ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΚΥΡΙΑΚΗ 6 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Λ, Σ, Σ, Λ, Λ

ΘΕΜΑ Β.

Β1.α). Ισχύει $\mathrm{Im}(z_1) \neq \mathrm{Im}(z_2)$, άρα $z_1 \neq z_2$ (1).

Αν α = 0, τότε $z^2 + 0 \cdot z + 0^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0,$ (διπλή ρίζα), άτοπο λόγω της (1).

Άρα $\alpha \neq 0.$

β) Είναι $\dfrac{z_1}{\alpha} = w$, οπότε $z_1 = \alpha w$. Όμως το z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης, άρα έχουμε

$z_1^{\,2} + \alpha \cdot z_1 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha w)^2 + \alpha \cdot \alpha w + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2(w^2 + w + 1) = 0 \Leftrightarrow w^2 + w + 1 = 0.$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με $w-1$ οπότε έχουμε:

$(w-1)\cdot(w^2 + w + 1) = (w-1)\cdot 0 \Leftrightarrow w^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow w^3 = 1$.

Β2. **α).** Έχουμε: $w^3 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z_1^{\,3}}{\alpha^3} = 1$. Ανάλογα προκύπτει ότι $\dfrac{z_2^{\,3}}{\alpha^3} = 1$.

Επομένως: $\dfrac{z_1^{\,3}}{\alpha^3} + \dfrac{z_2^{\,3}}{\alpha^3} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{z_1^{\,3} + z_2^{\,3}}{\alpha^3} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{16}{\alpha^3} = 2 \Leftrightarrow \alpha^3 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

<u>**2ος τρόπος:**</u> Είναι $\dfrac{z_1^{\,3}}{\alpha^3} = 1 \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{z_1^{\,3}}{\alpha^3}\right)} = \bar{1} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z_1}^{\,3}}{\alpha^3} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z_2^{\,3}}{\alpha^3} = 1$ κ.λ.π.

3<u>ος τρόπος.</u> $z_1^{\,3} + z_2^{\,3} = \left(z_1 + z_2\right)^3 - 3z_1 \cdot z_2(z_1 + z_2) = (-\alpha)^3 - 3(-\alpha)^2(-\alpha) = 2\alpha^3$, οπότε $2\alpha^3 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 2$

β). Για α = 2 έχουμε $z^2 + 2z + 4 = 0$. Η διακρίνουσα είναι Δ = -12. Επομένως οι λύσεις είναι $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{12}}{2} = \dfrac{-2 \pm i \cdot 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$

Β3. Έστω τώρα ότι $u = x + yi,\ x \in R$ και $y \in R.$ Τότε :

$\left|u - z_1\right|^2 + \left|u - z_2\right|^2 \le 8 \Leftrightarrow \left|x + yi + 1 - i\sqrt{12}\right|^2 + \left|x + yi + 1 + i\sqrt{12}\right|^2 \le 8 \Leftrightarrow$

$\left(x+1\right)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 + \left(x+1\right)^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 \le 8 \Leftrightarrow 2\left(x+1\right)^2 + 2y^2 + 6 \le 8 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2 + y^2 \le 1.$

Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο το Κ(-1,0) και ακτίνα ρ = 1.

Β4.α). Αφού οι εικόνες των μιγαδικών u βρίσκονται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο το Κ(-1,0) και ακτίνα ρ = 1, άρα απέχουν από το Κ (που είναι η εικόνα του -1) απόσταση μικρότερη ή ίση του 1. Επομένως $\left|u - (-1)\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|u + 1\right| \le 1$.

β). Είναι $u^2+2u+4=(u+1)^2+3$.

Είναι $|u+1|\le 1 \Leftrightarrow |u+1|^2\le 1^2 \Leftrightarrow |(u+1)^2|\le 1$, οπότε:

$|u^2+2u+4|=|(u+1)^2+3|\le|(u+1)^2|+|3|\le 1+3=4$

2ος τρόπος: Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $2\alpha\beta\le\alpha^2+\beta^2$, οπότε θα έχουμε:

$2|u-z_1||u-z_2|\le|u-z_1|^2+|u-z_2|^2$

$\Leftrightarrow 2|u-z_1||u-z_2|\le 8 \Leftrightarrow |(u-z_1)(u-z_2)|\le 4 \Leftrightarrow |u^2-(z_1+z_2)\cdot u+z_1z_2|\le 4 \Leftrightarrow$

$|u^2-(-2)\cdot u+4|\le 4 \Leftrightarrow |u^2+2u+4|\le 4$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(e^x-1\right)\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\left(x\cdot\ln x\right)\right)=0$ διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{D.L.H}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x\right)=0$

Αφού f συνεχής $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$.

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to 0^+}\left[(e^x-1)\ln x\right]\overset{(-\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{e^x-1}}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{e^x-1}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{xe^x}\overset{0/0}{=}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(e^x-1\right)e^x}{e^x+xe^x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(e^x-1\right)}{x+1}=0.$$

Γ2. Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^x-1\right)\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\ln x\right)=..=-\infty.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ3 α) $f'(x)=e^x\ln x+\frac{e^x-1}{x}$, $x>1$

$f''(x)=.....=e^x\ln x+\frac{e^x\left(2x-1\right)+1}{x^2}>0$, αφού $x>1$

Εξίσωση εφαπτομένης στο A(1,f(1):

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=(e-1)(x-1)\Rightarrow y=(e-1)x-(e-1)$

β). Η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $[1,+\infty)$, με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $f(x)>(e-1)(x-1)$ για $x>1$.

Άρα : $\left(e^x\text{-}1\right)\ln x>(e\text{-}1)(x\text{-}1) \Leftrightarrow \dfrac{e^x\text{-}1}{e\text{-}1}>\dfrac{x\text{-}1}{\ln x}$ για x >1.

2^{ος} τρόπος Θ.Μ.Τ στο [1, x]. Υπάρχει $\xi\in(1,x)$ ώστε να ισχύει: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)\text{-}f(1)}{x\text{-}1}>f'(1)$

αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Άρα $\dfrac{\left(e^x\text{-}1\right)\ln x}{x\text{-}1}>e-1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x\text{-}1}{e\text{-}1}>\dfrac{x\text{-}1}{\ln x}$ για x>1.

Γ4. f(0)=0, f(1)=0. Από το Θ.Rolle υπάρχει $x_o\in(0,1)$ ώστε

$f'(x_o)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow e^{x_o}(1+x_o\ln x_o)=1 \Leftrightarrow e^{x_o}\ln\left(e\cdot x_o^{x_o}\right)=1$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1.α). $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\kappa\\ \lim\limits_{x\to 0}x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}\cdot x\right)=\kappa\cdot 0=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-1\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$,

και επειδή f συνεχής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$ (1).

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=k\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=k\Rightarrow f'(0)=k$ (2).

Όμως $f(x)\geq f(0),\ x\in R$, οπότε, σύμφωνα με θ. Fermat $f'(0)=0$ (3).

Από τις (2), (3) έχουμε $\kappa=0$.

2^{ος} τρόπος Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=k$ και $f(x)=x\cdot g(x)+1$, x≠0. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot g(x)+1\right)=1$ κ.λ.π.

β). Αφού k = 0, θα έχουμε $f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=2x\left[f(x)+\ln\left(x^2+1\right)\right]$, οπότε:

$\left[f(x)+\ln\left(x^2+1\right)\right]'=2x\left[f(x)+\ln\left(x^2+1\right)\right]$.

Θέτουμε $h(x)=f(x)+\ln(x^2+1)$.

Η προηγούμενη σχέση γράφεται $h'(x)=2xh(x)$ και επειδή h(x)>0 έχουμε:

$h'(x)=2xh(x)\Leftrightarrow \dfrac{h'(x)}{h(x)}=2x\Leftrightarrow \left(\ln\left(h(x)\right)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow \ln\left(h(x)\right)=x^2+c$

Για x = 0 προκύπτει c = 0, οπότε $\ln\left(h(x)\right)=x^2\Leftrightarrow h(x)=e^{x^2}$.

Επομένως $f(x)+\ln\left(x^2+1\right)=e^{x^2} \Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-\ln\left(x^2+1\right),\ x\in R$

2^{ος} τρόπος

$h'(x)=2xh(x)\Leftrightarrow e^{x^2}h'(x)=2xe^{x^2}h(x)\Leftrightarrow ....$

$\left(\dfrac{h(x)}{e^{x^2}}\right)'=0$. Επομένως $\dfrac{h(x)}{e^{x^2}}=c \Leftrightarrow h(x)=c\cdot e^{x^2} \Leftrightarrow f(x)+\ln\left(x^2+1\right)=c\cdot e^{x^2}$.

Για x = 0 προκύπτει c = 1. Επομένως έχουμε :

$f(x)+\ln\left(x^2+1\right)=e^{x^2} \Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-\ln\left(x^2+1\right),\ x\in R$ (4).

Δ2. Η $\int_{x\cdot F(x)}^{G(x)}f(t)\,dt=0 \Leftrightarrow \left[F(x)\right]_{x\cdot F(x)}^{G(x)}=0\Leftrightarrow F\left(G(x)\right)-F\left(xF(x)\right)=0\Leftrightarrow$

$F\big(G(x)\big)=F\big(xF(x)\big) \Leftrightarrow G(x)=xF(x) \Leftrightarrow G(x)-xF(x)=0$ (5), αφού η F είναι γνησίως αύξουσα.

Θα λύσουμε την εξίσωση (5), η οποία είναι ισοδύναμη της $\int_{x\cdot F(x)}^{G(x)} f(t)\,dt=0$.

Θέτουμε $\varphi(x)=G(x)-xF(x)$.

Προφανής ρίζα της φ είναι η $x=\frac{1}{2}$.

Επίσης $\varphi'(x)=G'(x)-F(x)-x\cdot F'(x)=x\cdot f(x)-F(x)-x\cdot f(x)=-F(x)=$

$=-\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt<0$ στο $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, επειδή $f(t)>0$.

Επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, οπότε η λύση $x=\frac{1}{2}$ είναι μοναδική.

Δ3. Αφού η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ και $2>\frac{1}{2}$, θα έχουμε

$\varphi(2)<\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\ \varphi(2)<\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \varphi(2)<0 \Leftrightarrow G(2)-2F(2)<0 \Leftrightarrow 2F(2)>G(2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_{1/2}^{2} f(t)\,dt > \int_{1/2}^{2}\big[t\cdot f(t)\big]dt$

<u>2ος τρόπος</u>

$2\int_{1/2}^{2} f(t)\,dt > \int_{1/2}^{2}\big[t\cdot f(t)\big]dt \Leftrightarrow \int_{1/2}^{2}\big(2f(t)-t\cdot f(t)\big)dt > \Leftrightarrow \int_{1/2}^{2}(2-t)f(t)\,dt>0$ που ισχύει αφού $\frac{1}{2}<2$, 2-t>0 για $\frac{1}{2}\le t<2$ και f(t)>0

Δ4.

$F(x)=\dfrac{G(2x)-G\left(x^2+1\right)+\frac{x}{4}\cdot G(x)}{x-1} \Leftrightarrow F(x)(x-1)-\left[G(2x)-G\left(x^2+1\right)+\frac{x}{4}\cdot G(x)\right]=0$ για $x\neq1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\omega(x)=F(x)(x-1)-\left[G(2x)-G\left(x^2+1\right)+\frac{x}{4}\cdot G(x)\right]$.

Η ω είναι συνεχής στο [1,2] και $\omega(1)=\ldots=-\frac{1}{4}G(1)<0$.

$\omega(2)=F(2)-G(4)+G(5)-\frac{1}{2}G(2)=\dfrac{2F(2)-G(2)}{2}+G(5)-G(4)>0$

Γιατί 2F(2)-G(2)>0 από Δ3 και G(5)-G(4)>0 αφού G γνησίως αύξουσα.

Άρα, σύμφωνα με Θ.Bolzano η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).