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $AB, \Gamma\Delta$ χορδές κύκλου που τέμνονται στο σημείο P τότε ισχύει :

$$PA \cdot P\Delta = PB \cdot P\Gamma$$

β. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο $E = \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu A$

γ. Η πλευρά λ_3 ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) δίνεται από τον τύπο

$$\lambda_3 = R$$

δ. Αν $\Delta_{(O,R)}^P = 0$ τότε το P είναι σημείο του κύκλου (O,R) .

ε. Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

(Μονάδες $2 \times 5 = 10$)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές:

$$a = 5x, \beta = 4x, \gamma = 3x$$

A. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου E ως συνάρτηση του x .

(Μονάδες 5)

Γ. Αν $E = 24\text{cm}^2$ τότε :

Γ1. Να βρείτε το x

(Μονάδες 5)

Γ2. Να υπολογίσετε το ύψος προς τη υποτείνουσα .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, πλευράς a . Στις πλευρές AB , $B\Gamma$, ΓA , παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ , E , Z τέτοια ώστε $AB=BE=\Gamma Z=a$.

Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

A. Το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta Z$.

(Μονάδες 9)

B. Το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta E Z$.

(Μονάδες 9)

Γ. Το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου του τρίγωνο $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Στον κύκλο (O,R) προεκτείνουμε την διάμετρο $\Delta\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma B=R$. Η BA είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A .

A. Να αποδείξετε ότι $AB=R$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 30^\circ$.

(Μονάδες 8)

B. Να αποδείξετε ότι $A\Delta=R$.

(Μονάδες 7)

Γ. Να υπολογίσετε το Εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζουν η χορδή $A\Delta$ και το τόξο $AE\Delta$.

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούςας.

(Μονάδες 13)

B. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που αφορά στα κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R .

Κανονικά πολύγωνα	Πλευρά λ_n	Απόστημα α_n
Ισόπλευρο τρίγωνο		
Κανονικό εξάγωνο		
Τετράγωνο		

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 5$.

A. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 6)

B. Να υπολογίσετε την προβολή της AB στην $A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο μ_β .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $B\Gamma = 7$, $A\Gamma = 6$, $AB = 5$.

A. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $6\sqrt{6}$

(Μονάδες 6)

B. Να βρείτε το ύψος $υ_\beta$.

(Μονάδες 6)

Γ. Να βρείτε τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου.

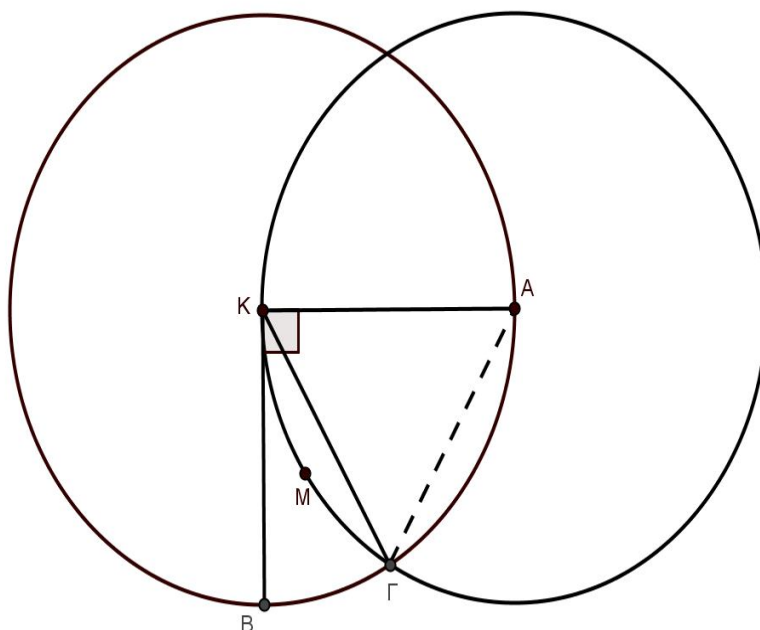
(Μονάδες 7)

Α. Αν προεκτείνουμε την πλευρά ΓΑ προς το μέρος του Α κατά ευθύγραμμο τμήμα

$$ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΓ, \text{ να βρείτε το λόγο των εμβαδών } \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΔ)}$$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο



Θεωρούμε κύκλο (K, ρ) και δύο κάθετες ακτίνες KA, KB αυτού, όπως στο παραπάνω σχήμα.

Επίσης θεωρούμε κύκλο (A, ρ) ο οποίος τέμνει το τόξο AB στο σημείο Γ .

Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΚΑΓ$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 6)

Β. Να βρείτε τα μήκη των τόξων $B\Gamma, K\Gamma$.

(Μονάδες 6)

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος $K\Gamma M$.

(Μονάδες 7)

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $KB\Gamma$.

(Μονάδες 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να δείξετε ότι το εμβαδό E ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} a \cdot \upsilon_a$, όπου a η μια πλευρά του τριγώνου και υ_a το αντίστοιχο ύψος του στην πλευρά a

(Μονάδες 11)

B. Να γράψετε στη κόλλα των απαντήσεων τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα που **αντιστοιχεί** στη σωστή απάντηση.

1. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $a^2 > b^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν,

A. $\hat{A} < 1L$

B. $\hat{A} = 1L$

Γ. $\hat{A} > 1L$

2. Από τους παρακάτω τύπους εκείνος που εκφράζει το εμβαδό E του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ο

A. $E = \frac{1}{2} \alpha\beta\eta\mu\Gamma$

B. $E = \frac{1}{2} \alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\beta$

Γ. $E = \frac{1}{2} \beta\gamma\eta\mu\beta$

3. Η γωνία φ_ν ενός κανονικού ν -γωνου δίνεται από τον τύπο:

A. $\varphi_\nu = 360^\circ - \frac{180^\circ}{\nu}$

B. $\varphi_\nu = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$

Γ. $\varphi_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$

4. Η πλευρά λ_3 ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) είναι:

A. $\lambda_3 = R$

B. $\lambda_3 = R\sqrt{2}$

Γ. $\lambda_3 = R\sqrt{3}$

(Μονάδες 2x4=8)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

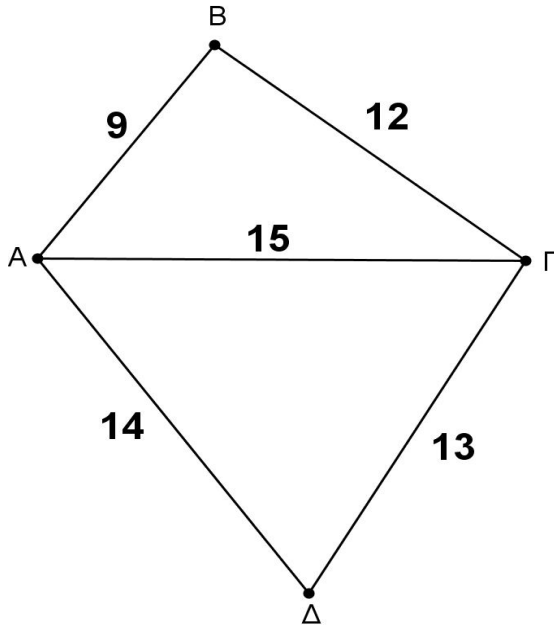
β. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $a^2 = b^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha$

γ. Η διάμεσος κάθε τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

(Μονάδες 2x3= 6)

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο επόμενο κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ δίνεται ότι: $AB=9$, $B\Gamma=12$, $\Gamma\Delta=13$, $\Delta A=14$ και η διαγώνιος $A\Gamma=15$.

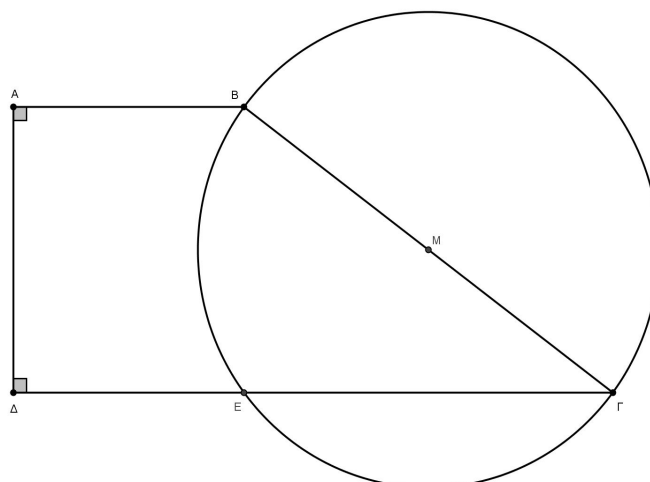


- A.** Να εξετάσετε το είδος των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ ως προς τις γωνίες τους.
(Μονάδες 10)
- B.** Να υπολογίσετε τη προβολή AK της πλευράς AB στην διαγώνιο $A\Gamma$.
(Μονάδες 7)
- Γ.** Να υπολογίσετε τη προβολή $\Gamma\Lambda$ της πλευράς $\Gamma\Delta$ στην $A\Gamma$ καθώς και το $K\Lambda$.
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο επόμενο σχήμα δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=5$, $\Gamma\Delta=13$ και $(AB\Gamma\Delta)=54$.

Ο κύκλος διαμέτρου $B\Gamma$ έχει κέντρο το M και τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο E .



A. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραpezίου.

(Μονάδες 10)

B. Να υπολογίσετε την ΔM .

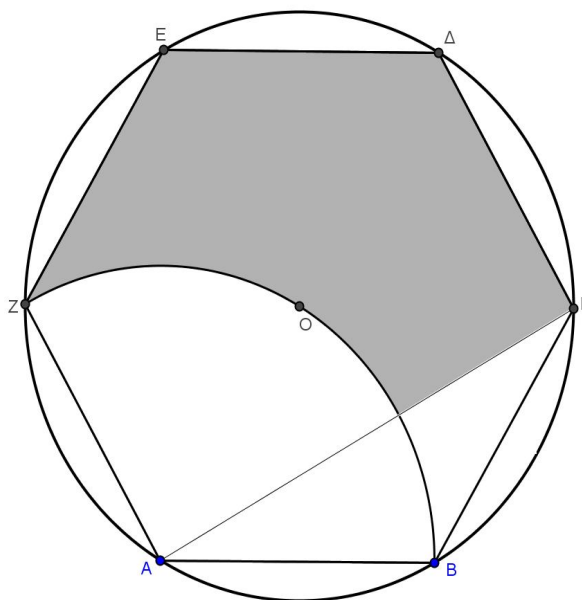
(Μονάδες 8)

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΔMB .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται το κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) και ο κυκλικός τομέας με κέντρο το A και αντίστοιχο τόξο BZ .



Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R :

A. Το εμβαδό του τριγώνου $ΑΒΓ$ και το εμβαδό του εξαγώνου.

(Μονάδες 10)

B. Την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μέρους του παραπάνω σχήματος

(Μονάδες 8)

Γ. Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους του παραπάνω σχήματος.

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

(Μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \cdot \eta\mu A$.

β. Σε κάθε $AB\Gamma$ τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία: $a^2 < b^2 + \gamma^2$, αν και μόνο $\hat{A} > 1L$.

γ. Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.

δ. Το εμβαδόν E ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} b \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$

ε. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 4$ cm, $A\Gamma = 5$ cm και $\hat{A} = 60^\circ$.

A. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \sqrt{21}$ cm .

(Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου μ_α .

(Μονάδες 9)

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3^ο

Οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν μήκη $AB = 9$ cm , $B\Gamma = 7$ cm και $A\Gamma = 12$ cm.

A. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

B. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της ΒΓ πάνω στην ΑΒ.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\widehat{AB} = 60^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 120^\circ$

Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R :

A. Τις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 9)

B. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)

Γ. Τα μήκη των τόξων \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Με δεδομένο ότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς κ δίνεται από τον τύπο $E = \kappa^2$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και β , δίνεται από τον τύπο $E_{\text{ορθ}} = \alpha \cdot \beta$.

(Μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$.

β. Η δύναμη ενός σημείου ως προς έναν κύκλο μεγαλώνει καθώς το σημείο πλησιάζει το κέντρο του κύκλου.

γ. Δύο ισοδύναμα σχήματα είναι κατ' ανάγκην ίσα μεταξύ τους.

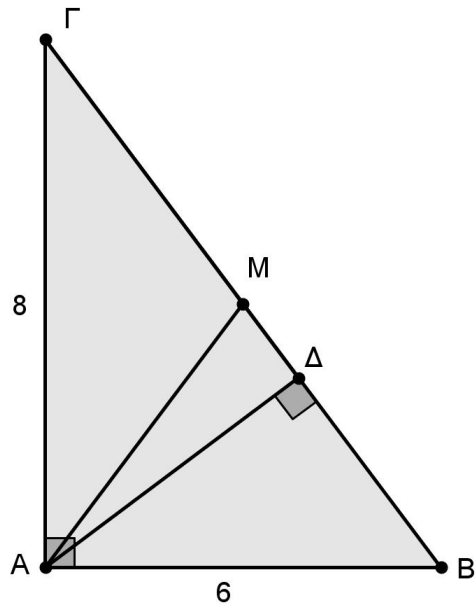
δ. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

ε. Σε ένα κανονικό πολύγωνο η κεντρική γωνία του ω_n και η γωνία του φ_n είναι παραπληρωματικές.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

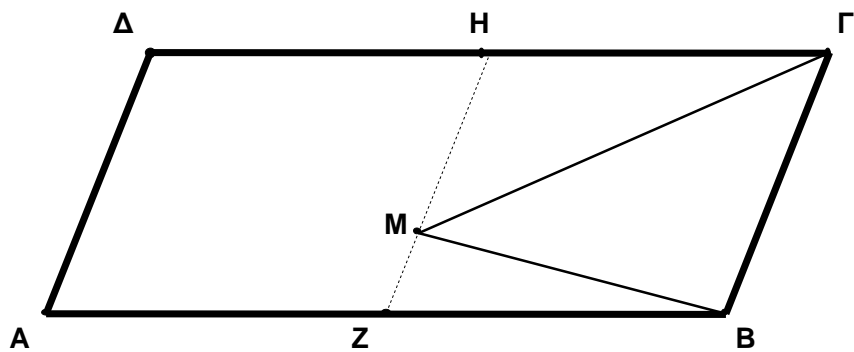
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ και τη διάμεσο AM , όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Αν ισχύει $AB = 6$ και $A\Gamma = 8$, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $A\Delta$ και AM , καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta M$.



(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 3^ο

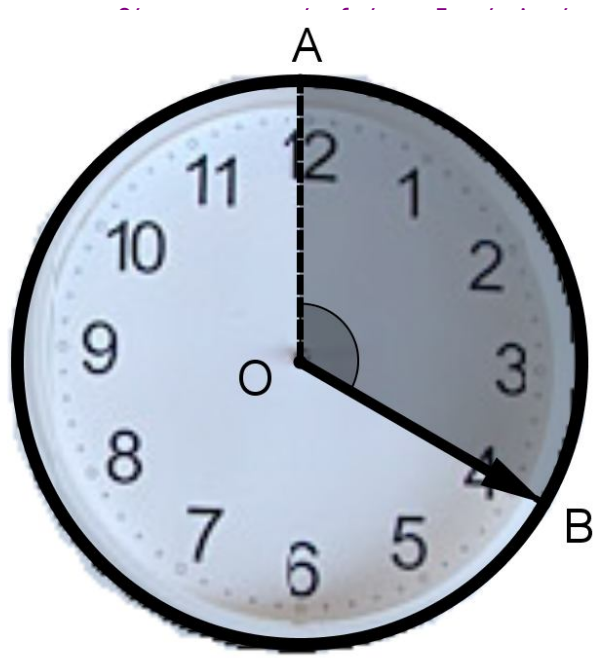
Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Z είναι το μέσο της πλευράς AB και το σημείο H είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ του παραλληλογράμμου ABΓΔ. Αν το M είναι ένα τυχαίο σημείο του τμήματος HZ και το εμβαδόν του ABΓΔ είναι 20, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MBΓ.



(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε ένα κυκλικό ρολόι τοίχου ο λεπτοδείκτης ακουμπάει στην περιφέρεια του ρολογιού, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Αν η διάμετρος του ρολογιού είναι 30 εκατοστά, να βρείτε πόσο εμβαδόν «σαρώνει» ο λεπτοδείκτης σε χρόνο 20 λεπτών.



(Μονάδες 25)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούς (Πυθαγόρειο Θεώρημα).

(Μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $AB^2 + AΓ^2 = BΓ^2$ τότε $\hat{A} = 90^\circ$.

β. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

γ. Το σημείο P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, ρ) αν και μόνο αν $\Delta_{(O, \rho)}^P < 0$

δ. Το εμβαδόν E ενός τριγώνου ABΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \sin \hat{A}$

ε. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ, AB = 4, BΓ = 5, AE = 15 \text{ και } \Delta E = 9.$$

A. Να βρείτε τη πλευρά AΓ

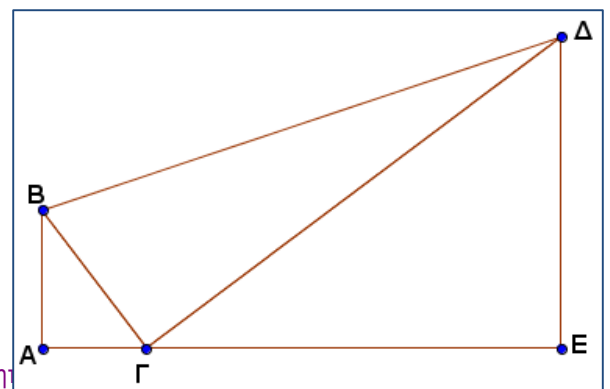
(Μονάδες 9)

B. Να βρείτε τη πλευρά ΓΔ

(Μονάδες 9)

Γ. Αν η πλευρά BΔ ισούται με $5\sqrt{10}$, να βρείτε το είδος του τριγώνου BΓΔ.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 4$, $A\Gamma = 5$ και $\hat{A} = 102^\circ$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν γνωρίζετε ότι $\sin 120^\circ \cong -\frac{1}{5}$ τότε:

A. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 7$.

(Μονάδες 8)

B. Να υπολογίσετε την ημπερίμετρο τ του τριγώνου $AB\Gamma$.

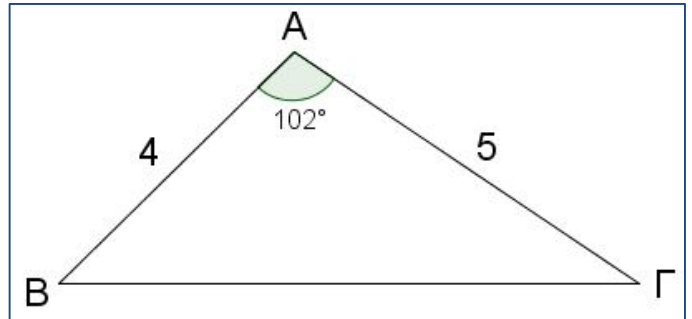
(Μονάδες 4)

Γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $4\sqrt{6}$.

(Μονάδες 7)

Δ. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4^ο

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν:

$PA = 3$, $PB = 4$, $AB = A\Gamma = 2$ καθώς και

$\Delta A = \Delta B$, $\Gamma \Delta = 4$, $A\Lambda \perp B\Delta$, $BM = M\Delta$

A. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 5$.

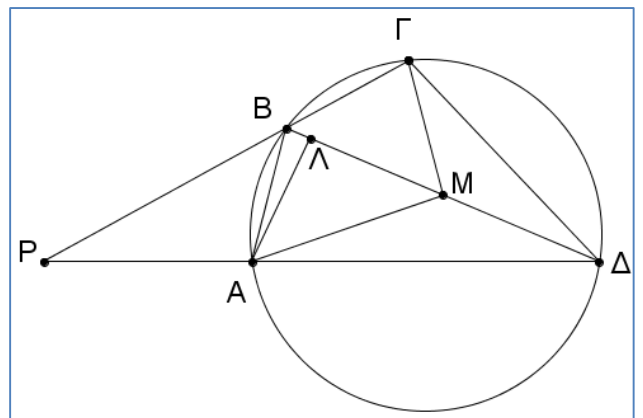
(Μονάδες 8)

B. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma M = \frac{\sqrt{15}}{2}$

(Μονάδες 9)

Γ. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ να βρείτε τη προβολή της διαμέσου AM στην $B\Delta$ (δηλαδή το μήκος του ευθ. τμήματος ΛM).

(Μονάδες 8)



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.
- β.** Το εμβαδόν E κάθε τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \tau \cdot R$, όπου τ η ημιπερίμετρος του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
- γ.** Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων υψών.
- δ.** Η κεντρική γωνία ω_n ενός κανονικού n - γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $\omega_n = \frac{180^\circ}{n}$.
- ε.** Το απόστημα ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

(Μονάδες 2x5 = 10)

- B.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραpezίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του, δηλαδή $E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon$, όπου B, β οι βάσεις του τραpezίου και υ το ύψος του.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $a = 8$, $\beta = 4\sqrt{7}$ και $\gamma = 4$.

- A.** Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του.

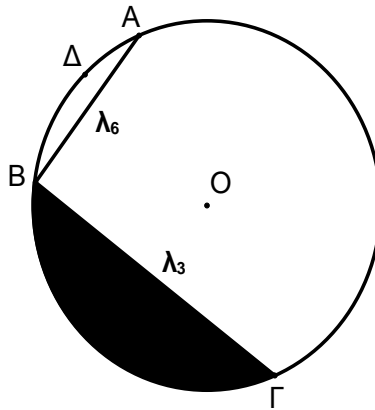
(Μονάδες 10)

Β. Να υπολογίσετε τη γωνία \hat{B} του τριγώνου $AB\Gamma$
(Μονάδες 10)

Γ. Να αποδείξετε ότι η προβολή $A\Delta$ της πλευράς AB πάνω στην $A\Gamma$ είναι $A\Delta = \frac{8\sqrt{7}}{7}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο



Δίνεται κύκλος (O, R) με εμβαδόν $E = 4\pi$ και δύο διαδοχικές χορδές του $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Α. Να αποδείξετε ότι $R = 2$.

(Μονάδες 5)

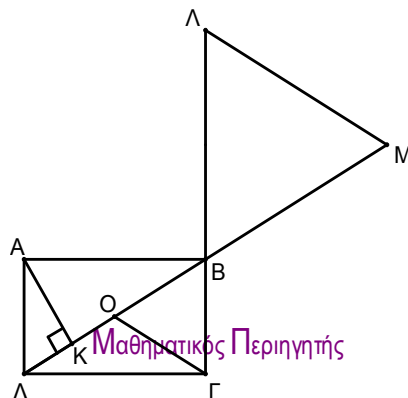
Β. Να αποδείξετε ότι η χορδή $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου.

(Μονάδες 5)

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\widehat{A\Delta B}$ και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος

(Μονάδες 7 + 8 = 15)

ΘΕΜΑ 4^ο



Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta) = 48$ και $AB = 8$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Προεκτείνουμε την διαγώνιο ΔB κατά τμήμα $BM = \Delta B$ και την πλευρά ΓB κατά τμήμα $B\Lambda = 2\Gamma B$.

A. Να υπολογίσετε την πλευρά $A\Delta$ και την διαγώνιο $B\Delta$ του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

B. Αν K , η προβολή του A πάνω στην $B\Delta$, να υπολογίσετε την προβολή BK της AB πάνω στην $B\Delta$.

(Μονάδες 5)

Γ. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(B\Omega\Gamma)}{(B\Lambda M)}$.

(Μονάδες 5)

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $(B\Lambda M)$ του τριγώνου $B\Lambda M$.

(Μονάδες 5)

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης (Προσανατολισμού)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

(Μονάδες 10)

B. Να διατυπώσετε τον ορισμό της παραβολής.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

β. Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

γ. Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από τη ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

δ. Η εξίσωση $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = \rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

ε. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες: $y = \frac{\beta}{a}x$ και $y = -\frac{\beta}{a}x$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-2, 5)$, $\Gamma(5, 6)$.

A. Να αποδείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου είναι ορθή.

(Μονάδες 7)

B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από την κορυφή A του

τριγώνου και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνετε ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 25$

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(4, 3)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο.

(Μονάδες 4)

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) του παραπάνω κύκλου στο σημείο του $M(4, 3)$.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και του κύκλου $(x-10)^2 + (y-5)^2 = 36$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$

A. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών, των εστιών καθώς επίσης και τη εκκεντρότητα της έλλειψης.

(Μονάδες 10)

B. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία

(η): $x - y + 2 = 0$.

(Μονάδες 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, \psi_2)$, τα οποία δεν είναι παράλληλα στον άξονα $\psi' \psi$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1.$$

(Μονάδες 10)

B. Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σημεία E, E' του επιπέδου και μεγάλο άξονα $2a$. (Ισχύει $2a > (E'E)$ και $a > 0$). Στη συνέχεια να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης όταν οι εστίες της E, E' είναι σημεία του άξονα $x'x$, την εξίσωση όταν οι εστίες E, E' είναι σημεία του άξονα $\psi' \psi$ και να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις παραμέτρους a, β και γ . Να σχεδιάσετε ένα σχετικό σχήμα .

(Μονάδες 7)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

β. Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε ισχύει πάντα $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

γ. Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$.

δ. Η απόσταση της εστίας E της παραβολής $x^2 = 2py$ από τη διευθετούσα της δ είναι ίση με $|p|$.

(Μονάδες 4x2=8)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα σημεία: $A(-2, 4)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma(-1, 3)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

A. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{a} = \overline{B\Gamma}$ και το $|\vec{a}|$.

(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta} = \overline{A\Gamma}$, το συντελεστή διεύθυνσής του $\lambda_{\vec{\beta}}$ και τη γωνία ω που

σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

Γ.

Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (-3, 5)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

(Μονάδες 6)

Δ. Έστω E και E' σημεία του άξονα $x'x$ συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$ τέτοια ώστε:

$(E'E) = 2|\vec{\alpha}|$. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων M του επιπέδου,

τα οποία ικανοποιούν τη σχέση: $(ME) + (ME') = -2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ (1)

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

B. Να βρείτε την εξίσωση παραβολής C_2 , της οποίας η εστία E ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου και η παράμετρος p της παραβολής με την ακτίνα του κύκλου.

(Μονάδες 8)

Γ. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(3, 2\sqrt{3})$ είναι σημείο της παραπάνω παραβολής.

(Μονάδες 3)

Δ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C_2 στο σημείο $A(3, 2\sqrt{3})$ εφάπτεται και του κύκλου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\epsilon_\lambda): (\lambda+2)x - (2\lambda + 1)y + 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (ϵ_λ) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

B. Για $\lambda=1$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) , το σημείο A στο οποίο η ευθεία (ϵ_1) τέμνει τον άξονα $x'x$ και την απόσταση του σημείου $O(0,0)$ από την (ϵ_1) .

(Μονάδες 6)

Γ. Για $\lambda = 0$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_0) , το σημείο Β στο οποίο η ευθεία (ε_0) τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$, το σημείο τομής Γ των ευθειών (ε_0) και (ε_1) και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

Δ. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σταθερό σημείο Γ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου από τα οποία δε διέρχεται καμιά ευθεία από αυτές που παριστάνει η εξίσωση (ε_λ) .

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε τον ορισμό της παραβολής.

(Μονάδες 7)

B. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής και την εστία της αν έχει διευθετούσα $\delta: x = -1$

(Μονάδες 6)

Γ. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε.

εξίσωση κωνικής	γραφή της κωνικής στην κανονική της μορφή	χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)
α. $4x^2 = 36 + 9y^2$		
β. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$		
γ. $9x^2 = 100 - 25y^2$		
δ. $y^2 - 12x = 0$		

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής:

$$Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0 \quad (1)$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία.

(Μονάδες 18)

B. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)x + (2\lambda^2 + 3\lambda + 3)y - 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 4)

B2. Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 8)$ και $\Gamma(5, -6)$

A. Να αποδείξετε ότι δεν είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε τα μέσα M και N των τμημάτων AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα .

(Μονάδες 4)

Γ. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας MN .

(Μονάδες 4)

Δ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε που είναι παράλληλες στην MN και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση $d = 2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (y-2, x)$ και $\vec{\beta} = (y+2, x+2)$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_1 των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία είναι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

B. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $A(0, 5)$

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

(Μονάδες 8)

B. Να σχεδιάσετε τη παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ με $p > 0$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα την εστία (με τις συντεταγμένες της) και τη διευθετούσα (με την εξίσωσή της).

(Μονάδες 7)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $\beta^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 \beta^2$ ($\alpha \cdot \beta \neq 0$) παριστάνει υπερβολή.

β. Αν ε είναι η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τότε $\varepsilon > 1$.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, -B)$.

δ. Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$.

ε. Η εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ παριστάνει πάντα κύκλο.

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(5, 3)$ $B(-1, 8)$ $\Gamma(4, 0)$

A. Να αποδείξετε ότι δεν είναι συνευθειακά .

(Μονάδες 10)

B. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$

Αν $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να υπολογίσετε:

A. $|\vec{v}|$

(Μονάδες 8)

B. $\vec{w} \cdot \vec{v}$

(Μονάδες 8)

Γ. $(\vec{\alpha}, \vec{v})$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να βρείτε η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων, μεγάλο άξονα πάνω στον άξονα των $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $A(3, 4)$ και $B(2, 6)$.

(Μονάδες 13)

B. Αν η εξίσωση έλλειψης του ερωτήματος (A) είναι $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{52} = 1$

- Να βρείτε :
- i. Τον μεγάλο άξονα
 - ii. Τον μικρό άξονα
 - iii. Τις εστίες
 - iv. Την εκκεντρότητα

(Μονάδες 3x4=12)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

, όπου λ_1 και λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των \vec{a} , $\vec{\beta}$ αντίστοιχα, εφόσον αυτά δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 10)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν \vec{a} , $\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

β. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$

γ. Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και είναι παράλληλη στον $x'x$ έχει εξίσωση $y = y_o$.

δ. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

ε. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα

$$2\alpha > 2\gamma \text{ είναι } \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \quad \text{με } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

(Μονάδες 2x5=10)

Γ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σταθερά σημεία E' και E του επιπέδου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2^ο

Για τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$

Έστω επίσης το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

A. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε το $|\vec{\nu}|$

(Μονάδες 7)

Γ. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\nu}$

(Μονάδες 6)

Δ. Να αποδείξετε ότι $\text{syn}(\vec{a}, \vec{\beta}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και οι συντεταγμένες των κορυφών του A(6, 1) και Γ(2, 3).

Αν το ύψος του ΑΔ έχει εξίσωση $x - 2y - 4 = 0$ και η διάμεσός του ΒΛ έχει εξίσωση $y = -x + 6$, να βρείτε:

A. Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

(Μονάδες 7)

B. Την εξίσωση της πλευράς ΑΓ

(Μονάδες 7)

Γ. Τις συντεταγμένες της κορυφής Β

(Μονάδες 5)

Δ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΛ, όπου Λ το μέσο της ΑΓ

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + \lambda^2 = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

(Μονάδες 5)

B. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή από την οποία εξαιρείται η κορυφή της.

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής του ερώτηματος (B).

(Μονάδες 5)

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω παραβολής που είναι κάθετη στην

ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 2$

(Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

(Μονάδες 7)

B. Αν $\vec{a} = (x, y)$, να αποδείξετε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(Μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

β. Αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$

γ. Αν $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ ευθεία και σημείο $M_0(x_0, y_0)$ εκτός αυτής τότε:

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

δ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα κύκλο .

(Μονάδες 2x4=8)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -4)$ και $\vec{\beta} = (-8, 5)$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\beta}_1$ και $\vec{\beta}_2$ από τις οποίες η $\vec{\beta}_1 // \vec{a}$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το σημείο του επιπέδου $M(2t+1, 4t+3)$, $t \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$.

(Μονάδες 9)

B. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $O(0, 0)$ από την ευθεία ε .

(Μονάδες 7)

Γ. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει από το $O(0, 0)$ την ελάχιστη δυνατή απόσταση.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων όταν διέρχεται από το $M(1, \sqrt{3})$

(Μονάδες 7)

B. Αν $P(x_1, y_1)$ σημείο του κύκλου του προηγούμενου ερωτήματος, με $x_1 > 0$ και $y_1 > 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο P και τα σημεία A και B που αυτή τέμνει τους άξονες (συναρτήσει των x_1 και y_1)

(Μονάδες 6)

Γ. Να βρείτε το σημείο P τέτοιο ώστε η εφαπτομένη του κύκλου στο P να τέμνει τους άξονες σε δύο σημεία A και B ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να έχει μήκος 4.

(Μονάδες 12)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει

$$\text{εξίσωση } xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

(Μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{a} = (x, y)$ τότε $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

β. Αν $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, A)$.

δ. Η παραβολή με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta : x = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $x^2 = 2py$.

ε. Όταν η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τείνει στη μονάδα, τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, 1)$, $\Gamma(2, 4)$.

A. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 7)

B. Να βρείτε σημείο Δ , ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

Γ. Να βρείτε το κέντρο K του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Gamma(2, 3)$. Έστω ότι το ύψος και η διάμεσος που άγονται από την κορυφή A έχουν εξισώσεις $3x + 5y + 6 = 0$ και $x - 11y + 2 = 0$ αντίστοιχα.

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες $(-2, 0)$.

(Μονάδες 6)

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 6)

Γ. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Β είναι $(5, -2)$.

(Μονάδες 6)

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 2y + \lambda + 1 = 0 \quad \text{και} \quad (C_2): x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4\lambda + 2 = 0 \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Α. Για ποιες τιμές του λ οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους;

(Μονάδες 6)

Β. Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες (συναρτήσει του λ) των παραπάνω κύκλων.

(Μονάδες 7)

Γ. Να αποδείξετε ότι για $\lambda = 1$ οι εφαπτομένες τους σε ένα κοινό τους σημείο είναι κάθετες μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της κοινή τους χορδής.

(Μονάδες 12)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 , να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

(Μονάδες 10)

B. Να διατυπώσετε τον ορισμό της παραβολής με εστία E και διευθετούσα την ευθεία (δ)

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

β. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία:

$$\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0, A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$$

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ δίνεται πάντα από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{B\Gamma} & \vec{\Gamma A} \end{pmatrix}$$

δ. Σε κάθε έλλειψη με εστιακή απόσταση 2γ και μήκος μεγάλου άξονα $2a$ ισχύει ότι :

$$b^2 = \gamma^2 - a^2.$$

ε. Κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση της μορφής $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(\kappa, \kappa + 1)$, $B(1, \kappa)$, $\Gamma(0, \kappa + 2)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa = 1$ ώστε τα σημεία A, B, Γ να ορίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

B. Για $\kappa = 1$, να υπολογίσετε:

α. το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ,

(Μονάδες 9)

β. την τιμή της παράστασης $\overline{AB} \cdot (2\overline{BT} - \overline{TA})$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\kappa + 2)x - 3y - 24\kappa = 0$ και $\varepsilon_2 : 4x - 3y + 2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε το κ ώστε οι ευθείες ε_1 , ε_2 να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 5)

B. Για $\kappa = 2$

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ , η οποία είναι κάθετη στην ε_2 στο σημείο της

$A(1, 2)$ και το σημείο τομής της B με την ε_1 .

(Μονάδες 10)

β. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ε_1 , ε_2 .

(Μονάδες 5)

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C ο οποίος εφάπτεται στις ευθείες ε_1 , ε_2 στα σημεία

B , A .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η υπερβολή $C_1 : 16x^2 - 9y^2 = 144$ και η γραμμή $C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

A. Να βρείτε τις εστίες και οι ασύμπτωτες της υπερβολής C_1

(Μονάδες 6)

B. Να αποδείξετε ότι η γραμμή C_2 είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

Γ. Να εξετάσετε τη σχετική θέση του κύκλου C_2 και της ασύμπτωτης της υπερβολής που σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

Δ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 7)

