ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ ΕΚΠ/ΣΗΣ Β. ΑΙΓΑΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Εποπτεία
Ο Προϊστάμενος
Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Β. Αιγαίου
Πρόδρομος Π. Ελευθερίου

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΚΥΡΙΑΚΗ 6 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Να αποδείξετε ότι αν:

- Η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_o)=\eta.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Α2. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, παρουσιάζει στο $x_o\in A$ (ολικό) μέγιστο;

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό y η εξίσωση f(x)=y έχει κατ' ανάγκη ακριβώς μια λύση ως προς x.

β. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε η gof ορίζεται όταν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

δ. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx$ μόνο όταν $\alpha<\beta<\gamma$.

ε. Αν η ευθεία $x=x_o$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty \;\; \textbf{ή} \;\; \lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνονται ένας πραγματικός αριθμός α και η εξίσωση $z^2+\alpha z+\alpha^2=0$ της οποίας οι ρίζες είναι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $Im(z_1)\neq Im(z_2)$.

Β1. α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\neq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β) Αν $\frac{z_1}{\alpha}=w$, τότε να αποδείξετε ότι $w^3=1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Β2. Αν επιπλέον ισχύει $z_1^3+z_2^3=16$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Β3. Αν $z_1=-1+i\sqrt{3}$ και $z_2=-1-i\sqrt{3}$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών u για τους οποίους ισχύει:

$$|u-z_1|^2+|u-z_2|^2\leq 8.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β4. Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς u του ερωτήματος **Β3** ισχύουν:

α) $|u+1|\leq 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

β) $|u^2+2u+4|\leq 4$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε x>0 ισχύει $f(x)=\left(e^x-1\right)\cdot \ln x$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι f(0)=0.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ3. α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στο διάστημα $[1,+\infty)$ ***(μονάδες 3)*** και να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της Α(1, f(1)) ***(μονάδες 2).***

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε x>1 ισχύει $\dfrac{e^x-1}{e-1}>\dfrac{x-1}{\ln x}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ για το οποίο ισχύει:

$$e^{x_o}\cdot \ln\left(e\cdot x_o^{x_o}\right)=1.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω k πραγματικός αριθμός και f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=k$.
- $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=2x[f(x)+\ln(x^2+1)]+k$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δίνονται επιπλέον οι συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt,\ x\geq\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad G(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left(tf(t)\right)dt,\ x\geq\frac{1}{2}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

α) k=0.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) $f(x)=e^{x^2}-\ln\left(x^2+1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ2. Να λύσετε στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ την εξίσωση $\int_{xF(x)}^{G(x)} f(t)dt=0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $2\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(t)dt>\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(tf(t)\right)dt$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$F(x)=\frac{G(2x)-G(x^2+1)+\frac{x}{4}G(x)}{x-1}.$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 2).

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ *(για τους εξεταζομένους)*</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). <u>**Να μην αντιγράψετε**</u> τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>**Δεν επιτρέπεται να γράψετε**</u> καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε <u>**στο τετράδιό σας**</u> σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11.30 π.μ.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ