==

ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ (Β΄ ΟΜΑΔΑ)

===

ΘΕΜΑ Α

Α1.

- Θεωρία σελ. 142 στο σχολικό βιβλίο.
- Θεωρία σελ. 86-87 στο σχολικό βιβλίο.

Α2.

Θεωρία, ορισμός σελ. 16 στο σχολικό βιβλίο.

Α3.

Απόδειξη στη σελ. 151 στο σχολικό βιβλίο.

Α4.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος (Θα πρέπει πρώτα να έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά)

ε) Σωστό

==

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $0 \le P(B) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le -3x^2 + 2x - \frac{1}{9} \le 1$, οπότε έχουμε:

$-3x^2 + 2x - \frac{1}{9} \ge 0$ από όπου προκύπτει $\frac{3-\sqrt{6}}{3} \le x \le \frac{3+\sqrt{6}}{3}$ και

$-3x^2 + 2x - \frac{1}{9} \le 1 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x - \frac{10}{9} \le 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αφού Δ<0)

Άρα το ευρύτερο διάστημα στο οποίο ανήκει το x είναι $x \in [\frac{3-\sqrt{6}}{3}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}]$

B2. Αρχικά θα βρούμε τη μέγιστη τιμή του P(B). Έχουμε

$f(x) = -3x^2 + 2x - \frac{1}{9}, x \in \mathbb{R}$

η P(B)=$f(x), x \in [\frac{3-\sqrt{6}}{3}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}]$

και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -6x + 2, x \in \mathbb{R}$ και επειδή:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ η f είναι : f γν. αύξουσα στο $(-\infty, \frac{1}{3}]$ και άρα (αφού η f συνεχής)

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$ f γν. φθίνουσα στο $[\frac{1}{3}, \infty)$

Η f έχει μέγιστο στο $\frac{1}{3}$ *το* $\max P(B) = f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$.

Τώρα, αν $P(A) = y$ έχουμε:

$(P(A))^2 + 2P(A')^2 = 3P(B) \Rightarrow y^2 + 2(1-y)^2 \leq 3\frac{2}{9} \Rightarrow (y - \frac{2}{3})^2 \leq 0 \Rightarrow y = P(A) = \frac{2}{3}$ και άρα

$(P(A))^2 + 2P(A')^2 = 3P(B) \Rightarrow 3P(B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{9}$

B3. Έχουμε διαδοχικά:

$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

$\frac{5}{9} = \frac{2}{3} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{9}$

- Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το Β είναι Γ= Β-Α και άρα:

$P(\Gamma) = P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B-A) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

- Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα Α, Β είναι: $\Delta = (A-B) \cup (B-A)$ και άρα

$P(\Delta) = P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) = \frac{5}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$

(*αφού* τα $A-B, B-A$ είναι ασυμβίβαστα που μπορεί να προκύψει και από το διάγραμμα του Venn)

- Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β είναι:

$E = A' \cap B' = (A \cup B)'$ (*πρέπει να* αποδειχθεί με τα διαγράμματα του Venn και ειναι σχετικά απλό) και άρα:

$P(E) = P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) (1)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{9}$

Από την (1) *έχουμε* P(E)=$P(A' \cap B') = \frac{2}{9}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Το πλάτος c των κλάσεων είναι: $c=\frac{R}{5}=\frac{20}{5}=4$.Αν $x_i(i=1,\dots 5)$ είναι τα κέντρα των κλάσεων θα έχουμε:

$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$

$x_2=x_1+4$

$x_3=x_1+8$

$x_4=x_1+12$

$x_5=x_1+16$

Επειδή πρόκειται για παρατηρήσεις $x_i(i=1,\dots 5)$ περιττού πλήθους θα έχουμε ότι:

$\delta=x_3=x_1+8=68 \Leftrightarrow x_1=60$

Το κάτω άκρο της $1^{ης}$ κλάσης θα είναι $x_1-\frac{c}{2}=60-2=58$ και άρα οι κλάσεις είναι:

$[58,62)$

$[62,66)$

$[66,70)$

$[70,74)$

$[74,78)$

Γ2.

$F_3=0,6 \Leftrightarrow f_1+f_2+f_3=0,6$ (1)

$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $f_4+f_5=0,4$

Έχουμε: $20=(f_4+f_5)\nu$, αφού το κριτήριο προαγωγής ενός υπαλλήλου (≥ 70) πληρούν οι υπάλληλοι που ανήκουν στην $4^η$ και $5^η$ κλάση. Άρα, θα είναι

$20=(f_4+f_5)\nu \Leftrightarrow 20=0,40\nu \Leftrightarrow \nu=50$ υπάλληλοι

Γ3.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι δύο πρώτες στήλες συμπληρώνονται άμεσα.

Αναλύοντας τα δεδομένα θα έχουμε:

$$\mathrm{N}_4=\frac{4}{5}N_5 \Leftrightarrow \mathrm{N}_4=\frac{4}{5}\nu \Leftrightarrow \frac{\mathrm{N}_4}{\nu}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow F_4=0,8 \Leftrightarrow f_1+f_2+f_3+f_4=0,8 \ (3)$$

$$108^o=360^o(f_1+f_2) \Leftrightarrow f_1+f_2=0,3 \ (4)$$

$$\overline{x}=x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+x_5f_5=68,8 \ (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε $f_4 = 0,2$ και από την σχέση (2) έχουμε $f_5 = 0,2$
Από τις σχέσεις (1) και (4) έχουμε $f_3 = 0,3$
Η σχέση (5) γίνεται $60 f_1 + 64 f_2 = 18,8$ που με την (4) αποτελεί σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους τις f_1, f_2 και του οποίου η λύση είναι $\begin{matrix} f_1 = 0,10 \\ f_2 = 0,20 \end{matrix}$.
Σύμφωνα με τα παραπάνω ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται ως ακολούθως:

Κλάσεις [,)	**Κέντρα κλάσεων** x_i	ν_i	N_i	f_i	$F_i\%$
[58, 62)	60	5	5	0,10	10
[62, 66)	64	10	15	0,20	30
[66, 70)	68	15	30	0,30	60
[70,74)	72	10	40	0,20	80
[74,78)	76	10	50	0,20	100

Γ4.

Το Ιστόγραμμα συχνοτήτων προκύπτει εύκολα και το πολύγωνο συχνοτήτων προκύπτει ενώνοντας με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων που σχηματίζονται (λαμβάνοντας δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα 0).

==

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.
Η μέση τιμή των 120 παρατηρήσεων είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{120} = \frac{1 + x_1 + x_2 + \ldots x_{119}}{120} = \frac{\frac{120}{2}(2 + 119 \cdot 2)}{120} = \frac{60 \cdot 240}{120} = 120$$

(χρησιμοποιήθηκε ο τύπος: $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]$ του αθροίσματος διαδοχικών ν-όρων Α.Π.)

Για την τυπική απόκλιση s έχουμε: Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}, x\in\mathbb{R}$ και το ζητούμενο όριο, μετά τις πράξεις, γίνεται :

$$s=\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x+2}{x^2-1}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+2)}{(x+1)}=3$$

Δ 2.

Δ.2.1.

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}, x\in\mathbb{R}$ και.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1, x=3$
$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,3)$
$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$
άρα η f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-1,3)
- Γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(3,\infty)$
- *η* f έχει τοπικό μέγιστο στο x=3 το $f(3)=\dfrac{1}{6}$
  και άρα οι τιμές των $(i=0,1,2,...119)$ *είναι* $y_i=\kappa x_i-1, i=0,1,2,...119$

Δ.2.2.

Σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 2 σελ. 98-99) η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι αντίστοιχα: $\begin{array}{l}\bar{y}=\kappa\bar{x}-1=120\kappa-1\\ s_y=|\kappa|s_x\Rightarrow s_y=3|\kappa|\end{array}$ και έτσι ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV_y=\dfrac{s_y}{|\bar{y}|}=\dfrac{3|\kappa|}{|120\kappa-1|}$

Για να είναι το δείγμα των $y_i(i=0,1,2,...119)$ ομοιογενές θα πρέπει : $C.V_y\le\dfrac{1}{10}$

$$CV_y\le\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{3|\kappa|}{|120\kappa-1|}\le\frac{1}{10}\Leftrightarrow 30|\kappa|\le|120\kappa-1|\Leftrightarrow 120\kappa-1\ge 30\kappa \text{ ή } 120\kappa-1\le-30\kappa(\kappa>0)$$

άρα $\kappa\ge\dfrac{1}{90}$ *ή* $\kappa\le\dfrac{1}{150}$ *και* επειδή ζητάμε την ελάχιστη θετική ακέραια σταθερά θα είναι κ=1

Δ 3.

Για $\kappa=1$ έχουμε: $\bar{y}=120-1=119$ και $s_y=3$. Επειδή η κατανομή των παρατηρήσεων της τ.μ Ζ είναι κανονική με μέση τιμή και τυπική απόκλιση 119 και 3 αντίστοιχα θα έχουμε ότι :

Στο διάστημα : $(\bar{y}-s_y,\bar{y}+s_y)=(116,122)$ βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων της Ζ

Στο διάστημα: $(\bar{y}-2s_y,\bar{y}+2s_y)=(113,125)$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων της Ζ

Στο διάστημα: $(\bar{y}-3s_y,\bar{y}+3s_y)=(110,128)$ βρίσκεται το 99,7% των παρατηρήσεων της Ζ

Και με βάση την **καμπύλη της κανονικής κατανομής** θα έχουμε:

Για το ενδεχόμενο Α: $(50-\frac{68}{2})\%=16\%$ βρίσκονται πάνω από 122 ,άρα $P(A)=0,16$

Για το ενδεχόμενο Β: $(\frac{68}{2}+\frac{95}{2})\%=81,5\%$ βρίσκονται από 116-125, άρα $P(B)=0,815$

Για το ενδεχόμενο Γ: $(0,15+0,15)\%=0,30\%$ βρίσκονται πάνω από 128 ή κάτω από 110, άρα $P(\Gamma)=0,003$

23/05/2014

Μαθηματικός Περιηγητής

Σχολικό έτος: 2013-2014